Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Gianni Ciolli

Sulla coomologia quantica di alcune 3-fold di Fano e una congettura di Dubrovin

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 467–469.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_467_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 467-469

Sulla coomologia quantica di alcune 3-fold di Fano e una congettura di Dubrovin.

GIANNI CIOLLI

1. – Coomologia quantica di varietà di Fano e congettura di Dubrovin.

Nell'ultimo decennio si è diffusa la teoria della Coomologia Quantica, ispirata da alcune idee provenienti dalla fisica teorica che più tardi sono state sviluppate e precisate in un contesto matematico rigoroso [4].
Sia X una varietà algebrica, complessa, liscia e proiettiva. È possibile definire una famiglia di numeri razionali, gli *invarianti di Gromov-Witten*, che descrivono alcune informazioni sulla geometria di X ricavate dalla teoria dell'intersezione su certi spazi di moduli di curve razionali stabili in X.

L'invariante di Gromov-Witten $I_\beta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *dovrebbe* contare il numero di curve razionali $\mathcal{C} \subseteq X$ appartenenti alla classe di omologia data β e che intersecano delle sottovarietà generiche $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$, aventi rispettivamente $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ come classi di coomologia; infatti esso è definito come l'integrale di una opportuna classe di coomologia ω su uno spazio di moduli $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ di applicazioni $\mathcal{C} \to X$. Tale interpretazione di tipo enumerativo è utile per evitare il calcolo esplicito dell'integrale, ma non sempre è possibile: alcuni degli $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ hanno dimensione troppo grande, ed occorre pertanto integrare ω lungo una appropriata sottovarietà. Gli invarianti corrispondenti sono detti «non enumerativi».

Su ciascuno spazio tangente allo spazio vettoriale $H^*(X, \mathbb{C})$ è possibile definire una struttura di algebra utilizzando gli invarianti di Gromov-Witten; la proprietà associativa di tale prodotto *quantico* fornisce una famiglia di relazioni non banali tra tutti gli $I_\beta(\dots)$, che è stata utilizzata sistematicamente nella tesi per determinare i valori degli invarianti a partire da pochi dati *iniziali*.

Il caso particolare in cui X sia di Fano è rilevante per la coomologia quantica. Infatti, da un lato tale condizione implica una certa proprietà di finitezza che semplifica la costruzione del prodotto quantico; inoltre, per le varietà di Fano si ha la polinomialità dell'anello di coomologia quantica *small*, che parametrizza simultaneamente il prodotto quantico in tutti gli spazi tangenti ai punti $m \in H^2(X, \mathbb{C})$.

Nella tesi si affronta la questione del calcolo esplicito dell'anello di coomologia quantica small per le threefold di Fano aventi coomologia classica solo in grado pari, i. e. tali che il numero di Betti $b_3(X)$ si annulli ($b_1(X) = 0$ per ogni varietà di Fano).

Il calcolo esplicito degli anelli di coomologia quantica ha una propria rilevanza, in quanto contiene la soluzione di un'ampia classe di problemi di geometria enumerativa delle curve razionali contenute in X. Storicamente, il punto di partenza per lo studio della coomologia quantica coincide con la scoperta che il numero N_d di curve razionali di grado d nel piano proiettivo che passino per $3d-1$ punti prescritti si ottiene tramite una formula ricorsiva a partire dal classico $N_1 = 2$.

Inoltre, l'importanza della coomologia quantica non è ristretta soltanto alla geometria algebrica complessa, ma si estende ad altre aree della matematica e della fisica, la cui discussione supera l'ambito della presente nota. Una proprietà rilevante per una varietà X è se l'anello generico di coomologia quantica sia o meno semisemplice come $\mathbb{C}$-algebra. Questo fatto ha varie conseguenze, ed ha condotto Dubrovin a formulare nel 1998 la seguente congettura, che è stata precisata nel 2001 da Bayer e Manin [1].

La congettura, studiata nella tesi, pone in relazione la semisemplicità della coomologia quantica e l'esistenza di un sistema eccezionale di generatori per la categoria derivata limitata dei fasci coerenti su $\mathcal{D}(X)$:

CONGETTURA 1 **(Dubrovin)**. – *L'anello di coomologia classica di tipo (p, p) dotato del prodotto quantico è genericamente semisemplice $\Leftrightarrow$ X è di Fano e la categoria derivata $\mathcal{D}(X)$ ammette un sistema completo di oggetti eccezionali di lunghezza $\sum h^{p,p}(X)$.*

2. – Risultati.

