Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Laura Catastini

Il giardino di Desargues

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.2, p. 321–345.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_2_321_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Agosto 2004, 321-345

Il giardino di Desargues.

LAURA CATASTINI

«Il vero mistero è l'esistenza
di un pensiero qualunque,
di un qualunque processo mentale»
J. HADAMARD

Introduzione.

Desargues è una figura strana e non convenzionale nell'universo scientifico del suo tempo. È vissuto nella prima parte del XVII° secolo, così fertile, in Francia, di nomi straordinari per le matematiche come Roberval, Fermat, Descartes, Pascal. In un momento in cui la matematica stava facendo grandi balzi in avanti rispetto alla trattazione classica ereditata dalla geometria greca attraverso lo sviluppo di nuovi strumenti algebrici, che preparavano la nascita dell'analisi, Desargues (1593-1661), e con lui il suo allievo Pascal, restò fedele all'impostazione sintetica della geometria antica. Egli riuscì, nonostante questo, a rivoluzionare completamente il contesto euclideo e a crearne uno nuovo, padre della moderna geometria proiettiva, tracciando una strada alternativa a quella costruita dai suoi contemporanei. Il valore della sua opera tuttavia non fu all'epoca riconosciuto ed esaltato e si può pensare che il clamore e l'entusiasmo che creò nell'ambiente scientifico il metodo delle coordinate di Descartes, abbia messo in ombra le teorie di Desargues. A questo si aggiunga che la sua opera principale, il *Brouillon project d'une atteinte aux* *evenemens des rencontres d'un cone avec un plan* (1) fu stampata nel 1639 in sole 50 copie subito disperse (2).

Molte caratteristiche del lavoro di Desargues fanno di lui un personaggio singolare, fuori dai canoni e difficile da inquadrare. Il suo stile bizzarro e sconcertante ha reso oggettivamente difficile la lettura dei suoi lavori, contribuendo alla lentezza della diffusione delle sue idee.

Gli stessi amici di Desargues, tra i quali vanno inclusi Descartes e Mersenne – quest'ultimo lo stimava molto e lo aveva incluso nella sua *Accadémie*, che divenne in seguito l'*Accadémie libre* e poi, nel 1666, l'*Accadémie des Sciences* – avevano qualche difficoltà ad accettare i suoi modi. Descartes commenta così la lettura del *Brouillon* in una lettera del 1639 indirizzata a Desargues (3): e

> Voi potete avere due propositi che sono entrambi molto buoni e lodevoli ma che non richiedono lo stesso modo di procedere: uno è di scrivere per i dotti ed insegnar loro qualche nuova proprietà delle sezioni coniche che ancora non conoscono; e l'altro è di scrivere per i curiosi che non sono dotti e di fare in modo che questa materia, che fino ad ora è compresa da pochissime persone e che tuttavia è molto utile nella prospettiva e in architettura, venga divulgata e diventi di facile comprensione per tutti quelli che vorranno studiare il vostro libro. Se voi avete il primo proposito non mi sembra sia ne-

(1) Il titolo dell'opera mette in luce il suo carattere provvisorio, di bozza (o «brogliaccio», inteso in questo senso), dove vengono indicate solo le linee fondamentali con le quali sviluppare alcune idee sulle sezioni piane di un cono circolare. Una possibile traduzione di questo titolo potrebbe essere «Brogliaccio di un progetto per cogliere ciò che accade intersecando un cono con un piano».

(2) Solo nel 1845 Chasles troverà una copia scritta a mano da La Hire che servirà poi come base per l'edizione del 1864 curata da Poudra [1] nella quale sono raccolti altri frammenti e testimonianze sull'opera di Desargues. Nel 1922 il Brogliaccio viene tradotto in tedesco e, solo nel 1951, Taton trova fortunosamente una delle 50 copie originali priva di figure, non del tutto identica a quella trascritta da La Hire, che servirà per la sua edizione delle opere di Desargues [2] cui noi principalmente ci riferiremo in questo lavoro. Segnaliamo infine la traduzione inglese del 1987 [3] curata da J. V. Field e J. J. Gray ricca di note e commenti. È così accaduto che le idee di Desargues, affossate e disperse per oltre due secoli, siano poi state ritrovate indipendentemente da Brianchon e Poncelet dopo che il nuovo ambiente proiettivo che Desargues aveva tentato di delineare era stato fondato, all'inizio del XIX secolo, da Monge e dalla sua scuola.

(3) «Vous pouvez avoir deux desseins qui sont fort bons...» Lettera di Decartes a Desargues del 19 Giugno 1639 in [2], pg. 185.

cessario usare termini nuovi perché i dotti, avendo familiarità con quelli di Apollonio, non li cambierebbero con facilità con altri, anche se migliori, e quindi i vostri non serviranno che a render loro le dimostrazioni più difficili e ad allontanarli dal leggerle. Se voi avete il secondo proposito è certo che i vostri termini che sono in francese e non mancano di spirito e di grazia, saranno accolti meglio dalle persone che non conoscono quelli antichi e anche potrebbero attrarre molti a leggere i vostri libri [...] ma se è questa la vostra intenzione bisogna che vi decidiate a scrivere un libro molto ampio...

In effetti, accanto ad una mente acuta e geniale abitava in Desargues uno spirito pratico che lo portava a una forte tensione didattica nei confronti di ciò che presentava al suo pubblico, spesso composto da artigiani. All'inizio della *Perspective* di Bosse, suo allievo e divulgatore dei suoi scritti, troviamo riportate queste affermazioni, da lui attribuite a Desargues (4):

Riconosco francamente di non aver mai provato piacere in studi o in ricerche nel campo della fisica o della geometria, se non in quanto queste potevano servire come mezzi per arrivare a una qualche sorta di conoscenza [...] che si potesse tradurre, all'atto pratico, nel bene e comodità della vita, che venisse usata per conservare la salute e, come applicazione, nella pratica di qualche arte, e mi sono reso conto che una gran parte delle arti prati-

(4) «J'avoue franchement que ie n'eus jamois de goust à l'estude ou recherche, ny de la phisique, ny de la géométrie, sinon en tant qu'elles peuvent servir à l'esprit, d'un moyen d'arriver à quelque sorte de connaissance [...] qui se puissent reduire en acte effectif, au bien et commodité de la vie qui soit en usage pour l'entretien de la santé; soit en leur application pour la pratique de quelque art, et m'estant aperceu, qu'une bonne partie d'entre les pratiques des arts, est fondée en la géométrie ainsi q'une baze assurée; [...] Desquels arts ayant considéré l'excellence et la gentillesse, ie fus touché du désir d'entendre, s'il m'estoit possible, et les fondemens et les regles de leurs pratique, telles qu'on les trouvois et voyoit lors en usage; où je m'aperceut que ceux qui s'y adonnent, avoient à se charger la mémoire d'un grand nombre de leçons diverses, pour chacune d'elles; et qui par leur nature et condition produisoient un embarrs incroyable en leur entendement, et loin de leur faire avoir de la diligence à l'exécution de l'ouvrage, leur y faisoit pedre du temps, [...] où la plus part des peintres et autres ouvriers travailloient comme à l'adventure et en tastonnant: sans guide ou conduite assurée, e par conséquent auec vne incertitude et fatigue inimaginable. Le désir et l'affection de les soulager si ie pouvois aucunement de cette peine, si laborieuse et auvent ingrate, me fit chercher et publier des regles abregées de chacun de ces arts [...] nouvelles,demonstratives, plus faciles à comprendre, a prendre, et effectuer, [...].» In [1], pp. 24-25.

