Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Andrea Brini

Combinatoria e Topologia. Teorema di Quillen e funzioni di Möbius

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.1, p. 143–172.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_1_143_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Aprile 2004, 143-172

Combinatoria e Topologia. Teorema di Quillen e funzioni di Möbius.

A. Brini (*)

Indice

1 Introduzione 143

2 Connessioni di Galois e Criterio di omotopia di Quillen 147
2.1 Connessioni ed Emiconnessioni di Galois 147
2.2 Il Teorema di Quillen 150
2.3 Il Teorema di Quillen per gli ideali di relazione 156

3 Funzioni di Möbius e Caratteristica di Eulero 158
3.1 La funzione di Möbius 158
3.2 Il Principio di Inversione 159
3.3 Il Teorema del Cross-Cut 163
3.4 Complementazione e contraibilità 168

1. – Introduzione.

Il testo che segue presenta alcuni approfondimenti ed applicazioni delle idee brevemente descritte nel lavoro «*Combinatoria e Topologia. Alcune considerazioni generali*», apparso in un precedente numero di questa rivista.

Scopo e spunto di questo secondo lavoro è il tentativo di convincere il Lettore che l'evoluzione della Matematica non segue in generale uno sviluppo «lineare», bensì «circolare», essendo spesso frutto di «pentimenti», riformulazioni e, nei casi più significativi, di autentici *riposizionamenti* dei vari settori di ricerca l'uno rispetto all'altro.

Esemplare è, da questo punto di vista, la vicenda originata dal «Teorema del Cross-Cut», che costituisce l'implicito *fil rouge* della presente esposizione.

(*) Dedicato a Adriano Barlotti.

Nel 1964, anno di pubblicazione del fondazionale lavoro di Rota ([15]) «*On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions*» (A.M.S. Steele Prize, 1988), l'idea di associare spazi topologici ad insiemi parzialmente ordinati finiti era già piuttosto nota e diffusa, sebbene considerata poco più che un interessante e curioso «accidente». A commento della prima versione del risultato qui riportato col nome di «Teorema del Cross-Cut Combinatorio» (Thm. 7), Rota osservò che questo teorema poteva essere anche espresso come una identità tra la *Caratteristica di Eulero* del complesso simpliciale astratto delle catene del *reticolo* in esame e la *Caratteristica di Eulero* di certi complessi simpliciali astratti (detti dei *non-generatori*) associati a particolari sottoinsiemi, detti *Cross-Cuts*; un invariante combinatorio, la valutazione della funzione di Möbius tra il minimo ed il massimo di un reticolo finito $\mathfrak{L}$, risulta perciò *eguale* ad un invariante topologico, la caratteristica di Eulero ridotta del poliedro «realizzazione geometrica» del complesso dei non-generatori di un *qualsiasi* cross-cut C del reticolo $\mathfrak{L}$. A conclusione del commento, Rota congetturò che questa eguaglianza tra caratteristiche di Eulero potesse essere riformulata in forma più forte, asserendo che i complessi simpliciali in questione avessero *sequenze di omologia isomorfe.* Questa congettura fu dimostrata, utilizzando tecniche non banali di algebra omologica, da Folkman [9] e Mather [11] nel 1966. A questo punto, perchè non congetturare che questa *equivalenza omologica* non sia, in ultima analisi, manifestazione di una *equivalenza omotopica*? Nel 1971, Lakser ottenne una risposta affermativa, tramite una dimostrazione tecnicamente alquanto laboriosa [10]. In conclusione, un teorema *combinatorio* era stato trasformato in un teorema *topologico*, qui riportato col nome di «Teorema del Cross-Cut Omotopico» (Thm.6). La vicenda matematica fin qui descritta sembra seguire linee consuete: si parte da un risultato importante e si procede a svilupparne progressive generalizzazioni e forme «più forti».

