# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Marta Macrì


## Soluzioni omocline a varietà invarianti: un approccio variazionale


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 539–542.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_539_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 539-542

# Soluzioni omocline a varietà invarianti: un approccio variazionale.

MARTA MACRÌ

L'interesse allo studio delle soluzioni omocline nasce con Poincaré che, studiando il problema dei tre corpi, mostra il collegamento tra l'esistenza di tali soluzioni e il comportamento caotico del sistema.

Consideriamo un sistema Hamiltoniano $H(p, q)$ e supponiamo che $P_0 = (0, q_0) \in \mathbf{R}^{2n}$ sia una posizione di equilibrio per tale sistema. Diciamo «omoclina» alla posizione di equilibrio $P_0$ una soluzione $t \in \mathbf{R} \to P(t) \equiv (p(t), q(t)) \in \mathbf{R}^{2n}$ tale che per $t \to \pm\infty$ si abbia $p(t) \equiv \dot{q}(t) \to 0$ e $q(t) \to q_0$.

Più in generale si può parlare di soluzioni omocline a insiemi invarianti. Denotiamo con $\Phi$ il flusso associato a un dato sistema dinamico. Diciamo che l'insieme $A \subseteq \mathbf{R}^{2n}$ è invariante per tale sistema se per ogni $(q, p) \in A$ si ha $\Phi(t, q, p) \in A$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Diremo che un'orbita $P(t)$ è omoclina a un insieme invariante $A$ se $\mathrm{dist}(P(t), A) \to 0$ quando $t \to \pm\infty$.

Questo tipo di problema è stato affrontato con metodo perturbativo da Melnikov nel 1963: analizzando le proprietà della funzione di Melnikov, si ottengono informazioni sull'intersezione tra varietà stabile e instabile relative a un punto fisso iperbolico e quindi sull'esistenza di soluzioni omocline.

Un alternativa al metodo perturbativo classico è quello variazionale. Esso presenta alcuni vantaggi: si supera il problema di mostrare l'intersezione transversa tra varietà stabile e instabile e, inoltre, si è in grado di studiare anche problemi che non si presentino in un contesto perturbativo. I primi lavori in tal senso sono [4] e [5] nei quali la ricerca di omocline per un sistema Hamiltoniano con funzione di Hamilton periodica rispetto al tempo è ridotto alla ricerca di punti critici per un opportuno funzionale.

In questa tesi analizziamo con metodo variazionale due specifici problemi.

## 1. – Soluzioni omocline a tori invarianti.

Nei lavori [1, 3] si dà una interpretazione variazionale della funzione di Melnikov: in un contesto di equazioni differenziali perturbate, la ricerca di soluzioni omocline si riduce alla ricerca di punti critici della primitiva di Melnikov.

Seguendo tale metodo si è studiato il sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot p = q - (1+\varepsilon g(\vec\varphi))\, V'(q) \\ \dot q = p \\ \dot{\vec I} = -\varepsilon \nabla g(\vec\varphi)\, V(q) \\ \dot{\vec\varphi} = \vec\omega \end{cases}$$

dove $q: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ e supponiamo $V(q) = \dfrac{1}{p+1}|q|^{p+1}$ con $p > 1$, $g: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ è 1-periodica rispetto a tutte le sue variabili, $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbf{R}^+$. Sotto le date ipotesi, per ogni $\vec\varphi_0 \in \mathbf{T}^k$, $p(t) = 0$, $q(t) = 0$, $\vec I(t) = \vec I_0$, $\vec\varphi(t) = \vec\omega t + \vec\varphi_0$ è ovviamente una soluzione. Inoltre il sistema (1) è equivalente al sistema dipendente dal tempo

$$(2)\qquad -\ddot u + u = (1 + \varepsilon g(\omega_1 t + \varphi_1, \ldots, \omega_k t + \varphi_k))\, V'(u).$$

Si dimostra l'esistenza di soluzioni $(u, \vec\varphi)$ di (2) tale che $u$ è omoclina a 0 e $\vec\varphi$ soddisfa la condizione

$$(3)\qquad \Delta \vec I = -\int_{\mathbf{R}} \varepsilon \nabla g(\vec\omega t + \vec\varphi)\, V(u(t))\, dt = 0\,.$$

Il motivo di questa condizione è più chiaro se guardiamo al sistema Hamiltoniano (1). Supponiamo di aver trovato una soluzione omoclina $u(t)$ di (2), cioè tale che $u(t), \dot u(t) \to 0$, as $t \to \pm\infty$. Allora la corrispondente soluzione $(\dot u(t), u(t), \vec I(t), \vec\omega t + \vec\varphi_0)$ di (1) è omoclina al toro invariante $\{(0, 0, \vec\varphi, \vec I_0) \mid \vec\varphi \in \mathbf{T}^k\}$, purché valga la (3); infatti dalla terza equazione di (1), abbiamo che $\vec I(+\infty) - \vec I(-\infty) = \Delta \vec I = 0$.