> che si fonda sulla geometria come su una base sicura [...] Avendo constatato l'eccellenza e la bellezza di tali arti [*la pratica del taglio delle pietre, la prospettiva, la costruzione di una meridiana*], sono stato preso dal desiderio di capire, se mi fosse stato possibile, sia i fondamenti che le regole delle loro pratiche, quali si trovano e si vedono in uso, e ho scoperto allora che coloro che vi si dedicano ammettono di caricarsi la memoria di un gran numero di insegnamenti diversi, per ognuna di loro, che per la loro natura e condizione producono un ingombro incredibile nella loro mente e invece di aiutarli nell'esecuzione del compito, fanno loro perdere del tempo[...] oppure che la maggior parte dei pittori e degli altri artigiani lavorano andando alla ventura e a tentoni, senza una guida sicura, e conseguentemente con una incertezza e una fatica inimmaginabile. Il desiderio di alleviare, se possibile, alcune di queste pene, così faticose e spesso ingrate, mi ha spinto a cercare e a pubblicare per ciascuna di queste arti delle regole abbreviate [...], nuove, dimostrative, più facili da capire, da apprendere e da mettere in pratica.

In effetti Desargues organizzò numerosi teoremi utili agli artigiani e li divulgò tramite conferenze e fogli volanti. Sembra che egli, nella sua missione didattica, attribuisse grande importanza alle parole tecniche in uso nelle sue opere, dal momento che si impegnò costantemente per una loro definizione accurata, arrivando a coniarne di nuove. Nel suo stesso scritto sulla prospettiva (5), per esempio, dedica molto spazio alla rassegna di tutte le parole interessate, dando le definizioni e tutti i sinonimi dei nomi, nuovi o consueti, in uso nella pratica della disciplina. Emerge da questo fatto che una parte di quella confusione a cui accennava Desargues parlando del lavoro degli artigiani, dipendeva proprio dall'uso di termini diversi, in contesti diversi, per indicare la stessa cosa, o di significati dei termini non ben definiti, dai contorni sfumati. Ecco allora la giusta preoccupazione, in partenza, di levare ogni ambiguità e ogni possibile confusione in questo campo e di unificare il più possibile i termini usati.

Ma nella sua opera principale, il *Brouillon*, questa attenzione alle parole sembra diventare addirittura una stramberia incomprensibile nel suo intento, generalmente di ostacolo nella lettura del testo. Egli usa termini botanici cone *nodo, tronco, ramo, ramoscello* per designare comuni oggetti geometrici come punto su una retta, retta,

(5) In [1], pp 55-84.

rette intersecantesi, segmento. Jean de Beaugrand, potente segretario del re e scienziato oggi pressoché ignoto, scriveva nel 1640, a un anno dalla pubblicazione del *Brouillon* (6)

> ...voi scuserete la libertà che mi prendo di non scusare affatto quella dell'Amico che nei *Brogliacci* che ha messo in circolazione, non si è accontentato solamente di sostituire con termini barbari quelli tramandati dai sapienti, ma ha voluto anche introdurne alcuni assolutamente ridicoli.

Tra questi includiamo il termine *involution*, rimasto nel linguaggio tecnico della matematica di oggi per denotare un concetto centrale in geometria proiettiva, che Desargues introduce e concepisce con estrema chiarezza assieme alla sua invarianza rispetto alle proiezioni centrali. Aggiunge poco dopo Beaugrand (7)

> Ma se non si tratta che *di cogliere ciò che accade intersecando un cono con un piano*, non è questo indice di uno spirito insolente? o tanto privo della lettura di buoni libri da voler rifiutare il modo di parlare di Euclide, di Apollonio e di Archimede, per applicare male quello di carpentieri e mura-

(6) «...vous excuserez ma liberté, si je n'excuse point celle de l'Amy qui dans les *projects brouillons* qu'il a mis au jour, ne s'est pas seulement conteté de substituer des termes barbares, en la place de ceux qui sont receus par les sçavans, mais a voulu aussi en entroduire qui sont entierement ridicules.»

Da una lettera stampata del 20 luglio 1640 in [4], pg. 176.

(7) «Mais s'il n'est question que *d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'un cone avec un plan* n'est-ce pas une marque d'un esprit insolent? ou bien depourveu de la lecture des bons livres de vouloir rejeter la façon de parler d'Euclide, d'Apollonius & d'Archimede, pour mal appliquer celle des Charpentiers & des Massons à un objet dont la delicatesse, & l'excellence est infiniment au dessus de celle que l'on desire dans leurs ouvrages: Pour moy ayant leu avec attention les dix premieres pages de la susdite atteinte, qui font exactement le tiers de l'oeuvre entiere, & reconnu qu'il n'y avoit autre chose qu'une proposition qui est parmy les lemmes du livre de la section determinée dans le septiesme de Pappus, je ne puis vous celer qu'il m'este venu en la pensée que L.S.D. affectoit cette façon de mal parler en Mathematique, non seulement pour ne sçavoire pas la bonne,mais aussi afin que lors qu'il diroit ce qui est ailleurs, il y eut plus de peine à le reconnoistre. [...] En verité je ne voy point qu'il ayt reussi en aucuns de ses noms imposez, si ce n'est en celuy de brouillon qu'il a pris pour le titre de son livre. Je pourrais jurer en conscience que je n'en ay leu aucun où il y eust moins d'ordre & plus de confusion, ny qui meritast mieux d'etre ainsi nommé».

In [4], pg. 176.

> tori a un oggetto la cui delicatezza ed eccellenza è infinitamente al di sopra di ciò che si chiede alle loro opere: da parte mia, avendo letto con attenzione le prime dieci pagine del suddetto *accenno*, che sono esattamente un terzo di tutta l'opera, e avendo constatato che non contenevano altro che una proposizione che è tra i lemmi di Pappo, non vi posso nascondere che mi è venuto da pensare che Desargues abbia adottato questo modo di mal parlare in matematica, non solo perché non conosce quello giusto, ma anche perché, nel momento in cui vengano riportate cose già esistenti altrove, si faccia più fatica a riconoscerle. [...] In verità non mi sembra che sia riuscito in alcuno dei nomi che ha imposto, tranne che in quello di «brogliaccio», che ha scelto come titolo del suo libro. Potrei giurare in tutta coscienza di non aver mai letto niente in cui vi sia meno ordine e più confusione, e che meritasse di più quel nome.

Un solo convinto apprezzamento delle idee di Desargues sembra sia stato dato da Fermat, altro grande matematico fondatore della moderna teoria dei numeri, poco considerata a quei tempi, e la cui vicenda è per alcuni versi simile a quella di Desargues. Fermat scriveva in una lettera a P. Mersenne datata 1 Aprile 1640 ([8]):

> Stimo molto M. Desargues e tanto più che è lui il solo inventore delle sue coniche. Il suo libretto che, voi dite, passa per essere scritto in gergo, mi è sembrato molto comprensibile e molto ingegnoso.