1. Nella tesi si effettua il calcolo esplicito di una presentazione per l'anello di coomologia quantica small di 15 threefold di Fano, eccetto una tutte ottenute da altre threefold tramite scoppiamento lungo una curva liscia.

Nello specifico, il calcolo è effettuato tramite un software prodotto *ad hoc* che impiega sistematicamente tutte le relazioni di associatività tra gli invarianti di Gromov-Witten ottenibili dal prodotto quantico di tre divisori. Tale software è liberamente disponibile e le istruzioni su come procurarselo sono contenute nella tesi.

Con l'aiuto di un diffuso software di algebra commutativa, e con tecniche di geometria algebrica affine, si individua un insieme minimale di dati iniziali necessari per la completa determinazione degli invarianti di Gromov-Witten coinvolti nella presentazione dell'anello small, e si calcola il valore di tali invarianti combinando i dati iniziali con i dati dell'associatività.

I dati iniziali sono ricavati analizzando la relazione che intercorre tra una varietà Z e la varietà $\widetilde{Z}$ ottenuta da Z scoppiando una curva liscia. In particolare, tale procedimento fornisce sempre il valore di un invariante di Gromov-Witten che risulta essere una informazione non contenuta nelle relazioni di associatività.

2. Utilizzando informazioni presenti in letteratura, si calcola esplicitamente

la presentazione di un anello di coomologia quantica per altre sette varietà ottenute come prodotto di una superficie di Del Pezzo per la retta proiettiva.

3. Si verifica la congettura di Dubrovin per la threefold V_5 in modo particolarmente elementare.

4. La congettura di Dubrovin, sinora verificata solo per le superficie di Del Pezzo e per lo spazio proiettivo tridimensionale, è risolta affermativamente sia per le 23 varietà sopra elencate che per le altre 12 di cui la cui coomologia quantica era nota in letteratura.

Più precisamente, la generica semisemplicità dell'anello di coomologia quantica è verificata in modo standard sulle presentazioni esplicite mediante un diffuso programma di algebra commutativa, e si dimostra la seguente

PROPOSIZIONE 1. – *Sia X una threefold di Fano liscia avente $b_3(X) = 0$. Allora la categoria derivata $\mathcal{D}(X)$ ammette un sistema completo di generatori di lunghezza $\sum h^{p,p}$.*

Ciò costituisce un totale di 36 delle 59 threefold di Fano aventi $b_3 = 0$; per le altre 47 threefold di Fano aventi $b_3 > 0$ occorre invece un approccio abbastanza diverso, dovendo eventualmente mostrare che la coomologia quantica non è genericamente semisemplice.

5. Nella tesi sono riportate le tabelle con la classificazione delle threefold di Fano [2, 3, 5], alle quali sono stati aggiunti tutti i risultati ricavati nella presente tesi, unitamente a quelli noti in letteratura, in modo da riepilogare in un quadro d'insieme lo stato dell'arte del calcolo della coomologia quantica e della verifica della congettura di Dubrovin relativamente alle threefold di Fano.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BAYER e YU. I. MANIN, *(Semi)simple exercises in Quantum Cohomology,* Preprint arXiv:math.AG/0103164 (2001).

[2] V. A. ISKOVSKIH, *Fano threefolds I,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **41** (1977), 516-562.

[3] V. A. ISKOVSKIH, *Fano threefolds II,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **42** (1978), 506-549.

[4] M. KONTSEVICH e YU. I. MANIN, *Gromov-Witten classes, Quantum Cohomology, e enumerative geometry,* Comm. Math. Phys., **164** (1994), 525-562.

[5] S. MORI e S. MUKAI, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geqslant 2$*, Manuscripta Math., **36** (1981/82), 147-162.

Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini», Università degli Studi di Firenze
e-mail: ciolli@math.unifi.it

Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università di Firenze) - XV ciclo
Direttore di Ricerca: Prof. Vincenzo Ancona, Università degli Studi di Firenze