Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giovanna Bonoli

Il punto di vista della geometria di incidenza in algebra lineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 435–438.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_435_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 435-438

Il punto di vista della geometria di incidenza in algebra lineare.

GIOVANNA BONOLI

1. – Introduzione.

La Geometria di Incidenza fornisce un linguaggio unitario delle geometrie classiche e, al tempo stesso, ideale per la loro assiomatizzazione. Essa trae origine dalle proprietà di incidenza di punti, rette e piani della Geometria Euclidea classica, cioé proprietà basate sulle operazioni di intersezione e congiunzione. La lunga analisi critica sulla geometria euclidea durante il diciannovesimo secolo trova la sua degna conclusione nel 1899 con Hilbert che nel suo trattato *Grundlagen der Geometrie* dà un'assiomatizzazione della Geometria euclidea in termini di proprietà di incidenza, di proprietà d'ordine e di proprietà metriche. L'importanza del lavoro di Hilbert consiste nell'aver sottolineato che le proprietà di incidenza sono indipendenti dal campo reale e che risulta irrilevante la natura di punti, rette e piani. Tali considerazioni hanno motivato uno studio più approfondito delle proprietà di incidenza della Geometria affine e proiettiva ed hanno contribuito alla nascita della Geometria Proiettiva su corpi e alla sua assiomatizzazione, alla nascita della teoria dei piani proiettivi astratti (desarguesiani e non desarguesiani), della teoria dei disegni, delle geometrie di Galois, dei buildings e poligoni generalizzati ed infine delle geometrie dei diagrammi di Buekenhout e Tits. Nel caso finito, i metodi e il punto di vista della geometria combinatoria si rivela particolarmente fruttuoso. Questa tesi si inserisce in tale punto di vista, soffermando l'attenzione sulle proprietà combinatorie di geometrie classiche, nel caso finito, presentando risultati vecchi e nuovi. La tesi consta di quattro capitoli. Il primo è una introduzione generale alla teoria dei grafi, il secondo è un richiamo delle definizioni e delle proprietà di incidenza di alcune geometrie classiche, il terzo è una descrizione delle $(0, \alpha)$-geometrie, introdotte da De Clerck e Thas nel 1983, ponendo particolare attenzione alle $(0, \alpha)$-geometrie ampiamente regolari, introdotte da Melone e dalla sottoscritta nel 2000. L'ultimo capitolo contiene i risultati originali e risultati classici che illustrano bene quello che è stato chiamato «il punto di vista della geometria di incidenza in algebra lineare». In particolare, si presenta una nuova caratterizzazione delle geometrie di Grassmann e degli spazi attenuati come $(0, \alpha)$-geometrie ampiamente regolari e si riporta una nuova dimostrazione di un Teorema di Korchmaros e Olanda del 1983 sui piani inversivi ovoidali, che utilizza soltanto nozioni di geometria di incidenza.
Richiamiamo di seguito alcune nozioni fondamentali. Si dice *struttura di incidenza* una terna $\mathcal{S} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ costituita da un insieme non vuoto $\mathbf{P}$, i cui elementi si dicono *punti*, da un insieme non vuoto $\mathbf{B}$, i cui elementi si dicono *blocchi*, e da una relazione simmetrica $I \subseteq (\mathbf{P} \times \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \times \mathbf{P})$, detta *incidenza*. Gli elementi di I si

dicono *bandiere* e se $(x, B) \in I$ si dice che *il punto* x *è incidente con il blocco* B oppure che *il blocco* B *è incidente con il punto* x. Le coppie punto-blocco non appartenenti ad I prendono il nome di *antibandiere*. Una geometria di incidenza è *finita* se essa possiede un numero finito di punti e blocchi. Una struttura di incidenza $\mathcal{S}$ è detta *spazio semilineare* se la relazione simmetrica di incidenza I tra punti e blocchi verifica i seguenti assiomi: (S1) *Due punti distinti sono incidenti con al più un blocco*; (S2) *Ogni blocco è incidente con almeno due punti*. Uno spazio semilineare in cui esistono coppie di punti non adiacenti si dice *proprio*, altrimenti *lineare*. In base alla (S1) è possibile identificare ogni blocco con l'insieme dei punti ad esso incidenti e la relazione di incidenza con l'appartenenza. Due punti distinti, x e y, si dicono *adiacenti*, e si scrive $x \sim y$, se esiste il blocco $\langle x, y \rangle$ per essi. In tal modo si associa a $\mathcal{S}$ un grafo sui punti, detto *grafo di adiacenza* di $\mathcal{S}$. Dall'assioma (S1) segue anche che due blocchi incidenti hanno un solo punto in comune. Nello studio delle strutture di incidenza, attraverso il grafo di adiacenza, si può far uso del linguaggio e dei metodi della teoria dei grafi.