In definitiva le idee di Desargues non furono discusse a fondo negli ambienti scientifici importanti e furono invece al centro di grandi contestazioni e polemiche nell'ambito di mediocri tecnici, che lo amareggiarono e stancarono tanto da portarlo alla fine a richiudersi in una vita ritirata, a Lione, lontano dalla corte e da Parigi, dedito all'insegnamento delle sue tecniche agli artigiani locali. Tutto questo ha contribuito a fare di lui un autore in pratica sconosciuto per quasi due secoli, fino a quando Poncelet, nella prima metà del XIX secolo, leggendo proprio i detrattori di Desargues, si rese pienamente conto dell'importanza di quelle idee. Ancora oggi Desargues è poco letto, poco conosciuto, non esiste nessuna edizione italia-

([8]) «J' estime beaucoup M. Desargues et d'autant plus qu'il est lui seul inventeur de ses coniques. Son livrete qui passe, dites-vous, pour jargon m'a paru très intelligible et très ingégneux.»
In [1] pg. 22.

na delle sue opere e quella francese curata da Taton nel 1951 è sopratutto pensata per una ristretta cerchia di studiosi della storia della matematica. D'altra parte molti problemi di interpretazione dell'opera di Desargues restano ancora aperti. J.-P. Le Goff, uno dei maggiori studiosi di questo autore, in [4] si pone, per esempio, il seguente «enigma storico»: quali considerazioni hanno portato Desargues ad introdurre un nuovo stranissimo vocabolario per denotare concetti spesso già noti, quali lo hanno portato a concepire il concetto di involuzione con la sua invarianza proiettiva? Il riferimento alla pratica della pittura e della rappresentazione prospettica alla quale allude la maggioranza dei commentatori (9), non ci pare sufficiente. Le strane definizioni coniate da Desargues rimasero di fatto incomprese, anche per l'estrema sinteticità del testo, come aveva ben predetto Descartes, e fallirono quindi miseramente. In questo lavoro cercheremo di mostrare come attraverso esse l'autore tentasse di condurre il pensiero del lettore ai ricentramenti cognitivi necessari ad afferrare i profondi significati dei suoi nuovi risultati matematici.

(9) Nell'articolo [5] J. Field ridimensiona rispetto alla biografia di Poudra il ruolo negativo del linguaggio nella sorte del Brouillon ma tenta comunque una spiegazione della scelta stravagante dei termini che molti definiscono «botanici» usati da Desargues in modo metaforico, quali *tronc* (tronco), *rameau* (ramo), *arbre* (albero), *noeud* (nodo), *souche* (ceppo), *brin* (ramoscello). La Field riporta, senza condividerla totalmente, una ipotesi di W. Ivins secondo la quale l'ispirazione per queste metafore può trovarsi in un'opera di Alberti, il *De pictura*, nella quale i raggi visivi uscenti dall'occhio vengono in maniera molto fuggevole paragonati a rami di un albero:

«E noi qui immaginiamo i razzi quasi essere fili sottilissimi da un capo quasi come una mappa molto strettissimi legati, dentro all'occhio ove siede il senso che vede, e quivi quasi come tronco di tutti i razzi quel nodo estenda drittissimi sottilissimi suoi per insino alla opposita superficie».

La lettura di questo passo avrebbe generato successivamente in Desargues l'idea di usare nel suo *Brouillon* questi nuovi termini. La Field si mostra orientata più verso l'ipotesi che lega questo vocabolario a termini militari e ingegneristici, anch'essi familiari a Desargues. Sottolinea come «but» e «ordonnance» siano termini usati dall'artiglieria e il fatto che «arbre» abbia in meccanica il significato di asse centrale di una macchina, significato a cui rapportare quello degli altri componenti la struttura complessiva.

I tentativi di spiegare l'origine di questo nuovo vocabolario costruiscono ipotesi con pari dignità ma che non entrano nel merito di una questione per noi cruciale: perché Desargues ha sentito l'esigenza di sganciare banali oggetti geometrici dai loro termini usuali per rinominarli nel suo modo fantasioso?

Questi ricentramenti, di norma, avvengono naturalmente nello studioso e richiedono che il nuovo materiale, canonicamente formalizzato, sia assimilato tanto da riuscire ad interagire con i vecchi schemi e le vecchie rappresentazioni, fino a cambiarne l'intima struttura. Un processo di tal genere però è lento e richiede un notevole sforzo cognitivo, possibile solo a chi possiede una buona mente e una solida competenza in materia. È nostra ipotesi che l'entusiasmo divulgativo di Desargues volesse portare i suoi lettori a familiarizzare fin dall'inizio con le nuove forme, le nuove proprietà del suo originale ambiente concettuale. I suoi strani termini avrebbero avuto così l'intento di rimuovere gli ostacoli epistemologici derivanti dalla classica visione euclidea creando produttive immagini mentali che aiutassero ad intuire uno spazio nel quale far convivere il finito e l'infinito attuale. La mente inoltre avrebbe potuto orientarsi in questo nuovo spazio sfruttando l'intrinseca dinamica delle immagini desarguesiane che, come mostreremo più avanti, aiuta a visualizzare l'esito del processo di degenerazione quando una loro parte vada all'infinito e fa emergere in modo naturale il concetto di involuzione.

1. – Il seme della trasformazione.

L'esplorazione del mondo fisico avviene nell'uomo essenzialmente attraverso la vista e attraverso il movimento e il tatto. La nostra mente si affida a due rappresentazioni incongrue tra loro e vi si muove agilmente, traendone conclusioni e inferenze giuste, nonostante le informazioni contrastanti che arrivano dai nostri sensi. Il tatto ci dice che un rettangolo resta uguale a sé in qualunque occasione avvenga l'esplorazione, mentre lo stesso oggetto è visto in molti modi diversi, se ci spostiamo. Le forme che si generano nella visione in movimento di un oggetto mantengono tuttavia, nel loro variare, una forte invarianza ontologica che le unifica cognitivamente tra loro. Guardando un cerchio da una posizione non frontale, per esempio, continuiamo a riconoscerlo come un cerchio, anche se ci appare come un'ellisse.

La rappresentazione percettiva e cognitiva del mondo fisico quindi si svolge su due piani che continuamente si integrano:

quella del mondo dell'«essere» e quella del mondo dell'«apparire».

Nello sviluppo del pensiero scientifico le proprietà metriche del mondo dell'essere hanno portato alla splendida costruzione della geometria euclidea. L'indagine dei rapporti tra gli oggetti studiati permette di definire logicamente alcuni di tali oggetti per mezzo di altri – ad esempio il triangolo può essere definito tramite la retta e il punto – a partire da elementi primitivi che non hanno la possibilità di essere definiti in tal modo senza causare circoli logici viziosi. Nella geometria euclidea questi elementi fondanti, il punto, la retta e il piano, sono nati rispettando fortemente le proprietà intuitive che ci arrivano dall'immersione nel mondo reale. In essa poi le forti proprietà metriche rendono regina la forma, statico oggetto di contemplazione platonica, attorno alla quale l'indagare si snoda attraverso ampliamenti, sottrazioni, ricentramenti, ma mai con trasformazioni che colleghino forme diverse tra loro. L'unica occasione che vede l'introduzione di un movimento è creata dalla necessità di definire uguali due oggetti geometrici. Notoriamente Euclide, con qualche disagio concettuale, si affida per questo a una sorta di intuitivo movimento meccanico di trasporto, nel quale due oggetti si identificano quando, se sovrapposti, coincidono.

