Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Carmen Perugia

Omogenizzazione di problemi di tipo stazionario ed evolutivo in domini perforati e risultati di estensione unica nel Calcolo delle Variazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 555–558.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_555_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 555-558

Omogenizzazione di problemi di tipo stazionario ed evolutivo in domini perforati e risultati di estensione unica nel Calcolo delle Variazioni.

Carmen Perugia

1. – Introduzione.

La teoria dell'Omogeneizzazione ha come fine lo studio del comportamento dei materiali non omogenei i cui parametri fisici, come conduttività e coefficiente di elasticità, oscillano tra diversi valori.

Poiché da un punto di vista macroscopico, il composto sembra un materiale omogeneo, lo scopo dell'omogeneizzazione è ricavare le proprietà macroscopiche del composto tenendo conto delle proprietà della struttura microscopica. Per studiare il comportamento macroscopico di un siffatto materiale occupante un dominio Ω, si suppone che le eterogeneità sono molto piccole rispetto alle dimensioni di Ω.

Quindi, indicato con ε il parametro rappresentante la finezza della struttura microscopica, si ottiene una buona approssimazione del comportamento macroscopico di tale materiale mandando ε a zero nelle equazioni che descrivono fenomeni fisici, quali la conduzione del calore, l'elasticità ecc.. Questa analisi di convergenza è la naturale traduzione matematica del problema fondamentale dell'omogeneizzazione consistente nell'individuare un materiale omogeneo il cui comportamento sia simile a quello del materiale non omogeneo.

2. – Omogeneizzazione in domini perforati con condizioni miste sulla frontiera dei buchi.

La prima parte della tesi (cf. [5]) verte sullo studio del comportamento asintotico delle soluzioni di un problema di Poisson del tipo

$$
(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon^{\tau,\sigma} = f & \text{in } \Omega_\varepsilon^{\tau,\sigma}, \\ u_\varepsilon^{\tau,\sigma} = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ \text{condizioni miste} & \text{su } \partial\Omega_\varepsilon^{\tau,\sigma} \setminus \partial\Omega \end{cases}
$$

essendo $\Omega_\varepsilon^{\tau,\sigma}$ ottenuto perforando un dominio fisso Ω con frontiera lipschitziana mediante due famiglie di buchi periodicamente distribuiti con periodo ε e considerando condizioni miste sulla frontiera degli stessi. La presenza di condizioni miste richiede l'analisi dei fenomeni di interferenza prodotti dal variare delle taglie delle parti di frontiera su cui esse si assumono. La prima famiglia è costituita da insiemi riscalati di un fattore ε sulle cui frontiere si impongono condizioni di Neumann nonomogenee, in modo che il flusso totale sia nullo. La seconda famiglia è costituita da insiemi ottenuti riscalandone uno fisso K di un fattore $\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$ se $n \geq 3$, $(\exp(-\varepsilon^{-2})$, se $n=2)$, sulle cui frontiere si impongono condizioni di Dirichlet omogenee. Inoltre, ogni elemento della seconda famiglia si muove perpendicolarmente verso un elemento della prima famiglia con una velocità che dipendeda ε^{σ}. Viene quindi studiato il processo di omogeneizzazione indipendenza della velocità di avvicinamento e si ottiene il problema limite

$$\begin{cases} -div\, \mathcal{A}(\nabla u^{\tau,\sigma}) + \dfrac{1}{2}\mu^{\tau,\sigma} u^{\tau,\sigma} = \theta f & \text{in } \Omega \\ u^{\tau,\sigma} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

dove $\mathcal{A}$ una matrice costante, θ è una costante dipendente dal volume di «materiale» contenuto in Ω e $\mu^{\tau,\sigma}$ è una costante dipendente dalla velocità di avvicinamento e la cui espressione è strettamente legata alla capacità in $\mathbf{R}^n$ del buco di Dirichlet di riferimento. In particolare si dimostra che

$$\mu^{\tau,\sigma} = \begin{cases} 2\,cap\,(K) & \text{se } 1 \leq \sigma < \dfrac{n}{n-2} \text{ per ogni } \tau \\ cap((K+\tau) \cup (K^* - \tau)) & \text{se } \sigma = \dfrac{n}{n-2} \\ cap(K \cup K^*) & \text{se } \sigma > \dfrac{n}{n-2} \text{ per ogni } \tau \end{cases}$$

se $n \geq 3$, mentre

$$\mu^{\tau,\sigma} = \begin{cases} 4\pi & \text{se } \sigma < 2 \\ 2\pi & \text{se } \sigma \geq 2 \end{cases}$$

se $n=2$, essendo K^* il simmetrico di K rispetto all'iperpiano $x_1 = 0$.

Gli strumenti fondamentali sono il metodo di riflessione, usato per costruire sia le funzioni test che i prolungamenti in norma uniforme delle soluzioni del problema e il metodo di Tartar usato per conseguire i risultati di convergenza e definire il problema limite.

3. – Omogeneizzazione di un problema di evoluzione lineare del secondo ordine in un dominio con frontiera oscillante.

