BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIUSEPPE MARIA COCLITE

Problemi di controllo per sistemi di leggi di conservazione

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2004), n.3, p. 471–474.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_471_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Problemi di controllo per sistemi di leggi di conservazione.

GIUSEPPE MARIA COCLITE

1. - Introduzione.

Consideriamo un sistema di leggi di conservazione $n \times n$ in un intervallo limitato:

$$(1) \quad u_t + f(u)_x = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in]a, b[.$$

Supponiamo che il sistema sia *strettamente iperbolico* e che ogni campo caratteristico sia *linearmente degenere* o *genuinamente nonlineare* nel senso di Lax. Supponiamo inoltre che tutte le velocità caratteristiche siano discoste da zero. Più precisamente, sia $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione regolare, definita su un insieme aperto $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Per ogni $u \in U$, diciamo $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ gli autovalori della matrice Jacobiana $Df(u)$. Supponiamo che esistano una velocità minima $c_0 > 0$ ed un intero $p \in \{1, \dots, n\}$ tali che

$$(2) \quad \lambda_1(u) < \dots < \lambda_p(u) \leq -c_0 < 0 < c_0 \leq \lambda_{p+1}(u) < \dots < \lambda_n(u), \quad u \in U.$$

Da (2), per ogni soluzione definita nella striscia $t \geq 0, x \in]a, b[$, vi sono $n - p$ caratteristiche entranti dalla frontiera $x = a$ (quelle a velocità positiva) e p caratteristiche entranti da $x = b$ (quelle a velocità negativa). Il problema di dati iniziali ed al contorno è dunque ben posto se si prescrivono $n - p$ condizioni scalari in $x = a$ e p in $x = b$. In forma molto generale, queste possono essere scritte al seguente modo

$$(3) \quad \varphi_a(u(t, a +)) = 0, \quad \varphi_b(u(t, b -)) = 0, \quad t > 0,$$

con opportune funzioni $\varphi_a: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$, $\varphi_b: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$.

Nella tesi abbiamo studiato gli effetti delle condizioni al contorno sulla soluzione di (1) dal punto di vista della teoria del controllo. In altri termini, assegnato un dato iniziale

$$(4) \quad u(0, x) = \phi(x), \quad x \in]a, b[,$$

supponiamo che l'evoluzione del sistema possa essere regolata da controlli esterni, agenti sulle condizioni al bordo. Invece di (3), consideriamo condizioni del tipo

$$(5) \quad \varphi_a(u(t, a +), \alpha(t)) = 0, \quad \varphi_b(u(t, b -), \beta(t)) = 0, \quad t > 0,$$

dove $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$ sono i *controlli*. Assegnato un dato iniziale come in (4), uno degli obiettivi principali è descrivere l'insieme delle configurazioni raggiungibili ad un

dato istante $T > 0$:

(6) $\mathcal{C}(T, \phi) \doteq \{u(T, \cdot) \text{ sol. di (1), (4), (5) per qualche } \alpha, \beta\} \subset L^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$.

DEFINIZIONE 1. — *Assegnata una famiglia di condizioni iniziali $\mathcal{F}$ ed un tempo $T > 0$, diciamo che il problema (1) è esattamente controllabile all'istante T allo stato $v \in L^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ se per ogni $\phi \in \mathcal{F}$ esistono delle funzioni di controllo α, β tali che la soluzione di (1), (4), (5) soddisfi la seguente*

$$u(T, \cdot) \equiv v, \quad \text{q. o. in } [a, b].$$

Diciamo che il problema (1) è asintoticamente stabilizzabile vicino lo stato $v \in L^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ se per ogni $\phi \in \mathcal{F}$ esistono delle funzioni di controllo α, β tali che la soluzione di (1), (4), (5) soddisfi la seguente

$$u(t, \cdot) \rightarrow v, \quad \text{in } L^1([a, b]; \mathbf{R}^n) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty.$$

Il caso più semplice è quello di un sistema strettamente iperbolico a coefficienti costanti:

$$(7) \quad u_t + Au_x = 0,$$

dove A è una matrice costante $n \times n$ con autovalori reali e distinti

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_p < 0 < \lambda_{p+1} < \dots < \lambda_n.$$

Supponiamo che tutte le componenti entranti dai punti della frontiera possano essere controllate, ossia consideriamo le condizioni al bordo (5) con

$$(8) \quad \varphi_a(u, \alpha) = \pi_a(u) - \alpha, \quad \varphi_b(u, \beta) = \pi_b(u) - \beta,$$

dove π_a, π_b sono opportune proiezioni su $\mathbf{R}^n$. Diciamo inoltre

$$\tau \doteq \max_i \frac{b-a}{|\lambda_i|}$$

il tempo massimo impiegato dalle onde per attraversare l'intervallo $[a, b]$. In questo caso è facile vedere che l'insieme raggiungibile (6) è l'intero spazio: $\mathcal{C}(T) = L^1$, qualche sia $T \geq \tau$. In altre parole, il sistema è completamente controllabile dopo l'istante τ . Questo risultato di controllabilità esatta è stato esteso in [5] a sistemi quasilineari generali della forma

$$u_t + A(u)u_x = 0.$$

In questo caso, viene provata l'esistenza di una soluzione che soddisfi le condizioni iniziali e finali assegnate per tutti i dati $\phi, \psi \in C^1$ sufficientemente piccoli.