La geometria del mondo «come si vede» ha avuto una sorte diversa e legata più alle arti pratiche che alle discipline nobili della matematica, ma ha comunque prodotto teorie rigorose nel loro impianto assiomatico. Un esempio in questo senso è dato dall'Ottica di Euclide, che si pensa fosse impiegata all'epoca come guida nelle costruzioni scenografiche delle rappresentazioni teatrali e delle opere artistiche e architettoniche in genere. Gli assiomi dell'Ottica rendono possibile trattare e prevedere in modo rigoroso le trasformazioni subite dalla forma e dalle dimensioni apparenti di un oggetto in funzione delle variazioni del punto di vista.

Anche i metodi prospettici perfezionati nel Rinascimento hanno impegnato i matematici, che hanno corretto i principi approssimativi che venivano applicati dagli artigiani come puri espedienti pratici nell'esecuzione delle loro opere e ne hanno dato dimostrazioni rigorose all'interno della geometria classica. Il loro concentrarsi sulle figure geometriche da un punto di vista prospettico ne ha esaltato le proprietà grafiche e ne ha indotto una forte separazione da quelle metriche, portando così a una concezione più generale delle figure stesse.

Con la prospettiva si insinua in geometria il concetto di trasformazione, che passa, senza essere formalmente definito, attraverso nuovi termini, quali il «degradare», coniati da matematici e pittori come Piero della Francesca. Nell'accezione di Piero un oggetto degradato è il trasformato di un oggetto reale sul piano del quadro e il degradare è l'operazione mediante la quale, attraverso procedimenti geometricamente corretti, si attua graficamente la proiezione, arrivando al giusto disegno prospettico.

Questo primitivo concetto di trasformazione di forme pervade la concezione geometrica di Desargues e lo porta con forza a studiare la proiezione di una configurazione in un'altra, arrivando a vedere tale proiezione, modernamente, non solo come collegamento puntuale tra forme ma anche tra le intere superfici che le contengono. La ricerca dell'unificazione delle coniche condurrà Desargues a proporre la «innaturale» ma risolutiva identificazione dei due versi di una direzione in un unico punto all'infinito. Si rende in questo modo impraticabile all'immaginazione il contesto totale cercato, ma si soddisfa l'esigenza matematica di mantenere una necessaria continuità alla trasformazione.

Non sappiamo nulla sul contenuto delle sue *Leçons de tenebres,* che pare tenesse dopo il suo ritiro a Lione, tranne questa testimonianza riportata in una lettera (10) di Oldenburg a Leibniz, del 1673, dalla quale emerge la grande modernità con la quale Desargues tenta di costruire un modello topologico del piano proiettivo:

> Abbiamo avuto recentemente sotto gli occhi, per un esame, un trattato di prospettiva in-folio, scritto da Huret, nel quale lui critica e rigetta le coniche di Desargues intitolate Leçons de tenebres, di cui abbiamo sentito dire sono state stampate solo 50 copie in tutto di difficile reperimento; se l'intenzione dell'autore è bene interpretata la dottrina merita lode e va sviluppata piuttosto che biasimata. Ora il suo progetto era di trattare le sezioni coniche come proprietà di cerchi più piccoli situati sulla superficie di una sfera; per

(10) In [4] pg. 187-189.

spiegare questo si suppone che l'occhio sia al centro della sfera, la quale sia toccata da un piano sul suo Zenit e che si percepisca il piano attraverso la sfera, il detto piano è la base d'un cono il cui vertice è l'occhio: se un cerchio è al di sopra dell'orizzonte e se è anche un parallelo, la sezione sul piano tangente è un cerchio, ma se non è un parallelo è una ellisse, e se tocca l'orizzonte ma tutte le altre parti del cerchio sono sopra l'orizzonte, è una parabola e guardando diversi cerchi elevarsi in modo da toccare l'orizzonte in uno stesso punto, la loro proiezione condurrà a parabole tutte congruenti; ma se un cerchio o più cerchi si trovano parte al di sotto e parte al di sopra dell'orizzonte, le loro proiezioni sono delle iperboli e se questi cerchi hanno una corda comune sull'orizzonte le loro proiezioni sono delle iperboli congruenti; se questi cerchi sono interamente sotto l'orizzonte non si possono proprio proiettare.

Questa nota riporta un esempio che aiuta a concepire la grande innovazione di Desargues: le coniche erano classicamente studiate, fin dall'antichità, come sezioni di un doppio cono retto. Le forme, ancora platoniche come concezione, determinate dal piano secante sulla superficie del cono erano via via definite come cerchio, o ellisse, o parabola..., e il tentativo di unificare il loro studio in un'unica trattazione non aveva avuto che uno sbocco algebrico.

La proiezione di una semisfera su un piano, così chiaramente descritta, ci porta invece a considerare le coniche come «trasformazioni» visive (proiettive) di una circonferenza da una semisfera su un piano, introducendo nella geometria sintetica il seme del concetto di corrispondenza.

L'immaginare la volta celeste e la sua proiezione dal centro sul piano tangente alla sfera nello Zenit, porta a identificare cognitivamente, attraverso il punto di vista, l'infinito con l'orizzonte e le coniche con cerchi che intersecano diversamente l'orizzonte. Se questa immagine, per lo meno localmente ([11]), può aiutare la nostra intuizione, nello stesso tempo essa porta a modificare completamente la struttura classica dello spazio intervenendo sul concetto di parallelismo e di infinito su cui è fondato l'intero edificio euclideo.

([11]) Per avere un modello globale del piano proiettivo si dovrebbero identificare sull'orizzonte i punti diametralmente opposti, dal momento che una retta ha un solo punto all'infinito.

2. – Le immagini dell'infinito.

Il Brogliaccio di Desargues ha la caratteristica di non essere, come bozza, canonicamente formalizzato e pare quasi possa farci rivivere l'atto creativo nel momento in cui prende forma. Le immagini che Desargues costruisce attraverso i nuovi, strani termini introdotti, vogliono creare, crediamo, una comprensione più profonda del nuovo mondo geometrico che lui è riuscito a concepire.

Dal punto di vista dell'immaginazione, ogni costruzione euclidea avviene «al finito» e per questo il «lontano» e il «vicino» sono semplici prolungamenti o contrazioni di mappe locali. Le rette in Euclide sono segmenti che possono essere prolungati a piacere, dando luogo ad altri segmenti. Le figure sono chiuse e limitate e qualunque dilatazione o contrazione resta nell'ambito della similitudine, rendendo possibile ricostruire attraverso un'immagine le proprietà ricavate con procedimenti logico deduttivi. Desargues invece si spinge oltre, cercando di immaginare come le figure possano coerentemente collocarsi e distendersi in uno spazio contenente il proprio infinito e in questo tentativo vede con chiarezza le difficoltà a conciliare l'intuizione col ragionamento, costretti entrambi da preesistenti e consolidati schemi euclidei.

