Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Sabrina Diomede

Processi di approssimazione positivi su spazi di funzioni continue

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 495–498.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_495_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 495-498

Processi di approssimazione positivi su spazi di funzioni continue.

SABRINA DIOMEDE

1 – Introduzione.

Il problema principale attorno a cui ruota la presente tesi si può così sintetizzare: dato uno spazio E di funzioni reali definite su di uno spazio topologico separato X, e considerata una rete arbitraria $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$ di operatori lineari e positivi su E, si vogliono stabilire delle condizioni sotto cui sussiste la relazione limite

$$\lim_{i \in I}^{\leq} L_i(f) = f \qquad (f \in E) \tag{1}$$

rispetto ad un'opportuna topologia. In tal caso si dice anche che la rete $(L_i)_{i \in I}^{\leq}$ è un *processo di approssimazione* su E.

In mancanza di un'espressione esplicita degli operatori L_i, gli strumenti generali volti a studiare il problema (1) sono essenzialmente di due tipologie.

La prima è basata sulla teoria dell'approssimazione di tipo Korovkin, il cui principale obiettivo è la caratterizzazione e la determinazione di particolari sottoinsiemi di E che godono della proprietà che, se la relazione al limite (1) è soddisfatta su di essi, allora necessariamente è soddisfatta su tutto E. Tali sottoinsiemi prendono il nome di *insiemi di Korovkin* in E; ed a riguardo di questi ultimi, nella tesi è stato realizzato l'obiettivo di caratterizzare in termini di misure di Radon su X gli insiemi di Korovkin relativi a reti di contrazioni lineari positive nel caso in cui E è uno spazio di funzioni continue con peso semicontinuo superiormente. I contributi apportati in tale direzione sono raccolti nella Nota [2].

Il secondo metodo di analisi del problema (1) consiste nel supporre ogni operatore L_i quale operatore integrale associato ad un'opportuna famiglia $(\mu_{x,i})_{x \in X}$ di misure di Borel su X, ossia

$$L_i(f)(x) := \int_X f d\mu_{x,i}. \qquad (x \in X,\ f \in E) \tag{2}$$

In questo caso l'obiettivo è quello di determinare delle condizioni sulle misure $\mu_{x,i}$ che garantiscano la validità di (1); tale problema è stato affrontato nel caso in cui X è uno spazio uniforme ed E uno spazio di funzioni continue su X; i relativi risultati sono contenuti nella Nota [3]. Una tale generalità della struttura topologica di X ha consentito, fra l'altro, di analizzare in contesti più estesi rispetto a quelli precedentemente considerati in letteratura le proprietà di approssimazione di alcune note successioni di operatori lineari positivi, quali ad esempio quelli di Bernstein-Schnabl.

I due metodi sopra esposti, che appaiono molto diversi fra loro, sono in realtà strettamente correlati e, sotto certe condizioni, si rivelano essere equivalenti.

2. – Approssimazione di tipo Korovkin in spazi di funzioni continue con peso.

Per quanto riguarda la teoria dell'approssimazione di tipo Korovkin, vi è una vasta letteratura a riguardo che è documentata sulla monografia [1] di Altomare e Campiti. Nella prima parte della tesi, dopo aver presentato una panoramica dei principali risultati concernenti i sottoinsiemi di Korovkin nei due distinti contesti dello spazio $\mathcal{C}(X)$ delle funzioni reali continue definite su di uno spazio compatto e separato X, e dello spazio $\mathcal{C}_0(X)$ delle funzioni reali e continue che si annullano all'infinito definite su uno spazio localmente compatto (non compatto) e separato X, si sposta l'indagine nel contesto degli *spazi di funzioni continue con peso.*

Più precisamente, considerata una funzione $w: X \to \mathbf{R}$ positiva e continua, o più generalmente semicontinua superiormente, denominata «peso», si introducono gli spazi di Banach $\mathcal{C}_*^w(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) : \lim\limits_{x \to \infty} w(x)\, f(x) \in \mathbf{R}\}$, e $\mathcal{C}_0^w(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) : \lim\limits_{x \to \infty} w(x)\, f(x) = 0\}$, X essendo localmente compatto (non compatto) e separato. In prima istanza, si suppone il peso w continuo.

Questo permette di sfruttare le proprietà di invarianza degli spazi di Korovkin (i.e. spazi vettoriali generati da insiemi di Korovkin) rispetto ad isomorfismi tra reticoli, e quindi di trasferire, mediante opportuni isomorfismi isometrici, una serie di risultati ottenuti in $\mathcal{C}_0(X)$ ed in $\mathcal{C}(X_\infty)$ (ove con X_∞ si denota la compattificazione di Alexandrov di X) nell'ambito degli spazi $\mathcal{C}_*^w(X)$ e $\mathcal{C}_0^w(X)$.