Le soluzioni omocline vengono trovate come punti critici del funzionale

$$f_\varepsilon(u, \vec\varphi) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbf{R}} V(u) - \varepsilon \int_{\mathbf{R}} g(\vec\omega t + \vec\varphi)\, V(u).$$

Si mostra che il funzionale imperturbato $f_0$ possiede una varietà di punti critici $Z$. Quindi si costruisce una varietà $Z_\varepsilon$, diffeomorfa alla varietà $Z$ con la proprietà che se $(u, \vec\varphi) \in Z_\varepsilon$ e $f'_{\varepsilon|Z_\varepsilon}(u, \vec\varphi) = 0$, allora $f'_\varepsilon(u, \vec\varphi) = 0$; in tal modo la ricerca dei punti critici di $f_\varepsilon$ su $H^1 \times \mathbf{T}^k$ (vicino a $Z \times \mathbf{T}^k$) si riconduce alla ricerca dei punti critici di $f_{\varepsilon|Z_\varepsilon}$.

## 2. – Soluzioni omocline a orbite periodiche in una varietà centrale.

Un altro problema affrontato nella tesi, si veda [6], è relativo alla Lagrangiana

$$(4)\qquad L(x, \dot x, q, \dot q) = \frac{1}{2}(\dot x^2 - x^2) + \frac{1}{2}\dot q^2 + (1 + \delta(x))V(q) \quad x, q \in \mathbf{R}.$$

Se $V$ è periodica in $q$, ha un minimo locale stretto per $q = 0$ e $V(0) = 0$, è noto che $P_0 = (x = 0, \dot x = 0, q = 0, \dot q = 0)$ è un punto stazionario di tipo centro-sella per l'associato sistema Hamiltoniano. Inoltre, associata a $P_0$ vi è la varietà centrale

$q = 0, \dot{q} = 0$, foliata dalle orbite periodiche $x_R(t) = R\cos(t+\varphi)$, $\dot{x}_R(t) = -R\sin(t+\varphi)$.

Un modello più generale di questo tipo è stato studiato da Patrick Bernard, che in [2] mostra l'esistenza di almeno una soluzione omoclina a una delle orbite periodiche nella varietà centrale e dà una stima dall'alto dell'energia della soluzione trovata.

Nella tesi si cercano soluzioni $(x(t), q(t))$ del sistema

$$\begin{cases} \ddot{q} = (1+\delta(x))V'(q) \\ \ddot{x} + x = \delta'(x)V(q) \end{cases} \tag{5}$$

associato alla Lagrangiana (4) tali che, per un certo $R > 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ si abbia

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to-\infty} |x(t) - R_\varphi \cos t| = 0, \\ &\lim_{t\to+\infty} |x(t) - R_\varphi \cos(t+\varphi)| = 0, \\ &\lim_{t\to-\infty} q(t) = 0, \\ &\lim_{t\to+\infty} q(t) = 2\pi. \end{aligned} \tag{6}$$

Sotto opportune ipotesi su $V$ e $\delta$, soddisfatte nel caso modello in cui $\delta(x) = \delta_\infty \arctan x$, $|\delta_\infty| \leqslant 0.002$, e $V(q) = 1 - \cos q$ e supponendo inoltre che (5) non abbia soluzioni omocline a $q = 0$, $x = 0$, proviamo che, dato un qualunque intervallo $[\alpha, \beta] \subseteq (0, 2\pi)$, si può trovare una soluzione di (5) soddisfacente (6) per degli opportuni $\varphi_2 - \varphi_1 \in [\alpha, \beta]$ ed $R > 0$. Come immediata conseguenza si ha l'esistenza di infinite soluzioni di (5) soddisfacenti (6) che differiscono tra loro per il salto di fase $\varphi$.

Le soluzioni di questo problema sono trovate come limite per $T \to +\infty$ delle soluzioni del seguente problema a valori al bordo

$$\begin{cases} \ddot{q} = (1+\delta(x))V'(q) \\ \ddot{x} + x = \delta'(x)V(q) \\ q(0) = 0, \quad q(T) = 2\pi \\ x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases} \tag{7}$$

Il metodo usato è simile a quello usato da Bernard in [2] e usa essenzialmente il trucco di monotonicità di Struwe.

## BIBLIOGRAFIA

[1] AMBROSETTI, A., e BADIALE, M., *Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach.*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 15, 2 (1998), 233-252.

[2] P. BERNARD, *Homoclinic orbit to a center manifold*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **17**, **2** (2003), 121-157.
[3] BERTI, M., e BOLLE, P., *Homoclinics and chaotic behaviour for perturbed second order systems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **176** (1999), 323-378.
[4] BOLOTIN, S. V., *Existence of homoclinic motions*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., **6** (1983), 98-103.
[5] COTI ZELATI, V., EKELAND, I., e SÉRÉ, É., *A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Ann. 288, **1** (1990), 133-160.
[6] COTI ZELATI, V., e MACRÌ, M., *Existence of homoclinic solutions to periodic orbits in a center manifold*, Preprint (2002).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»; e-mail: macri@unina.it
Dottorato in Matematica Applicata ed Informatica
(sede amministrativa: Università di Napoli «Federico II») - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. V. Coti Zelati, Università degli Studi di Napoli «Federico II»