Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giulia Di Nunno

Differenziazione stocastica non-anticipativa e applicazioni alle coperture a varianza minima.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 491–494.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_491_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 491-494

Differenziazione stocastica non-anticipativa e applicazioni alle coperture a varianza minima.

GIULIA DI NUNNO

Argomenti centrali di questo lavoro sono la differenziazione stocastica e le corrispondenti rappresentazioni integrali. La problematica relativa alle coperture a varianza minima deve essere considerata al tempo stesso motivazione della ricerca e obiettivo applicativo della stessa nell'ambito della matematica finanziaria.

1. – Differenziazione stocastica non-anticipativa.

Consideriamo lo schema di *integrazione stocastica non-anticipativa* di Itô in cui l'integrale è l'operatore isometrico

$$L_2(\Omega \times [0, T]) \ni \varphi \;\Rightarrow\; \xi = \int_0^T \varphi(t)\, \eta(dt) \in L_2(\Omega). \tag{1}$$

L'integrazione è intesa rispetto alle misure aleatorie $\eta(dt) = d\eta_t$, $0 \leq t \leq T$, associate alle martingale η_t, $0 \leq t \leq T$ $(\eta_0 = 0)$ *continue a destra in* $L_2(\Omega)$. Ricordiamo che misure di questo tipo sono le misure stocastiche ad incrementi indipendenti associate ai processi di Lévy caratterizzati dalla legge

$$\log E e^{iu\eta_t} = t\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_R (e^{iur} - 1 - iur)\, J(dr) \right), \qquad u \in R,$$

dove $\sigma^2 > 0$ è una costante e $J(dr)$, $r \in R$, è una misura di Borel σ-finita tale che $\int_R r^2 J(dr) < \infty$. Il moto browniano e il processo centrato di Poisson ne sono i rappresentanti più noti. Le integrande $\varphi := \varphi(t)$, $0 \leq t \leq T$, sono elementi dello spazio funzionale $L_2(\Omega \times [0, T])$ che ammettono rappresentante *non-anticipativo* (*adattato*) rispetto ad una filtrazione $\mathcal{A}_t$, $0 \leq t \leq T$, fissata, i.e. per ogni t, $\varphi(t)$ è $\mathcal{A}_t$-misurabile. Più precisamente esse ammettono versione *predicibile*, cioè adattato e con traiettorie continue a sinistra.

Sulla differenziazione stocastica. Mentre la teoria dell'integrazione stocastica è ampiamente sviluppata, non si può dire lo stesso per la differenziazione stocastica, specialmente nel contesto dell' integrazione non-anticipativa.

- Il risultato più importante in questo contesto è la ben nota *formula di Itô* per funzioni stocastiche $\xi(t) := F(t, \eta_t)$, $0 \leq t \leq T$, lisce $(C^{1,2})$. Questa formula è valida per semi-martingale quali integratori.

- Altro ben noto risultato è la *formula di Clark-Haussmann-Ocone* sulla rappresentazione integrale

$$\xi = E\xi + \int_0^T E(D_t \xi \,|\, \mathcal{A}_t)\, \eta(dt). \tag{2}$$

dei funzionali $\xi = F(\eta)$ del moto browniano $\eta := \eta_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, che appartengono al dominio della *derivata di Malliavin* $D\xi := D_t\xi$, $0 \leqslant t \leqslant T$. La filtrazione è generata dal moto browniano. Molteplici generalizzazioni sono state recentemente proposte - cfr. [1], [4], [8], ad esempio e i riferimenti in essi contenuti.

- Ricordiamo, infine, la *rappresentazione integrale di Kunita-Watanabe*

$$\xi_t = \xi_t^0 + \int_0^t \varphi(s)\, \eta(ds), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

per martingale ξ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, in $L_2(\Omega)$, rispetto alla misura associata alla martingala η_t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Riguardo questa rappresentazione facciamo notare che il problema di differenziazione di nostro interesse è proprio determinare l'integranda. A questo proposito in letteratura si trovano riferimenti alla *covariazione quadratica* (*predicibile*) - cfr. [7], ad esempio. Essa può essere individuata come limite

$$\langle \xi, \eta \rangle_t = \lim_{h \to 0} \sum_{\Delta \subseteq [0,\, t]} E(\Delta\xi \cdot \Delta\eta \mid \mathcal{A}_s), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

in $L_1(\Omega)$ nel caso di martingale η_t a traiettorie continue. Qui la somma è presa sugli intervalli $\Delta \subseteq [0, T]$ della partizione $\sum \Delta = (0, T]$ aventi forma $\Delta = (s, u]$: $u - s \leqslant h$ $(h \to 0)$. Corrispondentemente denotiamo $\Delta\xi := \xi_u - \xi_s$ e $\Delta\eta := \eta_u - \eta_s$. Si può individuare facilmente la relazione tra la covariazione quadratica e l'integranda in (3) nel caso in cui η_t sia il moto browniano, infatti vale

$$\langle \xi, \eta \rangle_t = \int_0^t \varphi(s)\, ds. \tag{5}$$

Si noti che la formula (3) dà un'approssimazione dell'integrale in (5), ma *non* dell'integranda che è invece il nostro obiettivo.