Si presentano poi delle applicazioni per $X := [0, +\infty[$ e per particolari pesi, ossia quelli di tipo «polinomiale» $\left(w_m(x) := \dfrac{1}{1+x^m},\ m \geq 1\right)$ e di tipo «esponenziale» $(w_\alpha(x) := e^{-\alpha x},\ \alpha > 0))$.

Successivamente si assume che il peso w sia solo semicontinuo superiormente. Sotto questa condizione più debole, ampliando lo studio fatto da Roth (cfr. [5]) per spazi di Korovkin rispetto a reti di operatori lineari positivi in $\mathcal{C}_0^w(X)$, si caratterizzano gli insiemi di Korovkin di $\mathcal{C}_0^w(X)$ rispetto a reti di contrazioni lineari positive:

TEOREMA 2.1. – *Siano X uno spazio topologico localmente compatto (non compatto), $w: X \to \mathbf{R}$ positiva e semicontinua superiormente ed H un sottoinsieme di $\mathcal{C}_0^w(X)$; si denotino con $G(w) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbf{R} : w(x) = \lambda\}$ il grafico di w,* e con $\mathcal{M}_b^+(X)$ lo spazio delle misure positive e limitate di Radon. H è un insieme di Korovkin di $\mathcal{C}_0^w(X)$ se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

(*i*) *se $\mu \in \mathcal{M}_b^+(X)$ ed $(x, \lambda) \in \overline{G(w)}$, $\lambda > 0$, e se*

$$\|w\mu\| \leq 1, \quad e \quad \mu(wh) = \lambda h(x) \tag{2.1}$$

per ogni $h \in H$, allora $\mu(wf) = \lambda f(x)$ per ogni $f \in \mathcal{C}_0^w(X)$;

(*ii*) *se $\mu \in M_b^+(X)$ soddisfa la prima disuguaglianza della* (2.1), *e $\mu(wh) = 0$ per ogni $h \in H$, allora $\mu(wf) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{C}_0^w(X)$.*

3. – Operatori positivi e problemi di approssimazione in spazi di funzioni continue su spazi uniformi.

Nella seconda parte della tesi si prendono in esame una rete $(L_i)_{i\in I}^{\leq}$ di operatori lineari e positivi della forma (2), una famiglia $(\mu_{x,i})_{i\in I}$ di misure di Borel su di uno spazio topologico separato X ed uno spazio funzionale E tale che l'integrale a secondo membro abbia significato. Molti processi di approssimazione noti nella letteratura si possono porre nella forma (2), e dunque questa prospettiva permette di abbracciare, di fatto, un'ampia classe di operatori di rilievo.

Le proprietà di approssimazione degli operatori (2) sono già state studiate in modo dettagliato nel caso in cui X è un intervallo di $\mathbf{R}$. In [4] de la Cal e Luquin hanno affrontato lo stesso problema nel più ampio contesto degli spazi metrici.

Più in generale, invece, in questa tesi si suppone che lo spazio X sia completamente regolare (dunque uno spazio uniforme), e che quindi esista una famiglia $\mathcal{D}$ di pseudometriche su X che ne generi la topologia.

I contesti funzionali presi in considerazione sono lo spazio $\mathcal{C}_b(X)$ delle funzioni continue e limitate su X e lo spazio $UC_b(X)$ delle funzioni uniformemente continue e limitate su X. Il principale risultato concernente le proprietà di approssimazione degli operatori $(L_i)_{i\in I}$ dà una condizione sufficiente a garantire la convergenza uniforme nella relazione limite (1):

TEOREMA 3.1. – *Si supponga che*

$$\lim_{i\in I}^{\leq}\mu_{x,i}(X)=1 \qquad e \qquad \lim_{i\in I}^{\leq}\mu_{x,i}(X\backslash B_d(x,\delta))=0$$

uniformemente rispetto ad $x\in X$ *e per ogni* $d\in\mathcal{D}$ *e* $\delta>0$. *Allora*

(1) *per ogni* $f\in E\cap UC_b(X)$ $\lim\limits_{i\in I}^{\leq}L_i(f)=f$ *uniformemente su* X;

(2) *se* H *è un sottoinsieme equilimitato ed uniformemente equicontinuo di* $E\cap C_b(X)$, *allora* $\lim\limits_{i\in I}^{\leq}L_i(f)=f$ *uniformemente su* X *ed uniformemente rispetto ad* $f\in H$.