L'omogeneizzazione è stata studiata anche per problemi di natura evolutiva definiti in un dominio con frontiera oscillante (cf. [4]). La parte spaziale del dominio, Ω_h, si compone di due parti: una fissa Ω^- rappresentata da un parallelepipedo con le facce parallele ai piani coordinati e l'altra che oscilla al variare del parametro h. Quest'ultima si costruisce nel seguente modo: sia C_h un cilindro ottenuto riscalandone uno fisso mediante una omotetia di rapporto $h-1$ nelle prime $n-1$ variabili. Allora, Ω_h^+ è l'unione di tali cilindri distribuiti con una periodicità $h-1$ nelle prime $n-1$ direzioni. Le basi inferiori di tali cilindri giacciono sulla faccia superiore Σ di Ω^-. Indicato con Ω^+ il più piccolo parallelepipedo contenente gli insiemi Ω_h^+ e con Ω l'unione di Ω^+, Ω^- e Σ, lo scopo è studiare il comportamento asintotico, quando h tende a $+\infty$, delle soluzioni del seguente problema di evoluzione lineare del secondo ordine

$$(3) \qquad \begin{cases} u_h'' - \Delta u_h + u_h = f_h & \text{in }]0, T[\times \Omega_h \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial \nu} = 0 & \text{su }]0, T[\times \partial\Omega_h \\ u_h(0) = u_h^0, \; u_h'(0) = u_h^1 & \text{in } \Omega_h \end{cases}$$

dove $f_h \in L^2(0, T; L^2(\Omega_h))$, $u_h^0 \in H^1(\Omega_h)$ e $u_h^1 \in L^2(\Omega_h)$ sono funzioni assegnate mentre ν denota il versore normale esterno alla frontiera di Ω_h. Indichiamo con ω la base inferiore del cilindro di riferimento e definiamo la funzione

$$(4) \qquad \pi(x) = \begin{Bmatrix} |\omega| & \text{in } \Omega^+ \\ 1 & \text{in } \Omega^- \end{Bmatrix}.$$

Si prova una sorta di «convergenza» della terna evolutiva del problema di partenza $(H^1(\Omega_h), L^2(\Omega_h), (H^1(\Omega_h))')$, a quella del problema limite costituita da spazi di Hilbert i cui podotti scalari si ottengono sostanzialmente «pesando» gli usuali prodotti scalari in $H^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ con la funzione π. Inoltre, nel problema limite, l'operatore omogeneizzato corrispondente al Laplaciano è indipendente dalle prime $n-1$ componenti nel dominio Ω^+, mentre coincide con il Laplaciano stesso nel dominio Ω^-.

4. – Il problema della ricerca dell'estensione unica di funzionali del Calcolo delle Variazioni.

La terza parte del lavoro di tesi concerne il problema dell'esistenza dell'estensione unica di funzionali del Calcolo delle Variazioni da una classe di funzioni più regolari ad una classe di funzioni meno regolari (cf. [3]). Questo tipo di problema è ispirato dai classici problemi per il funzionale di Dirichlet e dell'area. Esso, per lo più, è stato affrontato basandosi su proprietà mensurali e di natura topologica quali l'interna regolarità e l'inferiore semicontinuità dei funzionali stessi. Focalizzando l'attenzione anche su proprietà di natura vettoriale dei funzionali, come la convessità e avendo in mente quanto provato dai proff. L. Carbone e R. De Arcangelis in [1], il risultato raggiunto è basato su condizioni suggerite da una formula di cambiamento di variabili per trasformazioni omotetiche che implicano l'interna regolarità.

Inoltre si ricava, come corollario, un risultato di estensione unica per il funzionale integrale

$$F : (\Omega, u) \in \mathcal{S}_0 \times C^{\infty}(\mathbf{R}^n) \to \int_{\Omega} f(\nabla^h u)\, dx$$

essendo $f : \mathbf{R}^{n^h} \to [0, +\infty]$ una funzione convessa ed inferiormente semicontinua, $\mathcal{S}_0$ la classe degli insiemi fortemente stellati rispetto ad un punto di $\mathbf{R}^n$, $h \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ e ∇^h il vettore le cui componenti sono le derivate parziali di ordine h. Invero, per $h = 1$ come formula esplicita per l'estensione si ritrova quella classica che descrive l'inviluppo semicontinuo secondo la topologia di L^1 del funzionale F.

Infine, avendo in mente alcune classi di funzionali del Calcolo delle Variazioni, si prova un risultato di estensione unica per funzionali del tipo

$$F : (\Omega, u) \in \mathcal{S}_0 \times C^{\infty}(\mathbf{R}^n) \to \int_{\Omega} f(\nabla^h u, \nabla^k u)\, dx$$

essendo $f : \mathbf{R}^{n^h} \times \mathbf{R}^{n^k} \to [0, +\infty]$ una funzione convessa ed inferiormente semicontinua, $h \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ e $k \in \mathbf{N}$. Inoltre si ricava, come corollario, un risultato di estensione unica per alcuni funzionali del Calcolo delle Variazioni, tra cui il funzionale dell'area.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARBONE L., DE ARCANGELIS R., *On the unique extension problem for functionals of the calculus of variations*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur, **12** (2001), 85-106.

[2] CORBO ESPOSITO A., D'APICE C., GAUDIELLO A., *Homogenization in a perforated domain with both Dirichlet and Neumann boundary conditions on the holes*, Asymptot. Anal., **31** (2002), 297-316.

[3] DE MAIO U., FAELLA L., PERUGIA C., *Homothetic changes of variables and the unique extension problem in Calculus of Variations*, apparirà su Ita. J. Pure Appl. Math.

[4] DURANTE T., FAELLA L., PERUGIA C., *Optimal control theory*, apparirà su NoDEA.

[5] DURANTE T., FAELLA L., PERUGIA C., *Homogenization of some types of Neumann and Dirichlet problems*, Ricerche Mat., **LI fasc.1** (2002), 127-158.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»; e-mail: perugia@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Napoli) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Luciano Carbone, Università di Napoli