Obiettivo e risultato principale. Ci proponiamo, infatti, di individuare una formula di differenziazione valida per *tutte* le variabili aleatorie $\xi \in L_2(\Omega)$ e nell'ambito dello schema di integrazione non-anticipativa relativo a misure aleatorie $\eta(dt) = d\eta_t$ associate alle martingale η_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, quali integratori - cfr. (1).

DEFINIZIONE 1. – *Per ogni variabile aleatoria* $\xi \in L_2(\Omega)$ *la* derivata stocastica non-anticipativa $\mathcal{D}\xi := \mathcal{D}_t\xi$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *è definita come il limite*

$$\mathcal{D}\xi := \lim_{h \to 0} \sum_{\Delta} E\left(\xi \frac{\eta(\Delta)}{E(|\eta(\Delta)|^2 \mid \mathcal{A}_s)} \mid \mathcal{A}_s\right) \cdot 1_\Delta \tag{6}$$

nello spazio funzionale $L_2(\Omega \times [0, T])$. *La somma è riferita agli intervalli* $\Delta \subseteq [0, T]$ *della partizione* $\sum \Delta = (0, T]$, *di forma* $\Delta = (s, u]$: $u - s \leqslant h$. *Corrispondentemente* $\eta(\Delta) = \eta_u - \eta_s$.

TEOREMA 1. – *Ogni variabile aleatoria* $\xi \in L_2(\Omega)$ *ammette derivata stocastica non-anticipativa. Inoltre vale la seguente rappresentazione integrale*

$$\xi = \xi^0 + \int_0^T \mathcal{D}_t\xi\, \eta(dt) \tag{7}$$

ove l'integranda è determinata dalla formula (6) *e la variabile aleatoria* $\xi^0 \in L_2(\Omega)$ *è tale che* $\mathcal{D}\xi^0 = 0$. *Inoltre tutte le variabili di questo tipo costituiscono il complemento ortogonale in* $L_2(\Omega)$ *al sottospazio di tutti gli integrali stocastici rispetto a* $\eta(dt)$.

Gli argomenti di calcolo stocastico qui presentati sono stati sviluppati non solo per processi stocastici, ma anche per campi aleatori sullo spazio-tempo - cfr. [2], [3], [5].

2. – Coperture a varianza minima.

Per semplicità espositiva consideriamo un modello di mercato *equo* (la misura di probabilità sottostante il modello è *neutrale al rischio*), senza costi di transazione e ove sia ammesso lo *short selling*, cioè la possibilità di prendere in prestito in ogni istante una qualunque entità di denaro allo stesso tasso istantaneo di interesse $r(t)$, $0 \leq t \leq T$, associato al rendimento di un qualunque investimento «senza rischio». Cfr. modelli di mercato di tipo Black-Scholes. L'evoluzione degli eventi sul mercato è rappresentata dalla filtrazione $\mathcal{A}_t$, $0 \leq t \leq T$. I prezzi dei prodotti finanziari «con rischio»

$$S_t^k = E\big(e^{-\int_t^u r(s)ds} S_u^k \mid \mathcal{A}_t\big), \qquad 0 \leq t \leq u \leq T, \ (k = 1, \dots K; \ K \leq \infty)$$

sono martingale scontate in $L_2(\Omega)$ ortogonali, i.e. i processi

$$\eta_t^k := e^{-\int_t^u r(s)ds} S_t^k - S_0^k, \quad 0 \leq t \leq T, \ (k = 1, \dots, K)$$

sono martingale in $L_2(\Omega)$ tali che $E\big((\eta_u^k - \eta_s^k)\cdot(\eta_u^j - \eta_s^j) \mid \mathcal{A}_s\big) = 0$, $0 \leq s \leq u \leq T$, $(k \neq j)$.

Il *processo valore* $\xi(t)$, $0 \leq t \leq T$, di una *strategia di mercato autofinanziantesi* ammette rappresentazione integrale

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t r(s)\xi(s)ds + \sum_{k=1}^K \int_0^t \varphi_k(s)\, d\eta_s^k, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{8}$$

Una strategia è *autofinanziantesi* quando il guadagno infinitesimo $d\xi(t) = \xi(t + dt) - \xi(t)$ è

$$d\xi(t) = \left(\xi(t) - \sum_{k=1}^K \varphi_k(t)\, S_t^k\right) r(t)\, dt + \sum_{k=1}^K \varphi_k(t)\, dS_t^k.$$

Tale strategia è caratterizzata, conformemente a (8), dal *capitale iniziale* $\xi(0)$ e dalle integrande $\varphi_k := \varphi_k(t)$, $0 \leq t \leq T$ $(k = 1, \dots, K)$ che rappresentano la distribuzione degli investimenti sui prodotti finanziari «a rischio».