2. – Classificazione degli spazi di Grassmann e attenuati come $(0, \alpha)$-geometrie ampiamente regolari con $\mu = \alpha^2$, $\alpha(\alpha+1)$ e verificanti l'assioma (VY*).

Si definisce $(0, \alpha)$-*geometria* (finita) di parametri (s, t) uno spazio semilineare $\mathcal{S}$ soddisfacente i seguenti assiomi: (i) *Ogni blocco ha* $s+1$ $(s \geq 1)$ *punti*; (ii) *Ogni punto appartiene a* $t+1$ $(t \geq 1)$ *blocchi*; (iii) *Per ogni antibandiera* (x, B) *risulta* $\alpha(x, B) = |\{y \in B : x \sim y\}| \in \{0, \alpha\}$ $(\alpha \geq 1$, *intero*); (iv) $\mathcal{S}$ *è connesso*. Ovviamente $\alpha \leq s+1$ e vale l'uguaglianza se, e soltanto se, ogni coppia di punti distinti di $\mathcal{S}$ è adiacente, ovvero $\mathcal{S}$ è uno spazio lineare. Nel seguito assumeremo $\alpha < s+1$, cioé considereremo $(0, \alpha)$-geometrie finite in cui esistono coppie di punti non adiacenti.

Diremo $(0, \alpha)$-*geometria ampiamente regolare*, di parametri gli interi (s, t, μ), una $(0, \alpha)$-geometria di parametri (s, t) soddisfacente la seguente proprietà di regolarità: *il numero di punti adiacenti ad ogni coppia di punti a distanza due è una costante* μ $(\mu > 0)$. Elechiamo di seguito alcuni esempi di $(0, \alpha)$-geometrie ampiamente regolari.

(a) Le geometrie di Johnson $J(d, h)$ $(d \geq h+2)$. I punti sono gli h-sottoinsiemi di un d-insieme S, i blocchi sono gli $(h+1)$-sottoinsiemi di S e l'incidenza è l'inclusione. I parametri sono $s = h$, $t = d-h-1$, $\alpha = 4$, $\mu = 4 = \alpha^2$.

(b) Le geometrie di Grassmann $\mathcal{S}_{\Sigma}^{h, d, q}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}^{h, d, q}$. I punti sono gli h-sottospazi di uno spazio proiettivo $PG(d, q)$ $(d \geq 3)$ e i blocchi sono, rispettivamente, l'insieme Σ delle stelle di h-sottospazi di $PG(d, q)$ di centro un $(h-1)$-sottospazio e l'insieme $\mathcal{N}$, un elemento del quale è costituito dagli h-sottospazi di $PG(d, q)$ contenuti in un $(h+1)$-sottospazio. I parametri di $\mathcal{S}_{\Sigma}^{h, d, q}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}^{h, d, q}$ sono rispettivamente $s = \theta(d-h)-1$, $t = \theta(h)-1$, $\alpha = q+1$, $\mu = (q+1)^2 = \alpha^2$ e $s = \theta(h+1)-1$, $t = \theta(d-h-1)-1$, $\alpha = q+1$, $\mu = (q+1)^2 = \alpha^2$, essendo $\theta(h) = \dfrac{q^{h+1}-1}{q-1}$.

(c) Spazi attenuati $H_q^{d, h}$ $(d \geq h+2)$. I punti sono gli h-sottospazi di uno spazio proiettivo $PG(d, q)$ sghembi con un fissato $(d-h-1)$-sottospazio H

e i blocchi sono gli $(h+1)$-sottospazi incidenti H in un punto. I parametri sono $s = q^{h+1} - 1$, $t = \theta(d-h-1) - 1$, $\alpha = q$, $\mu = q(q+1) = \alpha(\alpha+1)$.

