Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luigi D'Onofrio

Sulle equazioni ellittiche lineari e non-lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 499–502.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_499_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 499-502

Sulle equazioni ellittiche lineari e non-lineari.

LUIGI D'ONOFRIO

Questa tesi trae spunto da alcuni recenti sviluppi nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, di tipo ellittico. Precisamente, i risultati esposti riguardano le equazioni ellittiche lineari nonvariazionali ed equazioni non lineari tipo p-laplaciano. Nonostante l'evidente differenza, i due temi sono strettamente connessi; basti infatti considerare [1] in cui gli autori provano risultati di regolarità per funzioni p-armoniche nel gruppo di Heisenberg sfruttando alcune stime per equazioni non variazionali di tipo Cordes.

1. – Equazioni lineari ellittiche di tipo nonvariazionale.

Consideriamo il seguente problema di Dirichlet

$$
\begin{cases} Lu = \mathrm{Tr}(AD^2u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} = f & \text{q.o. in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}
$$

dove, per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $a_{ij} = a_{ji}$ ed f sono funzioni misurabili, definite in un insieme aperto $\Omega \subseteq R^n$, verificanti la seguente condizione di ellitticità uniforme ($K \geq 1$)

$$
K^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq K|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in R^n, \quad \text{q.o. in } \Omega.
$$

È noto che in dimensione $n > 2$ (cf. [6]) le ipotesi $f \in L^2(\Omega)$ e $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, per ogni $i, j = 1, \dots, n$, non garantiscono l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di (1), ma sono necessarie ipotesi ulteriori sui coefficienti a_{ij}. A questo proposito ricordiamo la ben nota condizione di Cordes (cf. [6]) e la condizione che i coefficienti a_{ij} abbiano derivate distribuzionali in L^n debole, studiata da Alvino-Trombetti. Per alcuni valori di K, la seguente matrice dei coefficienti non soddisfa tali condizioni:

$$
\mathcal{A}(x) = (a_{ij}(x)) = \frac{1}{K}I + \left(K - \frac{1}{K}\right)\frac{x \otimes x}{|x|^2} \tag{2}
$$

Per tale motivo è interessante studiare il problema di Dirichlet:

$$
\begin{cases} Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} = 0 & \text{in } B \\ u = \varphi & \text{su } \partial B \end{cases} \tag{3}
$$

dove i coefficienti a_{ij} sono dati da (2), B è la sfera unitaria e φ è una funzione definita su $\partial B = \{x : |x| = 1\}$. L'equazione in (3) è quella di Serrin. Abbiamo mostrato (cf. [2]) che per ogni $\varphi \in C^0(\partial B)$, il problema (3) ammette un'unica soluzione in $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(B) \cap C^0(\overline{B})$. L'unicità è conseguenza del teorema di Aleksandrov-Bakelman-Pucci. Per l'esistenza, abbiamo utilizzato il metodo di sovrapposizione che permette di ottenere una rappresentazione esplicita delle soluzioni, utile per studiarne la regolarità. Infatti, il dato al bordo si può scrivere: $\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} H_l$ dove H_l è un polinomio armonico omogeneo di grado $l = 0, 1, \ldots$. Per ogni l il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} Lv_l = 0 & \text{in } B \\ v_l = H_l & \text{su } \partial B \end{cases} \tag{4}$$

ammette una soluzione v_l della forma

$$v_l(x) = |x|^{\lambda_l} H_l(x)$$

dove $\lambda_l \in R$ dipende solo da n, K ed l, ma non da H_l. Infine, la funzione

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} |x|^{\lambda_l} H_l \tag{5}$$

appartiene a $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(B) \cap C^0(\overline{B})$ e risolve (3).

Usando la rappresentazione (5), otteniamo per le equazioni nonvariazionali risultati analoghi a quelli di Greco-Sbordone relativi al caso di equazioni in forma di divergenza [5].

DEFINIZIONE 1. – *Definiamo momento di u la funzione*

$$w(r) = w_H(r) = \int_{\partial B_r} u \; H \; \mathrm{d}s \;, \qquad 0 < r \leqslant 1 \,,$$

dove H è un arbitrario polinomio armonico omogeneo di grado $l \in N$.