Ad esempio, volendo descrivere la figura che si ottiene intersecando un cono con un piano non passante per il vertice e non parallelo alle generatrici, osserva che, mentre al finito questa figura è semplicemente una ellisse,

> se questa intersezione è a distanza infinita l'evento è inimmaginabile e l'intuizione è troppo debole per capire come può accadere quello che il ragionamento le fa concludere (12).

Nello spazio che Desargues intuisce, l'infinito è un'estensione in atto, che rompe vecchi schemi concettuali nei quali, come per i numeri, l'infinito esprime solo la possibilità di crescere a piacere. La difficoltà ad immaginare e poi descrivere tale spazio costituisce una sfida che lui affronta, ed è anche per questo, non solo per i risultati

(12) «Si cette rencontre est à distance infinie l'evenement en est inimaginable et l'entendement trop faible pour comprendre comment peut estre ce que le raisonnement luy en fai conclure.» In [2], pg. 136.

sulle teoria delle coniche sorti dal nuovo contesto, che la sua opera è significativa. Dice all'inizio del *Brouillon* per presentare la materia del suo lavoro ([13]):

> Ciascuno penserà quello che gli sembrerà più opportuno di ciò che qua deduciamo e della maniera di dedurlo e vedrà come la ragione cerchi di comprendere sia le grandezze infinite che quelle così piccole da avere le opposte estremità unite tra loro e vedrà come il pensiero si perda anche perché sarà portato, attraverso il ragionamento ordinario, ad accettare delle proprietà delle quali è incapace di capire come possano essere.

Certo la pratica del disegno prospettico, della quale Desargues era un ottimo conoscitore, ha contribuito a sviluppare in lui una forte intuizione dell'infinito spaziale. Se guardiamo due rette parallele allontanarsi da noi lungo un data direzione esse si vedono convergere verso un «punto infinitamente lontano» che nella rappresentazione prospettica viene disegnato con un punto effettivo posto sulla linea dell'orizzonte. Ma se ora ci giriamo e guardiamo le due rette parallele nell'altro verso ancora le vediamo unirsi in un punto, ma le vediamo unirsi in un altro quadro che è quello che ora abbiamo davanti a noi. Questi due quadri, queste due rappresentazioni, quella davanti e quella dietro, come si amalgamano nel nostro pensiero dando luogo a un'immagine coerente? Ci sono due punti infinitamente lontani dove le rette parallele s'incontrano, uno da una parte e uno dall'altra, o ne esiste uno solo? E l'orizzonte che vediamo come una linea retta, e così lo vediamo anche quando ci giriamo, come possiamo rappresentarcelo globalmente? Se ogni retta ha una direzione, qual'è la direzione dell'infinito? È forse pensabile come una circonferenza? Ma in questo caso cosa c'è fuori dalla circonferenza? È possibile andare oltre l'infinito? È possibile scavalcare l'orizzonte? Ma se questo non è possibile a che cosa corrisponde quello spazio che pure vediamo sul nostro quadro e che sta sopra l'orizzonte? Cosa rappresenta quell'altrove?

Come si vede, la mente si sente vagare, l'immaginazione si perde e il ragionamento cerca di guidare entrambe. Siamo di fronte ad un interessantissimo caso in cui la nostra intuizione spaziale non riesce

([13]) In [2] pg. 99.

spontaneamente a trovare risposte coerenti all'interno del proprio sistema di connessioni e, in un qualche modo, chiede aiuto al pensiero logico deduttivo. Vediamo l'infinito nei vari quadri dove vediamo rispecchiarsi lo spazio, ma non riusciamo a «incollare» coerentemente i dati locali, forniti dalle varie rappresentazioni e immaginare uno spazio globale. Occorrono dunque nuovi strumenti capaci di guidare il pensiero verso la comprensione di questi fatti ([14]).

Siamo convinti che Desargues non solo si rendesse pienamente conto di questa difficoltà ma cercasse in ogni modo di costruire dei modelli geometrici capaci di guidare l'intuizione. Egli sembra rendersi conto della difficoltà di descrivere questo nuovo spazio dove «*l'entendement s'y perd*», ma accetta la sfida e, per guidare la propria e l'altrui intuizione, inventa nuovi termini, un nuovo mondo geometrico fatto di *traguardi*, di *albe*ri, di *nodi*, di *rami* e *ramoscelli*, di *involuzioni*, che aiutino a modificare l'immagine cristallizzata di uno spazio euclideo nel quale le figure vivono prigioniere di una scatola e possono essere sì prolungate quanto si vuole, ma non raggiungono comunque mai l'infinito. E invece ora che l'infinito è stato raggiunto è proprio in rapporto ad esso che nasce una nuova geometria delle figure: l'infinito diventa parte significativa dello spazio e le figure rispetto ad esso prendono forma. L'iperbole è la sezione di un cono «*la quelle à distance infinie se mipartit en deux moitiez opposées dos à dos*», mentre la parabola «*à distance infinie rentre et repasse en soy mesme*» ([15]).

La difficoltà che incontra il pensiero nell'intuire e immaginare questo nuovo ambiente e la resistenza a cambiarne la fisionomia rispetto a quello euclideo, sono in parte dovute al fatto che i due enti fondanti, la retta e il punto, sono ancora cognitivamente legati alla primitiva e intima concezione di essi, coincidente con quella formatasi «per immersione» nella vita reale e consolidata nella cognizione con lo studio della geometria euclidea, quasi fossero enti «assoluti». La piena ripresa dell'attività

([14]) Solo in tempi relativamente recenti ed utilizzando i metodi della topologia algebrica, come è noto, è stato possibile rispondere, in senso negativo, alla domanda se sia o no possibile costruire un'immagine globale del piano proiettivo reale: ogni rappresentazione in questo senso, infatti, pensata nello spazio tridimensionale, è obbligata, per motivi geometrici, ad autointersecarsi, come la bottiglia di Klein.

([15]) In [2] pg. 136.

intuitiva avverrà solo quando l'esperienza immaginativa avrà pazientemente *costruito* un sufficiente numero di figure strettamente legate ai nuovi assiomi, alle nuove istruzioni verbali, senza caricarle di elementi impropri, ad esse estranee, e avrà di fatto reso queste rappresentazioni fondamenta per una nuova base concettuale, che possa guidare produttivamente le simulazioni necessarie allo sviluppo delle idee.

Noi riteniamo che il nuovo linguaggio che Desargues propone nasconda il tentativo da parte sua di mettere il lettore in una nuova ottica mentale, che gli permetta di staccarsi un po' alla volta dal contesto euclideo per avventurarsi in un campo nel quale la mente trova molte difficoltà, legate non alla razionalità, ma alla rappresentazione intuitiva di un nuovo mondo geometrico.