Nello studio della struttura di incidenza di uno spazio semilineare $\mathcal{S}$, particolarmente interessanti e utili sono alcune proprietà configurazionali. Per i nostri scopi richiamiamo l'*assioma di Veblen-Young* (VY) e il suo *duale* (VY*), detti anche, rispettivamente, *assioma di Pasch* e *assioma diagonale*: (VY) *Due blocchi incidenti in punti distinti due blocchi ad intersezione non vuota sono ad intersezione non vuota*; (VY*) *Due punti x e y non appartenenti ad un blocco B ed adiacenti a due punti distinti, a e b, di B sono adiacenti.*

Le geometrie di Johnson e le geometrie di Grassmann verificano entrambi gli assiomi (VY) e (VY*) mentre gli spazi attenuati verificano soltanto l'assioma (VY*). Sia $\mathcal{S}$ una $(0, \alpha)$-geometria ampiamente regolare di parametri (s, t, μ) verificante (VY*), con $\alpha > 1$. Posto $p^{\perp} = \{q \in \mathbf{P} : p \sim q\}$, per ogni antibandiera (p, B) con $\alpha(p, B) = \alpha$, il sottoinsieme $l_{p,B} = p^{\perp} \cap B$ si dirà *retta singolare* determinata dall'antibandiera (p, B) e il sottoinsieme $T_{p,B} = l_{p,B} \cup (l_{p,B}^{\perp} \setminus B)$ è una clique massimale, detta anche *clique diagonale*. Si denoterà, inoltre, con $\overline{\mathcal{S}}$ la struttura di incidenza i cui punti sono i punti di $\mathcal{S}$ e i cui blocchi sono le clique diagonali di $\mathcal{S}$. Il risultato ottenuto è il seguente.

TEOREMA 1. – *Sia $\mathcal{S}$ una $(0, \alpha)$-geometria ampiamente regolare di parametri (s, t, μ), $1 < \alpha < s+1$, verificante l'assioma* (VY*) *e con $\alpha^2 \leqslant \mu \leqslant \alpha(\alpha+1)$. Allora $\mu = \alpha^2$ o $\mu = \alpha(\alpha+1)$. Nel primo caso $\mathcal{S}$ è isomorfa ad una geometria di Grassmann $\mathcal{S}_{\Sigma}^{h,d,\alpha}$ o $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}^{h,d,\alpha}$ ed, in particolare alla geometria di Johnson se $\alpha = 2$. Nel secondo caso, se $\alpha \geqslant 4$, $t > \alpha$ allora per ogni antibandiera (x, B), con $d(x, B) = 2$, risulta $s+1 \geqslant |\{y \in B : d(x,y) = 2\}| \geqslant \alpha^2$. Se $s+1 > |\{y \in B : d(x,y) = 2\}| = \alpha^2$, $s \neq (t+1)(\alpha-1)$ e l'intersezione di ogni coppia di sottospazi connessi di $\mathcal{S}$ è connessa allora $\mathcal{S}$ è isomorfa ad uno spazio attenuato $H_{\alpha}^{d,h}$ o $\overline{H}_{\alpha}^{d,h}$ con $d < 2h+1$.*

Questo risultato fornisce una caratterizzazione comune delle geometrie di Grassmann e degli spazi attenuati come $(0, \alpha)$-geometrie ampiamente regolari riottenendo i risultati di Fu-Huang del 1994 in ipotesi più deboli. La Dimostrazione del caso $\mu = \alpha(\alpha+1)$ segue quella di Huang [1] sebbene molte delle dimostrazioni delle proprietà che compaiono in entrambi, siano tecnicamente diverse e più semplici.

3. – Insieme di involuzioni di un piano inversivo ovoidale.

