Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Erasmo Caponio

Proprietà globali dell'equazione relativistica della forza di Lorentz

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 455–458.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_455_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 455-458

Proprietà globali dell'equazione relativistica della forza di Lorentz.

ERASMO CAPONIO

La ricerca presentata in questa nota ha come oggetto l'applicazione di metodi variazionali e di tecniche di causalità allo studio di alcune proprietà globali della equazione della forza di Lorentz nella teoria della Relatività Generale.

In Relatività Generale, lo spazio-tempo e il campo gravitazionale sono descritti da una varietà lorentziana (M, g), il campo elettromagnetico da una 2-forma chiusa F su M. Una particella, avente carica q e massa m e che si muove nei due campi esterni F e g, è rappresentata da una curva *di tipo tempo* $z : [a, b] \to M$ che soddisfa l'equazione della forza di Lorentz (cf. [8]):

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\,\dot z = q\widehat{F}(z)[\dot z]\,. \tag{1}$$

In (1) l'azione del campo gravitazionale sulla particella è inclusa nel termine $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\,\dot z$, dove $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}$ è la derivata covariante lungo la curva z associata alla connessione di Levi-Civita, mentre quella del campo elettromagnetico è racchiusa nel termine $q\widehat{F}(z)[\dot z]$, dove $\widehat{F}\colon TM \to TM$ è la mappa sul fibrato tangente alla varietà M definita da $g(p)[v, \widehat{F}(p)[w]] = F(p)[v, w]$, per ogni $(p, v), (p, w) \in TM$. Una soluzione si dice di tipo tempo se corrisponde ad una traiettoria di una particella che si muove ad una velocità inferiore a quella della luce. Pertanto le soluzioni di tipo tempo sono quelle fisicamente ammissibili. Da un punto di vista matematico una soluzione di tipo tempo è caratterizzata dal fatto che la funzione $s \mapsto g(\dot z(s), \dot z(s))$ è costante lungo z, con valore **negativo** della costante soddisfacente la relazione $g(\dot z, \dot z) = -m_z^2$, dove m_z indica la massa della particella che si muove seguendo la traiettoria $z = z(s)$ (si sono scelte unità di misura in cui la velocità della luce è uguale a 1).

In coordinate locali, Eq. (1) è un sistema di equazioni differenziali non lineari del second'ordine in forma normale. Dunque, sotto ipotesi di regolarità del campo elettromagnetico e di quello gravitazionale, la classica teoria locale delle equazioni differenziali ordinarie assicura l'esistenza e l'unicità di una soluzione di tipo tempo inestendibile, che soddisfa alle condizioni iniziali di Cauchy. La soluzione, inoltre, dipende in maniera regolare dai dati iniziali. Se la teoria locale non presenta particolare interesse, le proprietà globali di Eq. (1) sono, invece, quasi inesplorate. Ad esempio non è noto per (1) un risultato analogo al classico teorema di A. Avez e H. J. Seifert sull'esistenza di una geodetica di tipo tempo che connette due punti cronologicamente correlati su una varietà lorentziana globalmente iperbolica.

In questa nota presentiamo alcuni risultati, nella direzione del teorema di Avez e Seifert, per le soluzioni di tipo tempo di (1). Se supponiamo che la 2-forma

F sia esatta, le soluzioni di (1), che connettono due punti p_0 e p_1 fissati su M, sono tutti e soli i punti critici del funzionale $I(z) = \int_0^1 \frac{1}{2} g(\dot z, \dot z)\, \mathrm{d}s + \int_0^1 q\omega(\dot z)\, \mathrm{d}s$, definito sulla varietà Ω_{p_0, p_1} delle curve su M, parametrizzate in $[0, 1]$, di classe H^1 e che al bordo assumono i valori p_0 e p_1. La ricerca dei punti critici di I presenta alcune difficoltà legate al fatto che I è un funzionale fortemente indefinito. Tali difficoltà sono soprattutto associate al termine $E(z) = \int_0^1 \frac{1}{2} g(\dot z, \dot z)\, \mathrm{d}s$. Nella prima metà degli'anni "90 sono stati ottenuti svariati risultati di esistenza e molteplicità per i punti critici di E (cf. [6] e la bibliografia ivi contenuta). Tali risultati possono essere facilmente estesi al funzionale I. Il problema principale nello studio del funzionale I non è quindi stabilire genericamente l'esistenza di un punto critico, ma stabilire l'esistenza di un punto critico di tipo tempo. Infatti, se per i punti critici di E l'essere di tipo tempo equivale semplicemente all'avere valore critico negativo, la stessa proprietà non è vera, ovviamente, per i punti critici di I.