Il modo in cui Desargues inizia il *Brouillon* spazza via ogni interpretazione che vede nei neologismi che verranno usati solo un inutile e fastidioso vezzo dell'autore, e ci mostra subito la questione da lui individuata, collegata al testo da leggere ([16]):

> Non sarà qui difficile fare la necessaria distinzione tra le assegnazioni di un nome, cioè le definizioni, le proposizioni, le dimostrazioni, là dove seguono, dalle altri parti del discorso, e neanche [fare distinzione] tra lo *scegliere* fra le figure, quella appropriata al testo che si sta leggendo, oppure il *costruire* le figure sulle indicazioni delle frasi scritte.

Desargues allarga la questione: non è solo un problema linguistico ma anche un problema di immagini: la giusta comprensione del ruolo di un termine all'interno del discorso matematico è importante quanto il saper distinguere tra l'opportunità di *choisir*, in un insieme di figure consuete, quella appropriata al periodo che si sta leggendo e la necessità di *faire* nuove figure seguendo fedelmente l'indicazione dei termini usati nel discorso, liberandole

([16]) «Il ne sera pas malaisé de faire icy la distintion necessaire d'entre les impositions de nom, autrement definitions, les propositions, les démonstrations, quand elles sont en suitte, et les autres especes de discours non plus que de choisir entre les figures celle qui a rapport au periode qu'on lit ou de faire ces figures sur le discours.» (il corsivo è nostro) In [2] pg. 99.

Notiamo che nella versione di Poudra ([1] pg. 103) leggiamo «faire les figures» e non «faire ces figures» come in Taton che conferma l'interpretazione che abbiamo data di questa frase.

in tal modo da fissità funzionali e implicazioni parassite legate a vecchi contesti.

Lo sconcerto di avere qualche volta gli occhi della mente al buio non è l'unico che assale il lettore del *Brouillon*. Gli si chiede di muoversi in un contesto geometrico nel quale le consuete stabilità di forma e di proprietà si rompono e l'indagine si srotola su sentieri nei quali la deformazione per proiezione è sempre presente, imponendo una nuova ricerca di punti stabili e di proprietà invarianti.

L'intuizione deve abbandonare la statica contemplazione di figure euclidee per acquisire un abito dinamico che consiste nel modificare continuamente le forme, nel degenerarle col pensiero, nel portare all'infinito alcune loro parti cercando di intuirne la sorte. Le proiezioni centrali sono, per questo scopo strumento di estrema utilità, permettendo di trasferire proprietà proiettive invarianti da una figura, per la quale sia più facile dimostrarle, a un'altra ottenuta come sua proiezione (ad esempio da un cerchio a una conica) ricavando per questa via nuovi risultati. Questo è quello che giustamente Taton ([17]) descrive come *la prima chiara presenza della prospettiva come metodo di dimostrazione geometrica*, un modo di ragionare, che è stato ripreso con grande successo a partire dal XIX secolo dai maggiori geometri ed è usato ancora ai giorni nostri. Lo stesso Desargues ben cosciente della novità, fornisce, come vedremo meglio, una dimostrazione formalmente ineccepibile del suo celebre *teorema del rameto*, così chiamato con un'espressione felice da D. Bessot, ottenuta considerando una lunga catena di rapporti composti, ma nel contempo ne suggerisce un'altra fortemente intuitiva basata sulla degenerazione di un quadrangolo e delle sue diagonali a un punto!

2. – Il giardino di Desargues.

Leggiamo nella biografia di Desargues che era proprietario di una casa di campagna a Condrieu nella quale andava spesso, e che amava curare personalmente il suo giardino. Non possiamo sapere ovviamente se l'inclinazione per questo ambiente naturale lo abbia

([17]) In [2] pg. 144.

influenzato nella scelta delle parole da usare nella sua opera, ma pensiamo che molte di esse abbiano un carattere metaforico indovinato, che induce ad opportune analogie e a trasferire su una nuova struttura, in via di definizione, caratteristiche e configurazioni appartenenti a strutture conosciute, appositamente scelte.

Fin dall'inizio, nel considerare gli elementi primi della geometria, la retta e il punto, troviamo in Desargues un atteggiamento nuovo ed emblematico ([18]):

Qua ogni linea retta è pensata allungata al bisogno all'infinito da una parte e dall'altra.

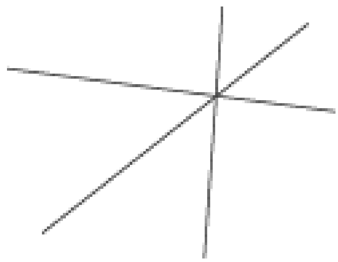
La retta è di fatto *allungata* all'infinito e non potenzialmente *allungabile*. Questo oggetto, con l'invito ad andare col pensiero all'infinito, si presenta fin dall'inizio diverso dalla retta - segmento euclideo e la differenza diventa ancora più chiara subito dopo, quando Desargues introduce i fasci di rette (*ordonnance des lignes droictes*), e chiama *but* ([19]) la «meta», il «punto» che le rette del fascio hanno in comune. Questo termine conferisce a quel particolare «punto» un significato profondo, che lo circonda di possibili movimenti e associazioni di pensiero: questo «punto» diventa meta comune cui le rette tendono, una caratteristica che le lega insieme in un unico destino, una sorta di comune inclinazione verso un «dove» che può essere a distanza finita o a distanza infinita. L'immagine mentale che il termine *but* suggerisce ha la tensione che il termine stesso vuole esprimere:

Immagine 1

([18]) «Icy toute ligne droite est entendue alongée au besoin à l'infiny d'une part & d'autre.» In [2] pg. 99.

([19]) Continueremo ad usare il termine francese «but», che significa traguardo,scopo, meta, punto d'arrivo, bersaglio, perché non abbiamo trovato nella lingua italiana un termine che ne esprimesse lo stesso dinamismo.

ed è ben diversa dall'immagine che avremmo se Desargues avesse dato una definizione formale di fascio di rette, in termini di «punto comune a tutte le rette del fascio». Il termine «punto» infatti richiama il classico bagaglio concettuale geometrico e l'immagine che ne risulta appare molto impoverita:

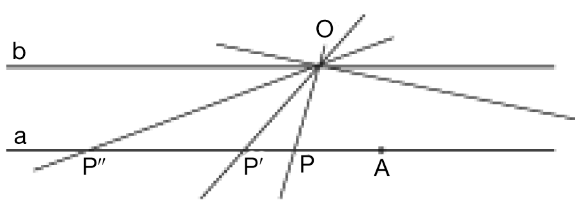


la tensione dell'immagine precedente, che ammetteva anche l'infinito, si è persa. La parola *but* al posto della parola *punto* suggerisce una stessa ontologia nel caso che il *but* sia a distanza finita o infinita, e quel che più conta contiene implicitamente un nuovo fondamentale principio, che diventerà il primo postulato della geometria proiettiva: due rette in uno stesso piano hanno *sempre* un *but* comune ([20]).

Immaginare la retta come un'estensione in atto con un solo punto all'infinito e non come un possibile tendere verso l'infinito, mette in secondo piano il concetto di «verso» esaltando nel contempo quello di «direzione» ([21]). Desargues sceglie dunque di assegnare un solo punto al-

([20]) «Ainci deux quelconques droites en un mesme plan, sont entre elles d'une mesme ordonance, dont le but est à distance ou finie ou infinie.» In [2], pg. 100.