Lo scopo della tesi è studiare proprietà analoghe di controllabilità nel contesto di soluzioni deboli entropiche $t \mapsto u(t, \cdot) \in BV$ o L^∞ . Per sistemi nonlineari generali è chiaro che non si possano ottenere risultati di controllabilità completa negli spazi BV o L^1 . Infatti, in [2] è provato che per una legge di conservazione scalare con le condizioni al contorno (5), (8) (cfr. [4] per i risultati sull'equazione di Burgers) i profili $\psi \in BV$ che possono essere raggiunti ad un istante $T > 0$ suffi-

cientemente grande sono esattamente quelli che soddisfano la seguente condizione tipo Oleinik

$$\psi'(x) \leq \frac{f'(\psi(x))}{(x-a)f''(\psi(x))}, \quad \text{per q. o. } x \in [a, b].$$

Inoltre, per sistemi generali $n \times n$, una caratterizzazione completa dell'insieme raggiungibile $\mathcal{C}(T)$ non sembra possibile a causa della complessità delle interazioni ripetute dei fronti d'onda.

2. - Risultati.

Il primo caso che consideriamo è quello dei sistemi di Temple genuinamente nonlineari con condizioni al bordo (5), (8) (cfr. [1]). Si riesce a dare una descrizione del corrispondente insieme raggiungibile (6) in termini di opportune stime tipo Oleinik, il che fornisce una naturale estensione dei risultati sulle leggi di conservazione scalari presenti in [2, 4].

Mostriamo poi che per sistemi nonlineari generali, non si possono ottenere risultati di controllabilità esatta (cfr. [3]). Proviamo che per una classe di sistemi 2×2 strettamente iperbolici e genuinamente nonlineari del tipo (1) gli stati costanti non sono raggiungibili in tempo finito, ma che possono essere raggiunti solo esponenzialmente velocemente quando $t \rightarrow +\infty$. Un particolare sistema appartenente a questa classe è quello studiato da DiPerna:

$$(9) \quad \varrho_t + (u\varrho)_x = 0, \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2} + \frac{K^2}{\gamma-1} \varrho^{\gamma-1} \right)_x = 0,$$

dove $1 < \gamma < 3$ mentre $\varrho > 0$ e u denotano rispettivamente la densità e la velocità di un gas.

Più in generale si prova che è possibile stabilizzare asintoticamente un (qualunque) sistema di leggi di conservazione (1) con condizioni al bordo (5), (8) e dato iniziale con variazione totale sufficientemente piccola vicino ogni stato costante u^* con velocità più che esponenziale, più precisamente

$$(10) \quad \|u(t, \cdot) - u^*\|_{L^\infty} \leq C_0 e^{-2\kappa t}, \quad t > 0,$$

dove C_0, κ sono costanti positive.

Come in [5], tutti i risultati precedenti si riferiscono al caso in cui i valori al bordo siano completamente controllabili. Per cui il problema consiste nel provare l'esistenza (o la non esistenza) di una soluzione debole entropica definita nella striscia $t > 0, x \in]a, b[$ soddisfacente le condizioni richieste. Questo è il primo passo nello studio di problemi di controllabilità più generali, dove i controlli agiscono solo su alcune delle condizioni al bordo. Concentriamo la nostra attenzione sulla stabilizzabilità asintotica vicino uno stato costante. A questo scopo, fissiamo

uno stato costante u^* tale che

$$\varphi_a(u^*, 0) = \varphi_b(u^*, 0) = 0,$$

e studiamo il corrispondente sistema linearizzato in u^* . Le seguenti *congetture* sembrano naturali:

i) la controllabilità esatta del sistema linearizzato implica la stabilizzabilità asintotica del sistema nonlineare vicino u^* con decadimento come in (10),

ii) la stabilizzabilità asintotica esponenziale del sistema linearizzato implica la stabilizzabilità asintotica del sistema lineare vicino u^* .

Quindi il punto di partenza dell'analisi di questi controlli al bordo più generali è il caso lineare a coefficienti costanti. Consideriamo il sistema

$$(11) \quad \begin{cases} u_i(t, a^+) = \sum_{j=1}^p C_{a, ij} \cdot u_j(t, a^+) + \sum_{l=1}^{\mu} \Gamma_{a, il} \cdot \alpha_l(t), & i = 1, \dots, p, \\ u_j(t, b^-) = \sum_{i=p+1}^n C_{b, ji} \cdot u_i(t, b^-) + \sum_{l=1}^{\nu} \Gamma_{b, jl} \cdot \beta_l(t), & j = p+1, \dots, n, \end{cases}$$

per $0 < t < T$. Le onde uscenti dalle frontiere $x = a$ e $x = b$ dipendono dalle caratteristiche entranti e dai controlli. Concludiamo osservando che

i) abbiamo solo $\mu \leq n - p$ e $\nu \leq p$ controlli scalari, ossia un numero di controlli minore o uguale delle onde uscenti da $x = a$ e $x = b$, rispettivamente;

ii) lavoriamo nell'ambiente funzionale L^1 , anziché in quello L^2 , solitamente usato per problemi lineari di controllo come (11).

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANCONA F. e COCLITE G. M., *On the Attainable set for Temple Class Systems with Boundary Controls*, to appear on SIAM J. on Control e Optimization.
- [2] ANCONA F. e MARSON A., *On the attainable set for scalar nonlinear conservation laws with boundary control*, SIAM J. on Control e Optimization, **36** (1998), 290-312.
- [3] BRESSAN A. e COCLITE G. M., *On the Boundary Control of Systems of Conservation Laws*, SIAM J. on Control e Optimization, **41** (2002), 607-622.
- [4] HORSIN T., *On the controllability of the Burgers equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **3** (1998), 83-95.
- [5] LI T. e RAO B., *Exact boundary controllability for quasilinear hyperbolic systems*, SIAM J. on Control e Optimization, **41** (2003), 1748-1755.

Centre of Mathematics for Applications, University of Oslo
e-mail: giusepe@math.uio.no

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: S.I.S.S.A. - Trieste)
Direttore di ricerca: Prof. Alberto Bressan, S.I.S.S.A. - Trieste