Tuttavia, la storia non si arresta a questo punto. All'inizio degli anni '80, alcuni Studiosi notarono una stimolante analogia tra un profondo risultato [16, 17] dimostrato da Quillen (Fields Medal, 1978) in un ambito matematico assai diverso (*K-teoria*) ed un risul-

tato di caratterizzazione (dovuto essenzialmente ad O. Ore, [14]) per le cosiddette *connessioni di Galois*, che sono un tema classico e centrale della algebra e della combinatoria degli insiemi parzialmente ordinati.

Raggiunta consapevolezza di questa analogia, sorse spontaneo cercare di fondare la Teoria delle funzioni di Möbius (oramai riconosciute come invarianti interpretabili topologicamente) sul Teorema di Quillen; questo programma fu realizzato in breve tempo, dimostrando che tutti i principali teoremi sulle funzioni di Möbius possono essere estesi a risultati sul *tipo di omotopia* di certi poliedri associati agli insiemi parzialmente ordinati; di più, le nuove dimostrazioni ottenute per questa via risultano assai più semplici e trasparenti delle dimostrazioni iniziali ottenute per via algebrico/combinatoria.

A questo punto, una obiezione legittima potrebbe essere posta dal Lettore: si è semplificata ed unificata la teoria delle funzioni di Möbius «pagando però il prezzo» di utilizzare un teorema assai complesso quale il Teorema di Quillen (in effetti, la dimostrazione originale di questo risultato è tuttaltro che accessibile); invece, a conferma della «circolarità» del pensiero Matematico, del teorema di Quillen fu a sua volta ottenuta una dimostrazione sorprendentemente semplice (Walker,1981 [19]), basata su un lemma elementare (anche se non banale) di topologia algebrica, il cosiddetto «Lemma del supporto contraibile». La «circolarità» del pensiero matematico ci ha riportato quindi ad una situazione «lineare» e concettualmente limpida: Lemma del supporto contraibile, Teorema di Quillen, teoria topologica delle funzioni di Möbius, teoria combinatoria delle funzioni di Möbius.

In conclusione, ancora due brevi osservazioni:

i) il Teorema di Quillen è un teorema «ibrido», che vive tra Topologia e Combinatoria. Le sue ipotesi sono una di carattere combinatorio (l'esistenza di una funzione monotona tra insiemi parzialmente ordinati) ed una di carattere topologico (la contraibilità delle realizzazioni geometriche delle fibre di filtri principali), mentre la tesi è squisitamente topologica (l'equivalenza omotopica delle realizzazioni geometriche degli insiemi parzialmente ordinati). Tuttavia, l'ipotesi topologica (la contraibilità delle fibre) è molto semplice e, di con-

seguenza, spesso verificabile con argomentazioni ancora di carattere combinatorio. Perciò, utilizzando il Teorema di Quillen, si manifesta ai nostri occhi una ulteriore interazione tra Topologia e Combinatoria: in certi casi, possiamo dimostrare risultati topologici ricorrendo a semplici argomenti di natura combinatoria. Si ripresenta così il fenomeno della circolarità del pensiero matematico; il Lettore familiare con il primo lavoro non potrà non notare la suggestiva analogia filosofico/metodologica tra questa interpretazione del Criterio di omotopia di Quillen e la teoria dei *tipi di omotopia semplice* di Whitehead.

ii) forse discostandoci un poco dalla consuetudine, tutti i risultati principali vengono proposti con dimostrazione. La ragione di questa scelta sta nella ispirazione essenzialmente metodologica di questo secondo articolo; pensiamo che solo analizzando queste semplici dimostrazioni (ed, eventualmente, confrontandole con le dimostrazioni originali) sia possibile apprezzare pienamente la efficacia e la profondità del metodo topologico in Combinatoria.

Il lavoro è organizzato come segue.

Nella sezione 2 si introduce la fondamentale nozione combinatoria di *connessione di Galois* tra insiemi parzialmente ordinati e se ne descrivono i principali risultati di caratterizzazione; questi risultati aprono la strada alla comprensione del profondo legame che sussiste tra la nozione connessione di Galois ed il *Criterio di Omotopia* di Quillen, del quale viene qui proposta la dimostrazione elementare di Walker [19]. Questa dimostrazione è particolarmente interessante non solo per la sua eleganza e semplicità, ma anche perchè rende trasparente il fatto che le «funzioni di Quillen» sono una naturale estensione topologica della nozione combinatoria di connessione di Galois.