([21]) Leggiamo in Enriques In [6], pp 10-11. «È utile notare come il pensiero matematico sia giunto a considerare come un punto all'infinito la direzione di una retta [...] Sia a una retta ed O un punto fuori di essa: consideriamo una retta OP passante per O e segnante la a in un punto P.



Se facciamo ruotare la retta OP attorno ad O in uno sei due sensi, in guisa d'attendere alla posizione limite della retta b parallela alla a , il punto d'incontro P della nominata retta mol'infinito comune a due rette parallele. La scelta di questo principio è particolarmente felice perché in questo modo la corrispondenza tra i punti di due rette o di due piani proiettivi che si ottiene tramite una proiezione centrale diventa biunivoca. Ci sono anche ragioni di continuità suggerite dalla visione dinamica di Desargues, che spingono la mente ad immaginare la retta con un *but*, una meta all'infinito che unisce tra loro le due estremità opposte della retta.

Passiamo in rassegna alcune delle nuove definizioni che vengono introdotte all'inizio del *Brouillon* nel tentativo, a nostro avviso ben riuscito, di creare nuove immagini mentali capaci di sviluppare una intuizione dinamica protesa verso un altro ambiente geometrico.

Tronc (tronco): si chiama tronco una retta quando per un certo numero dei suoi punti passano altre rette.

Neud (nodo): si chiama nodo ogni punto del tronco per il quale passa una retta.

Rameau (ramo): la retta che passa per un nodo del tronco si chiama ramo

Immagine 2

bile con a assume successive posizioni P′, P″,... che si vanno allontanando indefinitamente da un punto fisso A su a. Questo punto d'intersezione della trasversale mobile per O con a, scompare quando la trasversale acquista la posizione della b parallela ad a, e ricompare poi dall'altra parte avvicinandosi sempre ad A se si continua la rotazione della retta per O nel medesimo senso, oltre la posizione di parallelismo. [...] appare così naturale di riguardare due rette parallele come aventi un (unico) punto comune (improprio) all'infinito».

Rameau déployé au tronc (ramo dispiegato dal tronco): è una retta che interseca il tronco senza coincidere con esso

Rameau plié au tronc (ramo piegato sul tronco): è un qualunque segmento del tronco racchiuso tra due nodi

Brin de rameau (ramoscello): è un qualunque segmento di ramo contenuto tra il suo nodo e un altro ramo.

Seguendo queste indicazioni, si assiste alla costruzione di un mondo matematico al centro del quale sta un tronco. La definizione di tronco è prettamente matematica: si chiama tronco una retta per qualche punto della quale passino altre rette. Ma l'uso della parola non tecnica guida immediatamente la costruzione dell'immagine associata: il tronco diventa la struttura principale, portante, e i suoi rami si intrecciano tra di loro partendo dai nodi su di esso. In questa struttura gli elementi focali della figura sono costituiti dal tronco, dai nodi e dal movimento dei rami rispetto al tronco immobile: il loro piegarsi e dispiegarsi da esso. La natura sempre non finita del ramo poi abitua l'occhio e la mente a non restringere il campo della figura in una forma limitata, ma a tenere sempre presente il suo effettivo estendersi all'infinito, dato dalla possibilità del punto di intersezione di due rette di essere o non essere a distanza finita. Passano completamente in secondo piano, anche se appaiono chiaramente, elementi classici euclidei come i triangoli.

Altro elemento importante è il ramoscello: è una qualunque porzione di ramo che sia compresa tra il suo nodo e l'intersezione con un altro ramo. I segmenti, in questa rappresentazione, hanno dignità solo se hanno almeno un estremo su un nodo del tronco.

Per esempio, nel caso seguente

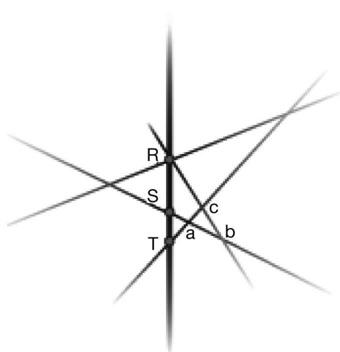


Immagine 3

i segmenti ab, bc, ac, non hanno un nome che li definisca tramite la loro relazione col tronco, come invece accade per i getti Rc, Rb, Sa, Ta, e quindi non hanno neanche dignità di oggetti, e con loro neanche il triangolo abc. L'occhio del matematico, veloce nell'individuare tutte le possibili forme euclidee contenute in una raffigurazione, anche le più nascoste, deve abituarsi a «ragionare» visivamente basandosi principalmente sui nodi, sui rami e sui ramoscelli, con la loro possibilità di chiudersi o di aprirsi sul tronco.

Anche questa volta, come nel caso del calcolo formale di complicati rapporti nella *Perspective* ([22]), Desargues trova un espediente per costruire una gestalt privilegiata, una forma pilota che guiderà dinamicamente gran parte delle dimostrazioni dei teoremi nel suo lavoro sulle coniche, e riteniamo che anche per questo scopo abbia mantenuto nella sua creazione la forza dell'alone metaforico dei suoi termini.

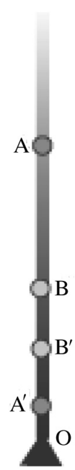


Immagine 4

([22]) Troviamo in una nota a seguito del suo *Méthode Universelle de mettre en perspective les objets donnes réellement ou en devis, avec leurs proportions, mesures, eloignemens, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage* In [1], pp. 401-402, un esempio dell'inventiva di Desargues nell'escogitare mezzi che servissero ad agevolare il pensiero in procedimenti complessi. Egli crea, tra tutte le possibili configurazioni con cui possono essere scritte lunghe catene di rapporti, una forma «pilota» che semplifica e guida il calcolo e il ragionamento, anche nel caso in cui i termini del rapporto siano grandezze infinite.

3. – Alberi, ceppi e involuzioni..

L'immagine del tronco perde la sua genericità e diventa il caso particolare di *albero* quando nel tronco si individua una origine: «il ceppo» e una particolare configurazione di rami e di nodi.

Un *arbre* (albero) è un tronco con *une souche* (un ceppo) O e varie *branches couplées* (getti accoppiati o coniugati) tra loro che nascono dal ceppo e si sovrappongono al tronco.

Se OA e OA′ sono due tali getti accoppiati, si richiede che il prodotto $OA \times OA'$, col segno che gli compete [23], abbia un valore costante non nullo.

La struttura ad albero permette di stabilire una corrispondenza biunivoca (e involutoria) tra i nodi del suo tronco nel senso che al nodo A resta associato in modo unico un nodo A′, a B un nodo B′ ecc. e, viceversa, ad A′ è associato A, a B′ è associato B ecc. Gli accoppiamenti sono fatti in modo tale che l'area del rettangolo che ha per lati due ramificazioni accoppiate non cambi:

$$OA \times OA' = OB \times OB' = \text{costante}$$

Si vede anche come, degenerando A fino all'infinito, il suo corrispondente A′ degenera nel ceppo e in questo caso la relazione degenera nella ardita formula:

$$0 \times \infty = \text{costante}$$

Un albero sarà dunque definito da un tronco, un ceppo e una costante (positiva o negativa) con la quale accoppiare i getti.