TEOREMA 1. – *Se $w(1) \neq 0$, allora la soluzione u di*

$$Lu = \mathrm{Tr}(\mathcal{A} D^2 u) = 0$$

ha nell'origine al più la stessa regolarità della funzione $v = |x|^{\lambda_l} H$.

Notiamo che $w(1)$ dipende dal dato al bordo φ, infatti $w(1) = \int_{\partial B} \varphi H \, \mathrm{d}s$.

La situazione è completamente differente nel caso bidimensionale. In ogni dimensione se i coefficienti a_{ij} soddisfano la condizione di Cordes, essi verificano anche la condizione di uniforme ellitticità; il viceversa è vero solo in dimensione $n = 2$, cioè le due condizioni sono equivalenti. Ciò permette di ottenere, in questo caso, teoremi di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet sotto ipotesi minime sui coefficienti in R^2. Ciò nonostante, i legami che intercorrono tra la teoria dei campi quasiarmonici, le mappe K-quasiconformi e le soluzioni di equazioni ellittiche nonvariazionali nel piano rendono lo studio di tali equazioni interessante.

TEOREMA 2. – *Sia $\Omega \subseteq R^2$ un aperto, una funzione $w \in W^{2,2}(\Omega)$ è soluzione di un'equazione*

$$a\, w_{xx} + 2b\, w_{xy} + c\, w_{yy} = 0 \tag{6}$$

ellittica con costante $\sqrt{\alpha}$ $(\alpha \geq 1)$, *se e solo se essa verifica la condizione*

$$(w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy})(\alpha + 1/\alpha) \geq w_{xx}^2 + 2 w_{xy}^2 + w_{yy}^2. \tag{7}$$

Il precedente teorema, dovuto a Pucci, motiva la seguente definizione:

DEFINIZIONE 2. – *Data* $w \in W^{2,2}(\Omega)$ *verificante* (7) *e tale che* $\det D^2 w \neq 0$, *q.o. in* Ω, *denotiamo con* $\mathbf{A} = \mathbf{A}[w]$ *l'unica matrice* 2×2 *reale simmetrica, definita positiva, verificante*

$$\begin{cases} \det \mathbf{A} = 1 \\ \mathrm{Tr}(\mathbf{A} D^2 w) = 0 \\ \mathbf{A} D^2 w = D^2 w \,\mathbf{A} \end{cases} \tag{8}$$

Notiamo che $\mathbf{A}$ è uniformemente ellittica con costante $\sqrt{\alpha}$. L'operatore differenziale definito da $\mathbf{L}u = a\, u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = \mathrm{Tr}(\mathbf{A} D^2 u)$, $u \in W^{2,2}(\Omega)$, rappresenta l'analogo nonvariazionale dell'operatore di Beltrami-Laplace. Data una successione di mappe quasiregolari $\{f_j\} \to f$, Spagnolo ha provato che gli operatori di Beltrami-Laplace costruiti a partire dalle f_j G-convergono all'operatore di Beltrami-Laplace costruito a partire da f (per la definizione di G-convergenza di operatori differenziali si veda ad esempio [3]). Era lecito aspettarsi che lo stesso risultato valesse per gli operatori $\mathbf{L}_j$, invece, considerata la successione:

$$w_k = w_k(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{k^2}\ (\cos kx - \cos ky) \rightharpoonup w = x^2 - y^2$$

abbiamo:

$$\mathbf{L}_j w_k = \sqrt{\frac{2 - \cos ky}{2 - \cos kx}}\, \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{2 - \cos kx}{2 - \cos ky}}\, \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2}$$

ed il G-limite delle $\mathbf{L}_j$ è diverso da $\Delta w = \mathbf{L} w$ (cf. [3]).

2. – Equazioni di tipo A-armonico.