Nella sezione 3 si introduce la nozione di *funzione di Möbius* di un reticolo finito $\mathcal{L}$ e se ne discute brevemente, anche tramite un esempio significativo, la cruciale importanza nell'ambito della Combinatoria Enumerativa e della Probabilità Discreta; in particolare, si richiama il «Principio di inversione di Möbius» e si sottolinea come detto principio costituisca una fondamentale generalizzazione a reticoli *qualsiasi* del classico «Principio di inclusione/esclusione» (o,

metodo del crivello) per i reticoli dei sottoinsiemi di un insieme (algebre di Boole finite).
Dopodichè, a titolo di esempio e di applicazione di metodi topologici alla combinatoria degli insiemi parzialmente ordinati, si presentano e si dimostrano, in modo assolutamente elementare, le versioni *topologiche* di due classici Teoremi: il «Teorema del Cross-Cut» ed il «Teorema di annullamento per reticoli non fortemente complementati».

2. – Connessioni di Galois e Criterio di omotopia di Quillen.

2.1. *Connessioni ed Emiconnessioni di Galois.*

Siano P e Q posets, e siano

$$f : P \to Q \text{ e } g : Q \to P$$

una coppia di funzioni monotone.

La coppia (f, g) si dice *connessione di Galois* tra P e Q se e solo se è verificata la seguente condizione:

$$f(p) \geq q \Leftrightarrow g(q) \leq p, \quad \text{per ogni coppia ordinata } (p, q) \in P \times Q .$$

PROPOSIZIONE 1. – *Siano $f : P \to Q$ e $g : Q \to P$ funzioni monotone. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) (f, g) *è una connessione di Galois;*

ii) $(g \circ f)(p) \leq p$ *per ogni* $p \in P$ *e* $(f \circ g)(q) \geq q$ *per ogni* $q \in Q$.

Rispetto alla connessione di Galois (f, g), l'applicazione f è detta *aggiunta superiore* e l'applicazione g è detta *aggiunta inferiore* (mutuando la terminologia dalla «Teoria delle Categorie»).

Dal punto di vista topologico, le connessioni di Galois hanno un profondo significato, facilmente riconoscibile.

Infatti, sia (f, g) una connessione di Galois $f : P \to Q$ e $g : Q \to P$. Considerando le realizzazioni geometriche

$$|f| : |P| \to |Q| \text{ e } |g| : |Q| \to |P| ,$$

abbiamo che:

i) $|g| \circ |f| \simeq 1_{|P|}$;

ii) $|f| \circ |g| \simeq 1_{|Q|}$.

Perciò la coppia di funzioni continue $(|f|, |g|)$ induce una *equivalenza omotopica* tra i poliedri $|P|$ e $|Q|$, cioè $(|f|, |g|)$ è *coppia di omotopia* tra $|P|$ e $|Q|$.

ESEMPIO 1. – *Una classe prototipica di connessioni di Galois, assai elementare e naturale, può essere costruita come segue. Siano S e T due insiemi finiti, e siano $(P(S), \subseteq)$ e $(P(T), \subseteq)$ i loro insiemi delle parti, ordinati per inclusione; sia $h : S \to T$ una funzione qualsiasi.*

Consideriamo la «funzione immagine» associata ad h:

$$h_* : P(S) \to P(T), \quad h_*[A] = \{h(s);\, s \in A\}, \quad \textit{per ogni } A \subseteq S,$$

e la «funzione preimmagine» associata ad h:

$$h^* : P(T) \to P(S), \quad h^*[B] = \{s \in S;\, h(s) \in B\}, \quad \textit{per ogni } B \subseteq T.$$

La coppia (h_*, h^*) forma una connessione di Galois tra $P(S)$ e $P(T)$, essendo h_* l'aggiunta inferiore e h^* l'aggiunta superiore.

Le connessioni di Galois ammettono importanti caratterizzazioni combinatorie, il cui significato topologico sarà ulteriormente chiarito dal «Criterio di omotopia di Quillen».