Il primo risultato importante di Desargues è quello di rendere la struttura involutoria di tali nodi indipendenti dal ceppo, dandone

[23] Ogni volta che intervengono nel discorso lunghezze di segmenti e rapporti intenderemo fissato un'orientamento e un'unità di misura di modo che con AB si possa denotare la misura, con segno, del segmento il cui primo estremo è A e il secondo B. Nel linguaggio dell'algebra geometrica utilizzato da Desargues, invece, le grandezze sono prese in valore assoluto, il prodotto $OA \times OA'$ viene identificato con l'area del rettangolo che ha per lati OA e OA′ o, più sbrigativamente, col rettangolo tout court. Questo crea una noiosa casistica che rende la sua trattazione più pesante del necessario.

una caratterizzazione intrinseca ([24]):

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{B'A}}{\mathrm{A'B} \times \mathrm{B'A'}} = \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{C'A}}{\mathrm{A'C} \times \mathrm{C'A'}}$$

relazione quest'ultima che non coinvolge il ceppo O ([25]).

([24]) Desargues infatti dimostra subito che

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OA'} = \mathrm{OB} \times \mathrm{OB'} \text{ se e solo se } \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{B'A}}{\mathrm{A'B} \times \mathrm{B'A'}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}}$$

relazione che implica che, date due coppie distinte AA′, BB,′ esiste un unico albero per il quale A e A′, B e B′, sono coppie coniugate. Il ceppo O di tale albero si può ricavare dalla relazione precedente e il coniugato di un qualunque nodo C dell'albero è quell'unico nodo C′ per il quale $OA \times OA' = OC \times OC'$, da cui la relazione (1).

([25]) Riportiamo la dimostrazione di Desargues:

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OA'} = \mathrm{OB} \times \mathrm{OB'} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OA'}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathrm{OA} - \mathrm{OB'}}{\mathrm{OB} - \mathrm{OA'}} = \dfrac{\mathrm{B'A}}{\mathrm{A'B}} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA'}} = \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB'}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA'}} = \dfrac{\mathrm{OB} - \mathrm{OA}}{\mathrm{OA'} - \mathrm{OB'}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B'A'}} \end{cases}$$

moltiplicando risulta

$$\frac{OA}{OB} \times \frac{OB}{OA'} = \frac{B'A}{A'B} \times \frac{AB}{B'A'} \quad \textit{cio}\text{è} \quad \frac{OA}{OA'} = \frac{AB \times B'A}{A'B \times B'A'}.$$

Viceversa supponiamo per assurdo che

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OA'} \neq \mathrm{OB} \times \mathrm{OB'} \quad \text{cioè} \quad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} \neq \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OA'}}$$

e sia F il quarto proporzionale cioé il punto tale che

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA'}}.$$

Per l'ipotesi che abbiamo fatto sarà F diverso da B′ e OAxOA′ = OBxOF. Ragionado come nel caso precedente, sostituendo B′ con F abbiamo:

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{FA}}{\mathrm{A'B} \times \mathrm{FA'}}$$

ma, per ipotesi

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{B'A}}{\mathrm{A'B} \times \mathrm{B'A'}}$$

e quindi

La speciale configurazione data da tre coppie di punti disposte su un tronco in modo da appartenere ad uno stesso albero come coppie coniugate, viene chiamata da Desargues *involuzione* e la relazione precedente, la (1), ne fornisce una caratterizzazione quantitativa. È un concetto questo riposto e molto profondo, invariante per trasformazioni proiettive, strumento centrale nel metodo di Desargues. È ancora l'occhio del pittore che, nello stesso modo in cui proietta le tre dimensioni dello spazio nelle due della sua pittura, proietta ora una configurazione a due dimensioni sull'unica dimensione del tronco. Le involuzioni, in questo modo, si legano ad elementi grafici (formati cioè da configurazioni di rette e punti) che, come tali, sono invarianti per proiezioni centrali. Nasce così la geometria proiettiva.

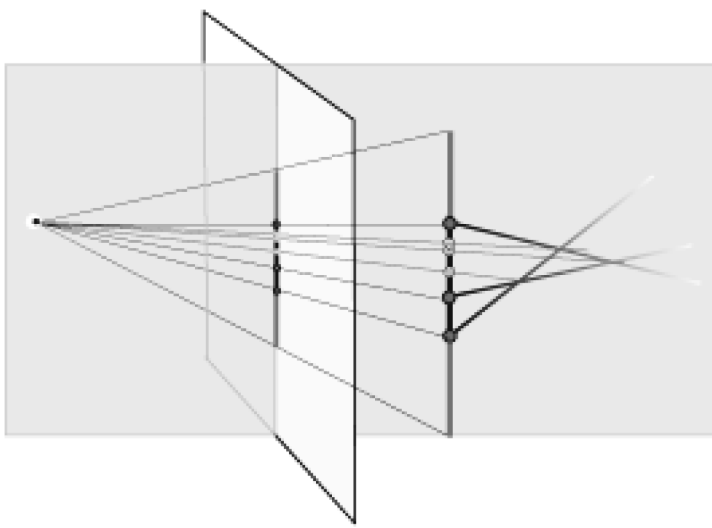


Immagine 5

È possibile raffigurarci le involuzioni nello spirito intuitivo di Desargues? È possibile creare attorno a loro una dinamica in grado

$$\frac{AB \times FA}{A'B' \times FA'} = \frac{AB \times B'A}{A'B \times B'A'} \quad \text{se e solo se} \quad \frac{FA}{FA'} = \frac{B'A}{B'A'}$$

da cui $F = B'$ contrariamente a quanto abbiamo supposto.

di produrre, attraverso il ragionamento, nuovi teoremi geometrici, nuove e più profonde intuizioni? È quanto cercheremo di fare nella seconda parte di questo lavoro lasciandoci condurre nel giardino di Desargues dalle metafore che lui sembra suggerirci.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Poudra, *Oeuvres de Desargues réunies et analysées*, 2 Volumi , Paris, 1864.

[2] R. Taton, *L'oeuvre mathématique de G. Desargues*, Presses Universitaires de France, 1951 (seconda edizione rivista 1981)

[3] J. V. Field - J. J. Gray, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987.

[4] J. P. Le Goff, *Desargues et la naissance de la géométrie projective* in J. Dhombres et J Sakarovitch, *Desargues en son temps*, Libraire scientifique A. Blanchard, 1994.

[5] J. Field, *Linear perspective and the projective geometry of Girard Desargues*, Nuncius An. Storia Sci., 2 (1987), 3-40.

[6] F. Enriques, *Lezioni di geometria proiettiva*, Zanichelli, 1904.

[7] B. Pascal, *Oeuvres complètes*, par J. Chevalier, 1954, Pleiade.

[8] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1865.

[9] Menelao, *Sphaericorum*, Traduzione dall'arabo in latino di Halley, Sumptibus Academicis, 1758.

[10] Ptolemy, *Almagest*, a cura di G. J. Toomer, Duckworth, 1984.

[11] Fibonacci, *Scritti di Leonardo Pisano*, pubblicati da B. Buoncompagni, Roma 1862.

Laura Catastini, Via di Tre Colli 21 - 56011 Calci, Pisa
catastin@mat.uniroma2.it