Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Roberta Di Gennaro

Sulla coomologia di curve in P^N

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 487–490.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_487_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 487-490

Sulla coomologia di curve in P^N.

Roberta Di Gennaro

1. – Introduzione.

In Geometria Algebrica, il problema della classificazione delle curve proiettive, sebbene classico, apre interessanti sbocchi alla ricerca, in particolare in spazi proiettivi P^N di dimensione $N \geqslant 4$ su un campo algebricamente chiuso k.

Infatti, grandi sviluppi ha avuto la ricerca su curve dello spazio tridimensionale, ma solo da pochi anni l'interesse si è allargato agli spazi di dimensione maggiore, dove sono indispensabili nuove tecniche, non legate alla codimensione due.

Uno degli strumenti fondamentali è la coomologia, mediante la quale si possono ottenere importanti (e spesso decisive) informazioni sugli *schemi di Hilbert* (le famiglie costituite dalle curve di dato grado e genere assegnati), che sono gli oggetti centrali della classificazione.
L'oggetto coomologico più importante associato ad una curva $C \subset P^N$ è il cosiddetto *modulo di Hartshorne-Rao* M_C, che è stato ampiamente studiato ed utilizzato per $N = 3$ (cf. [4]). Si tratta di un modulo graduato sull'anello dei polinomi $k[X_0, \ldots, X_N]$ di lunghezza finita (nell'accezione di curva quale schema unidimensionale localmente Cohen-Macaulay ed equidimensionale) definito come

$$M_C := \bigoplus_{j \in Z} H^1(\mathfrak{I}_C(j)),$$

dove $\mathfrak{I}$ è il fascio di ideali di C. Il primo dato da studiare per la comprensione di M_C è la funzione numerica $\varrho_C(j) := \dim(H^1(\mathfrak{I}_C(j))$, detta *funzione di Rao*.

Per $N \geqslant 4$ vi sono in letteratura alcuni risultati generali sulla funzione di Rao (Chiarli, Greco, Nagel, Notari, Spreafico), ma poco è noto sulla struttura di modulo di M_C ([1], [5]).

Un altro necessario quanto utile strumento in codimensione maggiore di 2 è la *liaison Gorenstein* (cf. [3]), naturale generalizzazione della liaison intersezione completa, valida in codimensione 2. Per liaison il modulo di Rao è invariante per equivalenza lineare. Inoltre, M_C è invariante nelle classi di liaison a meno di *shift* nella graduazione e dualità rispetto al campo k, solo a meno di *shift* nelle classi di biliaison.

2. – Risultati principali.

La tesi in oggetto contiene alcuni passi verso la conoscenza del modulo di Rao per curve di P^N, $N \geqslant 3$. Il punto di vista è quello di considerare curve giacenti su particolari tipi di superfici, precisamente quelle di grado minimo non singolari (nel caso singolare il modulo M_C è sempre banale, come provato da R. Ferraro).

Le superfici in questione sono *scroll razionali normali*, ovvero superfici rigate $S_{e,n} \subset P^N$ $(N = e + 2n + 1)$ caratterizzate appunto dai due invarianti numerici interi $e \geqslant 0$ e $n \geqslant 1$, quest'ultimo interpretabile come grado della direttrice minima. Il primo esempio, per $e = 0$ ed $n = 1$, è la quadrica liscia Q di P^3 ed i risultati della tesi generalizzano quelli già noti su Q (cf. [2]). Lo studio di curve su $S_{e,n}$ è agevolato dal fatto che il gruppo di Picard della superficie è isomorfo a Z^2 e si può considerare generato dalla direttrice minima C_0 (curva razionale normale di grado n), e dalla generica fibra f. In tal modo ogni curva C è in un sistema lineare $aC_0 + bf$ con $a, b \geqslant 0$ non entrambi nulli; in particolare, la generica sezione iperpiana H è nel sistema lineare $C_0 + (e+n)f$, e da ciò scaturisce la presenza di divisioni per l'intero $e + n$ in molti dei risultati provati.

Con metodi classici, che esulano dalla teoria della liaison, si trovano svariate informazioni su ogni curva $C \subset S_{e,n}$, quali la funzione di Rao, l'indice di specialità, la funzione di Hilbert, la regolarità di Castelnuovo-Mumford. Alcuni risultati già presenti in lavori di altri autori (quali Nagel a Miyazaki) sono dimostrati con tecniche differenti. Sono caratterizzate le curve aritmeticamente Cohen-Macaulay (brevemente *aCM*) e quelle aritmeticamente Gorenstein (brevemente *aG*).