Una struttura di incidenza $\mathcal{I} = (\Omega, \mathcal{C}, I)$ si dice *piano inversivo* (o *piano di Möbius*) se valgono i seguenti assiomi: (I1) *Tre punti distinti di Ω sono incidenti con un unico blocco*; (I2) *Se C è un blocco e x, y sono punti con xIC e $y \not I C$, allora esiste un unico blocco C' incidente y e tale che x sia l'unico punto incidente con i blocchi C e C'*; (I3) *Esistono quattro punti non incidenti con uno stesso blocco.*

I blocchi si chiamano, più comunemente, *cerchi* e dagli assiomi segue che possiamo identificare i blocchi con l'insieme dei punti ad essi incidenti e l'incidenza con l'appartenenza. Due piani inversivi $(\Omega, \mathcal{C})$ e $(\Omega', \mathcal{C}')$ sono detti *isomorfi* se esiste una biezione $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ che trasforma i cerchi in cerchi insieme all'inversa. L'esempio classico di piano inversivo è $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_{\mathcal{K}})$, dove $\mathcal{K}$ è un ovoide di $PG(3, K)$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ è la famiglia delle ovali sezioni con i piani di $PG(3, K)$. Un piano inversivo isomorfo ad uno del tipo $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_{\mathcal{K}})$, per un opportuno ovoide $\mathcal{K}$, è detto *ovoidale* o *immergibile*. Uno tra i problemi più interessanti per le geometrie inversive riguarda lo studio delle condizioni per cui un piano inversivo finito sia isomorfo al modello classico $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_{\mathcal{K}})$, per un opportuno ovoide $\mathcal{K}$. I risultati più importanti in questo settore rimangono ancora quelli ottenuti, rispettivamente, da Dembowski (1963) e da Dembowski e Hughes (1965) che lasciano aperto il problema, ancora attuale, dell'immersione dei piani inversivi finiti di ordine dispari.

Seguendo il punto di vista di Buekenhout sulla caratterizzazione delle ovali astratte una famiglia $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ di permutazioni involutorie è associata ad ogni ovoide $\mathcal{K}$ di $PG(3, n)$ in modo naturale. Korchmaros e Olanda hanno individuato in [2] le proprietà di una famiglia di permutazioni involutorie $\mathcal{F}(\Omega)$ di un insieme Ω di ordine n^2+1 $(n \geq 2)$ tali che la coppia $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$ si strutturi a piano inversivo ovoidale. Le proprietà sono: (F_1) *Ogni involuzione ha h punti fissi con* $1 \leq h \leq n+1$; (F_2) *Tre punti distinti di Ω sono fissati da un'unica involuzione*; (F_3) *Assegnati tre punti distinti $x, y, z \in \Omega$ esiste un'unica involuzione f tale che $f(x) = y$ e $f(z) = z$.* (F_4) *Ogni involuzione f tale che $f(x) = y$, con $x, y \in \Omega$, commuta con ogni involuzione h che fissa entrambi i punti x e y*. Denotato con C_f l'insieme dei punti di Ω fissati da una involuzione f, il risultato principale in [2] si formula al seguente modo.

TEOREMA 2. – *Una famiglia $\mathcal{F}$ di involuzioni di un insieme Ω di cardinalità n^2+1 $(n \geq 2)$, soddisfacente le proprietà (F_1), (F_2), (F_3) e (F_4), determina su Ω una famiglia $\mathcal{C} = \{C_f \mid f \in \mathcal{F}\}$ di cerchi tali che la coppia $(\Omega, \mathcal{C})$ sia un piano inversivo ovoidale.*

La dimostrazione di tale Teorema consiste nel provare che il piano inversivo $(\Omega, \mathcal{C})$ è dotato di una ortogonalità e quindi è ovoidale in base al Teorema di Dembowski e Hughes. Nella tesi si presenta una costruzione diretta dello spazio proiettivo $PG(3, n)$ in cui Ω è immerso, utilizzando solo nozioni e risultati sugli spazi lineari finiti.

BIBLIOGRAFIA

[1] HUANG T., *A characterization of the association schemes of bilinear forms*, Europ. J. Combin., 8 (1987), 159-173.

[2] KORCHMAROS G. e OLANDA D., *On egglike inversive plane*, J. Geom., **21** (1983), 53-58.

Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli, Caserta
e-mail: giovanna.bonoli@unina2.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli (Federico II)) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. N. Melone, Seconda Università di Napoli