PROPOSIZIONE 2. – *Sia (f, g) una connessione di Galois, $f : P \to Q$ l'aggiunta superiore, $g : Q \to P$ l'aggiunta inferiore. Allora:*

i) $g^{-1}[P_{\leqslant p}] = Q_{\leqslant f(p)}$, cioè la fibra $g^{-1}[P_{\leqslant p}]$ è l'ideale principale di Q generato da $f(p)$, per ogni $p \in P$. Inoltre, $f(p) = \max(g^{-1}[P_{\leqslant p}])$, per ogni $p \in P$;

ii) $f^{-1}[Q_{\geqslant q}] = P_{\geqslant g(q)}$, cioè la fibra $f^{-1}[Q_{\geqslant q}]$ è il filtro principale di P generato da $g(q)$, per ogni $q \in Q$. Inoltre, $g(q) = \min(f^{-1}[Q_{\geqslant q}])$, per ogni $q \in Q$.

COROLLARIO 1. – *Sia (f, g) una connessione di Galois. Allora f determina univocamente g e viceversa.*

PROPOSIZIONE 3. – (*Emiconnessioni di Galois*)

i) *Sia* $f : P \to Q$ *una applicazione monotona tale che* $f^{-1}[Q_{\geqslant q}]$ *abbia minimo in* P *(cioè, sia filtro principale), per ogni* $q \in Q$. *Allora, ponendo*

$$g : Q \to P, \quad g(q) = \min (f^{-1}[Q_{\geqslant q}]), \ \ q \in Q ,$$

la coppia (f, g) *è una connessione di Galois.*

ii) *Sia* $g : Q \to P$ *una applicazione monotona tale che* $g^{-1}[P_{\leqslant p}]$ *abbia massimo in* Q *(cioè, sia ideale principale), per ogni* $p \in P$. *Allora, ponendo*

$$f : P \to Q, \quad f(p) = \max (g^{-1}[P_{\leqslant p}]), \ \ p \in P ,$$

la coppia (f, g) *è una connessione di Galois.*

In sintesi, per stabilire una connessione di Galois tra P e Q è sufficiente definire *solo una applicazione monotona.*

Precisamente:

A) *una applicazione monotona* $f : P \to Q$ *tale che la fibra di ogni filtro principale sia un filtro principale* (*f è l'aggiunta superiore*),

ovvero

B) *una applicazione monotona* $g : Q \to P$ *tale che la fibra di ogni ideale principale sia un ideale principale* (*g è l'aggiunta inferiore*).

Le applicazioni f e g (soddisfacenti A) o B), rispettivamente) sono dette *emiconnessioni di Galois superiore ed inferiore.*

Ricordiamo che, dal punto di vista topologico, il dato essenziale di una connessione di Galois (f, g) tra i poset P e Q è che la coppia delle realizzazioni geometriche $(|f|, |g|)$ induce una *equivalenza omotopica* tra le realizzazioni geometriche $|P|$ e $|Q|$. Abbiamo appena sottolineato che le connessioni di Galois possono essere caratterizzate da una sola funzione monotona avente la proprietà

I) la fibra di ogni filtro principale risulta un filtro principale, ovvero

II) la fibra di ogni ideale principale risulta un ideale principale.

2.2. *Il Teorema di Quillen.*

Il Criterio di omotopia di Quillen, emerso in un contesto matematico molto diverso (K-Teoria), è interpretabile, nell'ambito della teoria topologica dei poset, come una cruciale generalizzazione della nozione di *emiconnessione di Galois*; specificamente, il Criterio di Quillen ci conduce a comprendere che, affinchè una funzione monotona $f : P \to Q$ induca una *equivalenza omotopica* tra le realizzazioni geometriche $|P|$ e $|Q|$, è sufficiente che le fibre di filtri principali (di ideali principali) abbiano *realizzazione geometrica contraibile.* Il dato essenziale da apprezzare è che, mentre nel caso delle connessioni di Galois, la coppia di omotopia è della forma $(|f|, |g|)$, con $f : P \to Q$ e $g : Q \to P$, con f, g funzioni monotone, il criterio di Quillen afferma solo che, sotto condizioni «più deboli», la realizzazione geometrica $|f| : |P| \to |Q|$ ammette una funzione continua $G : |Q| \to |P|$ tale che la coppia $(|f|, G)$ sia coppia di omotopia tra $|P|$ e $|Q|$; il fatto fondamentale è che, in generale, la funzione continua G non è *unica*, nè tantomeno *interpretabile come realizzazione geometrica di una funzione monotona* $g : Q \to P$, ovvero come *mappa simpliciale* da $|Q|$ a $|P|$.