Per le curve *aCM* imponendo che la funzione di Rao sia identicamente nulla, si ottiene il seguente risultato

TEOREMA 1. – *Una curva* $C \sim aC_0 + bf$ *è aCM se e solo se* $(a-1)(e+n) - n + 1 \leqslant b \leqslant a(e+n) + 1$.

Per le curve *aG* si trova che esse sono solo quelle banali su ogni superficie liscia (cf. [3]), cioè le rette ed i divisori anticanonici twistati:

TEOREMA 2. – *Sia C una curva aCM e K divisore canonico su* $S_{e,n}$. *Allora C è aG se e solo se C è linearmente equivalente ad un divisore anticanonico twistato, cioè* $tH - K$ *per qualche* $t \in Z$, *oppure C è una retta.*

I due risultati enunciati inducono all'utilizzo di tecniche di liaison Gorenstein con la duplice finalità di studiare le classi di liaison su $S_{e,n}$ e di utilizzare tali informazioni per la conoscenza del modulo di Hartshorne-Rao delle curve giacenti su $S_{e,n}$.

Circa lo studio della liaison in sé, si sono studiate le classi di liaison e di biliaison, in accordo con risultati di Casanellas e Mirò-Roig:

- *due curve su* $S_{e,n}$ *sono G-legate in un numero dispari di passi se e solo se la loro unione è un divisore anticanonico twistato*
- *due curve su* $S_{e,n}$ *sono G-bilegate se e solo se differiscono per una sezione di* $S_{e,n}$ *con un'ipersuperfice di grado* t (tH), *per qualche* $t \in Z$.

Se ne deduce che lo studio del modulo di Rao è riconducibile (a meno di *shift* e k-duale) a quello di due sole famiglie di curve; inoltre ogni curva della prima famiglia è direttamente G-legata ad una curva della seconda famiglia:

TEOREMA 3. – *Sia C una curva non-aCM su* $S_{e,n}$. *Il modulo di Rao di C è lo stesso (a meno di shift) del modulo di Rao di un'unione di fibre distinte o del modulo di Rao di una curva con al più* $e + n - 1$ *fibre.*

Inoltre, il modulo di Rao di una qualsiasi curva non-aCM è lo stesso di quello di un'unione di fibre a meno di k-duale e shift.

I due tipi di curve trovate costituiscono due famiglie di curve minime, dove per C *curva minima* si intende che il sistema lineare $C-H$ non contiene divisori effettivi. Per risultati classici di liaison, «eliminare» sezioni iperpiane da una curva C, equivale a bilegare C e $C-H$, quindi si lascia inalterata la struttura di modulo di M_C, a meno dello *shift* di uno a sinistra della graduazione, cioè $M_C \cong M_{C-H}(-1)$. Ciò comporta che una curva minima realizza il *minimo shift* della propria funzione di Rao sulla superficie che le contiene, cioé non esistono curve su $S_{e,n}$ il cui modulo di Rao sia *shiftato* a sinistra rispetto a quello di una curva minima. La conoscenza delle curve che realizzano il minimo *shift* rientra nella problematica aperta della *Proprietà di Lazarsfeld-Rao*. Inoltre, in un lavoro successivo alla tesi si è provato con Greco che le curve minime su $S_{e,n}$ realizzano il minimo shift nello spazio proiettivo P^N.

Sulla quadrica liscia $Q \subseteq P^3$ le due famiglie di curve minime si riducono alle sole unioni di fibre ed il modulo di Rao è autoduale. Per $N \geqslant 4$, le due famiglie di curve sono distinte ed il modulo di Rao non è riconducibile al solo modulo di unioni di fibre senza dualizzarlo.

Riducendo lo studio di M_C a due soli tipi di curve, si ottiene il risultato più innovativo, riguardante la struttura di modulo. Infatti, si sono trovati i generatori minimali del modulo di Rao di una curva minima ed ovviamente, per liaison, quelli di ogni curva su $S_{e,n}$.