Un primo risultato di esistenza e molteplicità per i punti critici di tipo tempo di I riguarda il caso in cui i campi g e ω sono stazionari. Assumiamo cioè che lo spazio-tempo M sia munito di un campo di Killing Y di tipo tempo e che la 1-forma ω sia *Y-invariante*, nel senso che il prodotto di Lie di Y e del campo A, metricamente equivalente a ω, sia nullo: $[Y, A] = 0$. In questo caso la ricerca dei punti critici di I può essere ridotta allo studio del funzionale I ristretto alla sottovarietà, $\mathcal{N}_{p_0, p_1}$, di Ω_{p_0, p_1}, costituita dalle curve che soddisfano la legge di conservazione: $g(\dot z, Y) + \omega(Y) =$ costante. Sotto opportune ipotesi su (M, g) (es. (M, g) statica, (M, g) varietà stazionaria standard), se i campi Y e A hanno crescita sottoquadratica all'infinito è possibile provare che il funzionale $I_{|\mathcal{N}_{p_0, p_1}}$ è limitato dal basso e soddisfa la condizione di Palais-Smale. Così possiamo stabilire l'esistenza di punti critici di I e, se la topologia della varietà M è sufficientemente ricca, la molteplicità per mezzo della teoria di Lusternik-Schnirelmann o della teoria di Morse. Risultati di esistenza e molteplicità di punti critici di tipo tempo, in questo contesto, sono stati ottenuti nel caso in cui M è una varietà lorentziana stazionaria standard o in generale una sottovarietà aperta di una varietà lorentziana stazionaria standard. Più dettagliatamente, si supponga che $M = M_0 \times \mathbb{R} \subseteq \widetilde{M} = \widetilde{M}_0 \times \mathbb{R}$, con M_0 sottovarietà aperta di $\widetilde{M}_0$, che la metrica g su M sia indotta dalla metrica $\tilde g$ su $\widetilde{M}$ e sia definita da

$$g(z)[\zeta, \zeta'] = \langle \xi, \xi' \rangle_x + \langle \delta(x), \xi \rangle_x \tau' + \langle \delta(x), \xi' \rangle_x \tau - \beta(x)\, \tau\tau',$$

dove $z = (x, t) \in M = M_0 \times \mathbb{R}$, $\zeta = (\xi, \tau)$, $\zeta' = (\xi', \tau') \in T_z M = T_x M_0 \times \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è una metrica riemanniana su M_0, δ un campo vettoriale regolare su M_0 e β una funzione positiva regolare su M_0. Qui il ruolo del campo Y è giocato dal campo $\frac{\partial}{\partial t}$.