TEOREMA 1. – (*Quillen 1973* [16], *1978* [17])
Sia $f : P \to Q$ *una applicazione monotona tale che la realizzazione geometrica*

$$|f^{-1}[Q_{\leqslant q}]|$$

della fibra dell'ideale principale $Q_{\leqslant q}$ *risulti uno spazio contraibile, per ogni* $q \in Q$. *Allora esiste una funzione continua*

$$G : |Q| \to |P|$$

tale che $(|f|, G)$ *sia una coppia di omotopia tra* $|P|$ *e* $|Q|$.
Perciò, i poliedri $|P|$ *e* $|Q|$ *sono omotopicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE (Walker, 1981 [19]). – Sia $f : P \to Q$ una applicazione monotona tale che la realizzazione geometrica $|f^{-1}[Q_{\leqslant q}]|$ risulti uno spazio contraibile, per ogni $q \in Q$.

La funzione

$$C : \Delta(Q) \to |P|$$

$$C : \sigma \mapsto |f^{-1}[Q_{\leqslant \max \sigma}]|$$

è un supporto contraibile. Di conseguenza, in virtù del Lemma del supporto contraibile, esiste una funzione continua

$$G : |Q| \to |P|$$

avente supporto supporto C, cioè tale che

$$G(|\sigma|) \subseteq |f^{-1}[Q_{\leqslant \max \sigma}]| .$$

Mostreremo ora che la funzione G dà luogo, con $|f|$, ad una coppia di omotopia tra $|P|$ e $|Q|$.

Sia σ una catena in Q; allora

$$(|f| \circ G)[|\sigma|] \subseteq |f|[|f^{-1}[Q_{\leqslant \max \sigma}]|] \subseteq |f[f^{-1}[Q_{\leqslant \max \sigma}]]| \subseteq |Q_{\leqslant \max \sigma}| .$$

D'altra parte, poichè $|\sigma| \subseteq |Q_{\leqslant \max \sigma}|$, segue che il supporto contraibile

$$C_1 : \Delta(Q) \to |Q|$$

$$C_1 : \sigma \to |Q_{\leqslant \max \sigma}|$$

è supporto sia della funzione continua $|f| \circ G$ che della funzione identità $1_{|Q|}$ su $|Q|$; quindi, $|f| \circ G$ e $1_{|Q|}$ sono funzioni continue omotope da $|Q|$ a $|Q|$. (Ancora, in virtù del Lemma del supporto contraibile).

Viceversa, se δ è una catena in $\Delta(P)$, allora $f[\delta]$ è un simplesso in $\Delta(Q)$; perciò

$$(G \circ |f|)[|\delta|] = G[|f[\delta]|] \subseteq C(f[\delta]) = |f^{-1}[Q_{\leqslant \max f[\delta]}]| .$$

D'altra parte, $|\delta| \subseteq |f^{-1}[Q_{\leqslant \max f[\delta]}]|$; perciò il supporto contraibile

$$C_2 : \Delta(P) \to |P| ,$$

$$\delta \to |f^{-1}[Q_{\leqslant \max f[\delta]}]|$$

è supporto sia della funzione continua $G \circ |f|$ che della funzione identità $1_{|P|}$; quindi $G \circ |f|$ e la funzione identità $1_{|P|}$ sono funzioni continue omotope da $|P|$ a $|P|$.