Oltre a questo risultato, altri teoremi stabiliscono la convergenza puntuale della rete $(L_i)_{i\in I}^{\leq}$, o quella uniforme sui sottoinsiemi compatti dello spazio X. Inoltre, ciascun risultato di convergenza è corredato da una stima dell'ordine della convergenza stessa. Successivamente, considerato un arbitrario insieme X ed una famiglia S di funzioni di X in $\mathbf{R}$ che ne separa i punti, e denotata con $\mathcal{T}_S$ la topologia generata da S, si costruisce un'opportuna famiglia $\mathcal{D}$ di pseudometriche su X; per questa via, utilizzando i risultati precedenti, si stabilisce il seguente teorema di tipo Korovkin il quale estende, fra l'altro, risultati analoghi ricavati nel caso particolare in cui X è uno spazio topologico compatto:

TEOREMA 3.2. – *Sia* E *un sottospazio di* $\mathbf{R}^X$ *tale che* $\{\mathbf{1}\}\cup S\cup S^2\subseteq E$, *ove* $S^2:=\{\varphi^2\,|\,\varphi\in S\}$. *Sia* $(L_i)_{i\in I}$ *una rete di operatori lineari e positivi di* E *in* $\mathbf{R}^X$ *tale che* $\lim\limits_{i\in I}^{\leq}L_i(\varphi)=\varphi$ *puntualmente in X (risp. uniformemente su X) per ogni*

$\varphi \in \{\mathbf{1}\} \cup S \cup S^2$. Allora per ogni $f \in E$, f continua rispetto $\mathcal{T}_S$ (risp. uniformemente continua) e limitata risulta

$$\lim_{i \in I}^{\leqslant} L_i(f) = f \quad \textit{puntualmente (risp. uniformemente) in } X.$$

Quale applicazione dei risultati precedentemente esposti, si è studiato il caso concreto di alcune successioni di operatori posti nella forma (2), definiti dall'espressione generale:

$$A_n(f)(x) = \int_X \cdots \int_X f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) d\mu_{\sigma_1(x)}(x_1) \cdots d\mu_{\sigma_n(x)}(x_n),$$

ove $\sigma_n : X \to X$, $n \geqslant 1$, $x \in X$, ed f appartiene ad un opportuno spazio funzionale. In questo caso X è un sottoinsieme convesso di uno spazio localmente convesso e $(\mu_x)_{x \in X}$ è una famiglia di misure di Borel su X soddisfacente alcune ipotesi.

L'interesse nello studio delle proprietà di approssimazione della successione $(A_n)_{n \geqslant 1}$ risiede, fra l'altro, nel fatto che essa, a seconda della particolare espressione delle misure μ_x, generalizza alcune successioni di operatori lineari positivi (operatori di Szász-Mirakjan, Bernstein- King, Gauss-Weierstrass) ben note in letteratura (cfr. [1], Ch. 5); in particolare, per $\sigma_n(x) = x$ si ottengono gli operatori di Bernstein-Schnabl, le cui proprietà erano già note (cfr. [1], Ch. 6) nell'ipotesi di convessità e compattezza di X.

Mediante gli strumenti di carattere generale approntati nella seconda parte della tesi è stato possibile rinunciare alla compattezza di X, ed inviduare delle condizioni sufficienti affinché risulti $A_n(f) \to f$ debolmente, o puntualmente, o ancora uniformemente sull'insieme X.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALTOMARE F., CAMPITI M., *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter and Co., Berlin, New York (1994).

[2] ALTOMARE F., DIOMEDE S., *Contractive Korovkin subsets in weighted spaces of continuous functions*, Rend. Circ. Mat. Pal., Serie II, **50** (2001), 547-568.

[3] ALTOMARE F., DIOMEDE S., *Positive operators and approximation in function spaces on completely regular spaces*, in corso di stampa su Int. J. of Math. and Math Sc. (2004).

[4] DE LA CAL, J., LUQUIN, F., *Probabilistic methods in approximation theory: a general setting*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **39** (1991), 211-221.

[5] ROTH, W., *A Korovkin type theorem for weighted spaces of continuous functions*, Bull. Austral. Math. Soc., **55** (1997), 239-248.

Dipartimento di Scienze economiche, Università di Bari
e-mail: s.diomede@dse.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Napoli) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. F. Altomare, Università di Bari