TEOREMA 1. – *Sia* $A = (\vartheta, \varphi)$, $\frac{\partial}{\partial t}$*-invariante e si supponga che esista una funzione* $\Phi : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ *tale che* $\Phi(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \partial M = \partial M_0 \times \mathbb{R}$, $\Phi(z) > 0 \Leftrightarrow z \in M$, $\nabla\Phi(z) \neq 0$ *per ogni* $z \in \partial M$. *Si supponga, inoltre, che esista* $\varrho > 0$ *tale che, per ogni* $p \in \partial M$ *e per ogni vettore* $v \in T_p \partial M$ *di tipo tempo con* $g(p)\left[v, \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p \right] < 0$, *se* $\frac{|q|}{\sqrt{-g(p)[v, v]}} < \varrho$ *si abbia* $H_\Phi(p)[v, v] + qF(p)[\nabla\Phi(p), v] < 0$, *dove* H_Φ *indica lo* *hessiano della funzione Φ. Allora, se $M_0 \cup \partial M_0$ è un sottospazio metrico completo di $\widetilde{M}_0$ e se* $\sup_{x \in M_0 \cup \partial M_0} |\vartheta(x) + \varphi(x)\delta(x)| < +\infty$, $\sup_{x \in M_0 \cup \partial M_0} |\delta(x)| < +\infty$, $\sup_{x \in M_0 \cup \partial M_0} |\langle \delta(x), \vartheta(x)\rangle - \beta(x)\varphi(x)| < +\infty$, *fissato* $p_0 = (x_0, t_0) \in M$ *esiste* $T_0 > 0$ *tale che per ogni* $T > T_0$ *esiste una soluzione di tipo tempo di* (1), *contenuta in* M, *con* $\frac{|q|}{m_z} < \varrho$ *e che connette* p_0 *e* $p_1 = (x_1, t_0 + T) \in M$. *Inoltre se* M *è non-contrattile in se stessa il numero di tali soluzioni, per ogni fissato* T, *tende ad infinito al tendere di* T *ad infinito.*

Questo risultato ha trovato applicazione (cf. [2]) alla regione esterna al secondo orizzonte degli eventi dello spazio-tempo di Reissner-Nordström, su cui si sono generalizzati precedenti risultati noti per le geodetiche (cf. [6]).

Nel caso non stazionario l'esistenza di soluzioni di tipo tempo è stata ottenuta ricorrendo alla teoria di Kaluza-Klein. Questa è una teoria sviluppata agli inizi degli anni «20 nel tentativo di unificare la gravità e la forza elettromagnetica in una teoria della Relatività Generale formulata in uno spazio-tempo a dimensione 5 invece che 4. In particolare, nella sua versione «non compatta», l'equazione del moto di una particella carica si ottiene proiettando sullo spazio-tempo (M, g), l'equazione delle geodetiche in $M \times \mathbb{R}$ munito della metrica di Kaluza-Klein $g_{KK} = g + \varrho^2(dy + \omega)^2$, dove y è la coordinata in $\mathbb{R}$ e ϱ è un parametro che nella teoria «compatta», in cui la fibra $\mathbb{R}$ è sostituita da S^1, rappresenta il raggio della circonferenza. Il campo $\frac{\partial}{\partial y}$ è un campo di Killing per g_{KK} e, come conseguenza il prodotto $g_{KK}\left(\dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ è costante lungo ogni geodetica γ di $(M \times \mathbb{R}, g_{KK})$. Si vede facilmente che tale quantità rappresenta la carica elettrica per la particella che si muove lungo la traiettoria $z(s) = \pi(\gamma(s))$, dove $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ denota la proiezione canonica su M. Direttamente dalla definizione di g_{KK} si deduce, inoltre, che se γ di tipo tempo rispetto a g_{KK} allora $\pi(\gamma)$ è di tipo tempo rispetto a g. Così l'esistenza di soluzioni di tipo tempo per (1) può essere ricondotta allo studio dell'esistenza di geodetiche di tipo tempo per la metrica di Kaluza-Klein. Il problema diviene allora provare l'esistenza di una soluzione per una carica, o in generale per un rapporto carica/massa, fissato a priori.

Nel caso di una varietà lorentziana (M, g) con $M = M_0 \times \mathbb{R}$, M_0 varietà compatta, e g definito da $g(x, t)[(\xi, \tau), (\xi, \tau)] = \langle \alpha(x, t)[\xi], \xi\rangle - \beta(x, t)\tau^2$, dove, per ogni $(x, t) \in M$, $\alpha(x, t)$ è un operatore simmetrico positivo su $T_x M_0$ tale che la mappa $(x, t) \mapsto \alpha(x, t)$ è regolare, mentre β è una funzione positiva regolare su M, si può dimostrare (cf. [1]), usando la metrica di Kaluza-Klein, il Teorema della Sella, per quanto riguarda l'esistenza e la Categoria Relativa Limite (cf. [5]), per quanto riguarda la moltelicità, il seguente:

TEOREMA 2. – *Si supponga che* α, β *e* ω *siano* T*-periodici rispetto alla variabile* T, *allora per ogni* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ *esiste una soluzione di tipo tempo* $z = (x, t)$ *di* (1) *tale che* x *è una curva chiusa e regolare in* M_0 *e* t *è una funzione reale che connette* t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$ *aventi differenza* $t_1 - t_0$ *uguale a* kT. *Inoltre se il gruppo fondamentale di* M_0 *è finito o ha un numero infinito di classi di coniugio, il numero di tali soluzioni, geometricamente distinte, per ogni fissato* k, *tende ad infinito al tendere di* k *ad infinito.*

La metrica di Kaluza-Klein è stata usata anche per ottenere una generalizzazione del Teorema di Avez e Seifert all'equazione (1) (cf. [4]):

TEOREMA 3. – *Sia* (M, g) *uno spazio-tempo orientato nel tempo (ovvero munito di un campo* W *di tipo tempo) globalmente iperbolico (cioè munito di una superficie di Cauchy ovvero un sottospazio topologico di* M *che viene intersecato una sola volta da ogni curva di tipo tempo in* M*) e siano* p_0 *e* p_1 *due punti cronologicamente correlati in* M *(ovvero due punti per cui esiste una curva* $\tau : [a, b] \to M$ *tale che* τ *è di tipo tempo,* $g(\dot{\tau}, W) < 0$ *e* $\tau(a) = p_0$, $\tau(b) = p_1$*). Allora esiste* $R > 0$, *dipendente da* g, F, p_0, p_1, *tale che, per ogni carica* q *con* $|q| < R$, *esiste una soluzione di tipo tempo di* (1), *parametrizzata in modo che* $g(\dot{z}, \dot{z}) = -1$ *e che collega* p_0 *e* p_1.

Si conclude questa nota accennando ad un risultato tipo indice di Morse, ottenuto per le soluzioni di (1) con punti iniziale e finale fissati (cf. [3]), in cui si adatta all'equazione dei campi di Jacobi di (1), nel caso stazionario, un risultato contenuto in [7] sulla uguaglianza tra l'indice di Maslov e l'indice di Morse. Infine, per una varietà statica (M, g), soddisfacente un'ipotesi di completezza e sotto ipotesi di crescita sottoquadratica all'infinito per i campi Y e A, sono state ottenute le relazioni globali di Morse per le soluzioni di (1) che collegano due punti non coniugati, generalizzando le relazioni di Morse per le geodetiche su varietà Lorentziana statiche standard (cf. [6]).

BIBLIOGRAFIA

[1] CAPONIO E., *Timelike solutions to the Lorentz force equation in time-dependent electromagnetic and gravitational fields*, J. Differential Equations (in corso di stampa).

[2] CAPONIO E. e MASIELLO A., *Trajectories of charged particles in a region of a stationary space-time*, Classical Quantum Gravity, **19** (2002), 2229-2256.

[3] CAPONIO E., MASIELLO A. e PICCIONE P., *Maslov index and Morse theory for the relativistic Lorentz force equation*, Manuscripta Math. (in corso di stampa).

[4] CAPONIO E. e MINGUZZI E., *Solutions to the Lorentz force equation with fixed charge-to-mass ratio in globally hyperbolic spacetimes*, J. Geom. Phys., **49** (2004), 176-186.

[5] FOURNIER G., LUPO D., RAMOS M. e WILLEM M., *Limit relative category and critical point theory*, Dynamics reported. Expositions in dynamical systems. New series. Vol. III, (1994), 1-24.

[6] MASIELLO A., *Variational Methods in Lorentzian Geometry*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **309**, Longman, London, 1994.

[7] PICCIONE P. e TAUSK D., *An index theorem for non periodic solutions of Hamiltonian systems*, Proc. London Math. Soc., **83** (2001), 351-389.

[8] SACHS R. K. e WU H., *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag New York, 1977.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Bari. E-mail: caponio@poliba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Firenze) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Antonio Masiello, Politecnico di Bari