Una funzione monotona $f : P \to Q$ tale che $|f^{-1}[Q_{\leqslant q}]|$ ($|f^{-1}[Q_{\geqslant q}]|$) risulti contraibile per ogni $q \in Q$, si dice *funzione di Quillen inferiore (superiore)*.

OSSERVAZIONE 1. – *Vediamo ora come la dimostrazione di Walker si specializzi nel caso in cui la funzione di Quillen inferiore $f : P \to Q$ sia una emiconnessione di Galois inferiore.*

Sia quindi $f : P \to Q$ una emiconnessione di Galois inferiore e sia $g : Q \to P$ la sua aggiunta superiore, che ricordiamo essere univocamente determinata dalla condizione

$$g(q) = \max f^{-1}[Q_{\leqslant q}], \quad \textit{per ogni } q \in Q .$$

Si osservi che, data una catena σ in Q, poichè $\max f^{-1}[Q_{\leqslant \max \sigma}] = g(\max \sigma)$, allora $f^{-1}[Q_{\leqslant \max \sigma}] = P_{\leqslant g(\max \sigma)}$.

Perciò

$$g[\sigma] \subseteq P_{\leqslant g(\max \sigma)} = f^{-1}[Q_{\leqslant \max \sigma}]$$

e, quindi, la realizzazione geometrica $|g| : |Q| \to |P|$ è tale che

$$|g|[\,|\sigma|\,] \subseteq |P_{\leqslant g(\max \sigma)}|\,,$$

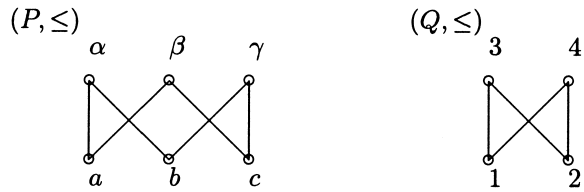
per ogni catena σ in Q.

Ne consegue che $|g|$ ha supporto C, ove C è il supporto contraibile definito all'inizio della dimostrazione di Walker.

In conclusione, la funzione continua $G : |Q| \to |P|$ menzionata nella dimostrazione di Walker può essere rappresentata dalla realizzazione geometrica dalla funzione monotona $g : Q \to P$, l'aggiunta superiore della emiconnessione di Galois $f : P \to Q$.

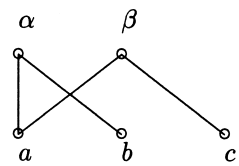
OSSERVAZIONE 2. – *In generale, una funzione di Quillen non è una emiconnessione di Galois. Consideriamo, ad esempio, la ap-*

plicazione monotona $f : P \to Q$ *dal poset* P *al poset* Q *rappresentati dai seguenti diagrammi di Hasse:*



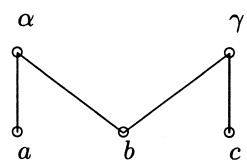
e definita dalle condizioni: $f(a) = f(b) = f(\alpha) = 1$, $f(c) = 2$, $f(\beta) = 3$. $f(\gamma) = 4$.

La fibra $f^{-1}[Q_{\leqslant 3}]$ *è rappresentata dal diagramma di Hasse:*



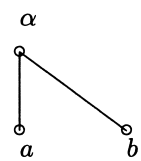
ed è perciò conicamente contraibile.

La fibra $f^{-1}[Q_{\leqslant 4}]$ *è rappresentata dal diagramma di Hasse:*



ed è perciò conicamente contraibile.

La fibra $f^{-1}[Q_{\leqslant 1}]$ *è rappresentata dal diagramma di Hasse:*

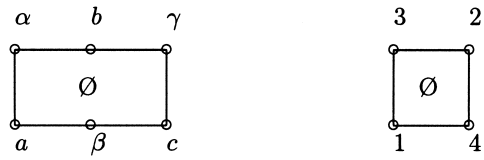


ed è perciò un ideale principale (e, come tale, conicamente contraibile).

La fibra $f^{-1}[Q_{\leqslant 2}]$ *si riduce al singoletto* $\{c\}$.