Consideriamo l'equazione di tipo $\mathbf{A}$-armonico:

$$\Delta_{\mathbf{A}} u = \mathrm{div}\, \mathbf{A}(x, \nabla u) = \mathrm{div}\, f \tag{9}$$

dove Ω è un aperto di R^n, $\mathbf{A} : \Omega \times R^n \to R^n$ soddisfa le classiche condizioni di Carathédory ed inoltre, rispetto alla seconda variabile, è omogenea di grado $p-1$ (p numero reale > 1), lipschtiziana ed uniformemente monotona; in tal caso diremo che $\mathbf{A}$ ha una struttura $\mathbf{A}$-*armonica.* Sotto tali ipotesi la teoria di Browder e Minty assicura l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di (9) nello spazio di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ se $f \in L^q(\Omega, R^n)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. È quindi ben definito l'operatore:

$$H_{\mathbf{A}}\colon L^q(\Omega, R^n) \to L^p(\Omega, R^n), \qquad H_{\mathbf{A}} f = \nabla u \tag{10}$$

che ad ogni campo vettoriale $f \in L^q(\Omega, R^n)$ associa il gradiente della soluzione

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. L'operatore $H_{\mathbf{A}}$ è limitato; infatti:

$$\int_\Omega |H_{\mathbf{A}} f|^p = \int_\Omega |\nabla u|^p \leq C \int_\Omega |f|^q. \tag{11}$$

Un' approfondita analisi di (9) permette di estendere tale operatore, cioè definire

$$H_{\mathbf{A}}: L^{\lambda q}(\Omega, R^n) \to L^{\lambda p}(\Omega, R^n), \qquad H_{\mathbf{A}} f = \nabla u \tag{12}$$

dove λ è un parametro reale. Tale operatore risulta ben definito ogni volta che (9) ammette soluzione unica in $W_0^{1,\lambda p}(\Omega)$ $\forall f \in L^{\lambda q}(\Omega, R^n)$. I valori di λ per cui $H_{\mathbf{A}}$ risulta limitato sono determinati dal seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Sia $\Omega \subseteq R^n$ un dominio sufficientemente regolare. Ad ogni struttura* **A**-*armonica corrispondono due parametri*

$$\frac{1}{min\{p, q\}} \leq \lambda_{\mathbf{A}}^- < 1 < \lambda_{\mathbf{A}}^+ \leq \infty$$

tali che, se $u \in W_0^{1,\lambda p}(\Omega)$ e $f \in L^{\lambda q}(\Omega, R^n)$ verificano (9), *risulta*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{\lambda p} \leq C_{\mathbf{A}}(\lambda) \int_\Omega |f|^{\lambda q}, \qquad se\ \lambda_{\mathbf{A}}^- < \lambda < \lambda_{\mathbf{A}}^+.$$

Vale, inoltre, il seguente risultato dovuto a Iwaniec:

TEOREMA 4. – *Se* $\mathbf{A}(x, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, *allora* $\lambda_{\mathbf{A}}^+ = \infty$, *mentre* $\lambda_{\mathbf{A}}^-$ *non dipende dalla dimensione* n.

Per ulteriori sviluppi in questa direzione si veda [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] DOMOKOS A. e MANFREDI J., *$C^{1,\alpha}$-regularity for p-harmonic functions in the Heisenberg group for p near* 2, Preprint Pittsburgh University.

[2] D'ONOFRIO L. e GRECO L., *On the regularity of solutions to a nonvariational elliptic equation*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **11** (2002), 47-56.

[3] D'ONOFRIO L. e GRECO L., *A Counter example in G-convergence of Nondivergence Elliptic Operators*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, (in fase di stampa).

[4] D'ONOFRIO L. e IWANIEC T., *Interpolation theorem for the p-harmonic trasform*, Studia Mathematica, **159** (2003), 373-390.

[5] GRECO L. e SBORDONE C., *Sharp Upper Bounds for the Degree of Regularity of the Solutions to an Elliptic Equation*, Comm. Partial Differential Equations, **27** (2002), 945-952.

[6] TALENTI G., *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **69** (1965), 285-304.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»; e-mail: ldonofri@unina.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Napoli «Federico II») - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Carlo Sbordone, Università degli Studi di Napoli «Federico II»