TEOREMA 4. – *Sia $C \sim aC_0 + bf$ una curva non-aCM su $S_{e,n}$, allora*

1. *se $b > a(e+n)+1$, allora M_C ha un insieme di generatori minimali costituito da $b - a(e+n) - 1$ elementi di grado a;*

2. *se $b < a(e+n) - e - 2n + 1$, detti q_j ed r_j rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione tra $|r - je|$ e n, per ogni $j = 1, \dots, a - \left\lfloor \frac{b}{e+n} \right\rfloor - 1$, ed r il resto della divisione tra b ed $e+n$, allora M_C ha un insieme di generatori minimali costituito da N_j elementi di grado d_j per ogni j tale che*

$$1 \leqslant j \leqslant a - \left\lfloor \frac{b}{e+n} \right\rfloor - 1 \quad se\ \ 0 \leqslant r \leqslant e$$

$$2 \leqslant j \leqslant a - \left\lfloor \frac{b}{e+n} \right\rfloor - 1 \quad se\ \ e+1 \leqslant r \leqslant e+n-1,$$

dove

$$N_j := \begin{cases} r_j + 1 \\ n - r_j + 1 \\ 1 \end{cases} \quad d_j := \begin{cases} -q_j & se\ \ r < je \\ q_j + 1 & se\ \ r \geqslant je\ \ e\ \ r_j \neq 0 \\ q_j & se\ \ r \geqslant je\ \ e\ \ r_j = 0. \end{cases}$$

La prima parte del teorema, di rapida dimostrazione, si applica alle curve giacenti sulla quadrica liscia di P^3 e quindi tutte riconducibili ad unioni di fibre. In generale, essa generalizza il risultato valido in P^3 per le sole curve bilegate ad unioni di fibre.

Alle curve bilegate a curve minime del tipo $aC_0 + rf$ con $0 \leq r \leq e + n - 1$ si applica la seconda parte del teorema. Nonostante tale enunciato appaia numericamente complesso, la tecnica dimostrativa merita un cenno, in quanto da essa si comprende la natura dei generatori minimali.

Dopo aver ricondotto la curva data alla curva minima $C \sim aC_0 + rf$ con $0 \leq r \leq e + n - 1$, con l'uso di sequenze di coomologia, si perviene alla sequenza

$$\cdots \to \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} H^0(\mathcal{O}_{C_0}(D_{(a-1)e-r})(j)) \xrightarrow{\varphi} M_C \xrightarrow{\psi} M_{C-C_0} \to 0\,,$$

dove $D_{(a-1)e-r}$ è un divisore di grado d_{a-1} su C_0. Ciò induce a ragionare per induzione su a, rimontando i generatori di M_{C-C_0} supposti noti per induzione e considerando le immagini dei generatori minimali di $\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} H^0(\mathcal{O}_{C_0}(D_{(a-1)e-r})(j))$, che sono noti poiché C_0 è una curva razionale normale.
Durante la dimostrazione si deduce quindi che i generatori di grado minimo provengono dal modulo costruito su C_0. Inoltre, sapendo che M_{C-C_0} si annulla in un grado di uno inferiore rispetto a M_C, almeno uno dei generatori di grado minimo genera gli elementi dell'ultimo $H^1(\mathcal{I}(j))$ non nullo. Questa inusuale proprietà, comune anche alle curve sulla cubica liscia di P^3 (cf. [2]), comporta che l'indice di Buchsbaum delle curve su $S_{e,n}$ è il massimo possibile, ovvero è il diametro del modulo di Rao.

BIBLIOGRAFIA

[1] DI GENNARO ROBERTA, *On the Hartshorne - Rao module of curves on rational normal scrolls,* Le Matematiche (2000), **LV** (2002), 415-432.

[2] GIUFFRIDA SALVATORE e MAGGIONI RENATO, *On the Rao module of a curve lying on a smooth cubic surface in* $\mathbf{P}^3$, Communication in Algebra, **18** (7) (1990), 2039-2061.

[3] KLEPPE JAN O., MIGLIORE JUAN C., MIRÓ-ROIG ROSA, NAGEL UWE e PETERSON CHRIS, *Gorenstein liaison, complete intersection liaison invariants and unobstructedness,* Mem. Amer. Math. Soc., **154** (732), (2001), viii+116.

[4] MARTIN-DESCHAMPS M. e PERRIN D., *Sur la classification des courbes gauches,* Astérisque, Société Mathématique de France (1990), 184-185.

[5] NAGEL UWE, *Non-degenerate curves with maximal Hartshorne-Rao module*, Preprint.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»; e-mail: digennar@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa:
Università di Napoli «Federico II») - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. F. Orecchia, Università degli Studi di Napoli «Federico II»