Il problema. Un investitore che desidera ottenere nel tempo entità di denaro $\xi := \xi(t)$, $0 \leq t \leq T$, fissate a priori si dovrà chiedere:

i) Tali quantità ξ sono *replicabili* sul mercato? Esiste, cioè, una strategia autofinanziantesi capace di procurare proprio ξ quale suo processo valore?

ii) In caso ξ non fosse replicabile, è possibile determinare il processo replicabile $\hat{\xi} := \hat{\xi}(t)$, $0 \leq t \leq T$, che *meglio* approssima le quantità desiderate ξ, i.e.

$$E\,|\,\xi(t) - \hat{\xi}(t)\,|^2 = \min E\,|\,\xi(t) - \zeta(t)\,|^2 \tag{9}$$

per ogni t? Qui il minimo è inteso rispetto a *tutti* i processi valore replicabili ζ.

iii) Come determinare la strategia che procuri $\widehat{\xi}$?

In virtù di (9) chiameremo $\widehat{\xi}$ *copertura a varianza minima* - cfr. [1] e [6] ad esempio.

TEOREMA 2. – *La copertura a varianza minima* $\widehat{\xi}$:

$$\widehat{\xi}(t) = \widehat{\xi}(0) + \int_0^t r(s)\,\widehat{\xi}(s)\,ds + \sum_{k=1}^{K} \int_0^t \widehat{\varphi}_k(s)\,\eta^k(ds), \qquad 0 \leq t \leq T$$

è ottenibile applicando la strategia autofinanziantesi caratterizzata dal capitale iniziale $\widehat{\xi}(0) = \xi(0)$ *e dalle integrande*

$$\widehat{\varphi}_k(t) := e^{-\int_0^t r(s)\,ds}\,\mathcal{D}_t^k\,\xi(T), \qquad 0 \leq t \leq T \;\; (k = 1, \dots, K). \tag{10}$$

Per ogni k, *indichiamo con* $\mathcal{D}^k\,\xi(T)$ *le derivate stocastiche non-anticipative della quantità desiderata al tempo finale* $\xi(T)$ *rispetto a* $\eta^k(dt)$, $0 \leq t \leq T$.

Analoghi risultati sono ottenuti nel caso in cui l'investitore abbia a disposizione solo una conoscenza parziale degli eventi, cioè conosce solo $\mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{A}_t$, $0 \leq t \leq T$. Nella nostra ricerca si sono, infine, studiati modelli di mercato più generali in cui si utilizza il calcolo stocastico sui campi aleatori.

BIBLIOGRAFIA

[1] BENTH F.E., DI NUNNO G., LØKKA A., ØKSENDAL B. e PROSKE F., *Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes,* Mathematical Finance, **13** (2003), 55-72.

[2] DI NUNNO G., *Stochastic integral representations, stochastic derivatives and minimal variance hedging,* Stochastics and Stochastics Reports, **73** (2002), 181-198.

[3] DI NUNNO G., *Random fields evolution: non-anticipating integration and differentiation,* Theory of Probability and Mathematical Statistics, **66** (2002), 82-94.

[4] DI NUNNO G., ØKSENDAL B. e PROSKE F., *White noise analysis for Lévy processes. To appear in* Journal of Functional Analysis, **206** (2004), 109-148.

[5] DI NUNNO G. e ROZANOV Y.A., *On stochastic integration and differentiation,* Acta Applicandae Mathematicae, **58** (1999), 231-235.

[6] FÖLLMER H. e SCHWEIZER M., *Hedging of contingent claims under incomplete information,* Applied Stochastic Analysis, **5**, Gordon and Breach, 1991.

[7] JACOD J. e SHIRYAEV A.N., *Limit Theorems for Stochastic Processes,* Springer-Verlag, 1987.

[8] LÉON J.A., SOLÉ J.L., UTZET F. e VIVES J., *On Lévy processes, Malliavin Calculus and market models with jumps,* Finance and Stochastics, **6** (2002), 197-225, 5538-5574.

Centre of Mathematics for Applications and Department of Mathematics, University of Oslo
e-mail: giulian@math.uio.no
Dottorato in Statistica Matematica (sede amministrativa:
Università degli Studi di Pavia) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Bernt Øksendal, Università di Oslo