Poichè le realizzazioni geometriche di queste fibre sono tutte contraibili, la funzione f è una funzione di Quillen inferiore e quindi induce una equivalenza omotopica tra le realizzazioni geometriche $|P|$ *e* $|Q|$. *Tuttavia, f non è nè una emiconnessione di Galois inferiore nè una emiconnessione di Galois superiore, in quanto nè le fibre di ideali principali sono in generale ideali principali nè le fibre di filtri principali sono in generale filtri principali.*

Dal punto di vista geometrico, notiamo infine che i poliedri $|P|$ *e* $|Q|$ *sono rappresentabili, in* R^2, *come 1-sfere:*



ESEMPIO 2. – (*Suddivisioni baricentriche di ordine superiore*) *Sia P un poset, e sia* $\overline{\Delta(P)}$ *il suo complesso di catene riguardato come poset* (*in termini espliciti, i punti di* $\overline{\Delta(P)}$ *sono le catene di P e l'ordine è dato dall'inclusione insiemistica*). *Consideriamo la funzione*

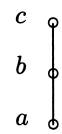
$$f : \overline{\Delta(P)} \to P$$

così definita: per ogni $\sigma \in \overline{\Delta(P)}$, $f(\sigma) = \max \sigma$.

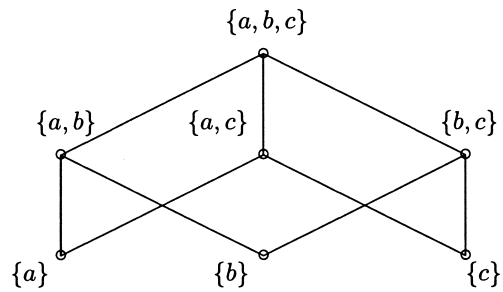
Chiaramente, f è una funzione monotona e, di più, risulta una funzione di Quillen inferiore. Infatti, per ogni $p \in P$, *la fibra* $f^{-1}[P_{\leqslant p}]$ *è un subposet di* $\overline{\Delta(P)}$ *conicamente contraibile sull'elemento* $\{p\}$ *e quindi la sua realizzazione geometrica* $|f^{-1}[P_{\leqslant p}]|$ *è contraibile. Perciò* $|P|$ *e* $|\overline{\Delta(P)}|$ *sono omotopicamente equivalenti.*

(*Di fatto, poichè l'operazione testè descritta è una versione sui poset della suddivisione baricentrica,* $|P|$ *e* $|\overline{\Delta(P)}|$ *sono addirittura omeomorfi.*)

Passando ad un esempio concreto, consideriamo il poset P:



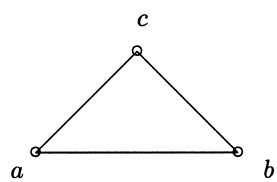
ed il poset $\overline{\Delta(P)}$:



Notiamo che $f^{-1}[P_{\leqslant a}] = \{a\}$, $f^{-1}[P_{\leqslant b}] = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ *e* $f^{-1}[P_{\leqslant c}] = \overline{\Delta(P)}$ *e, quindi, le fibre di ideali principali sono ideali principali.*

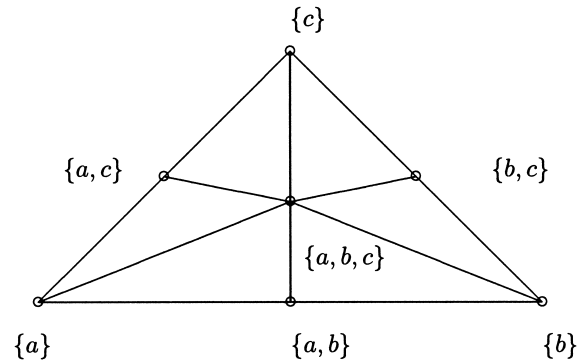
Perciò, in questo caso, la funzione $f : \overline{\Delta(P)} \to P$ *è addirittura una emiconnessione di Galois inferiore (e, quindi, una funzione di Quillen inferiore). La aggiunta superiore* $g : P \to \overline{\Delta(P)}$ *è la funzione monotona tale che* $g(a) = \{a\}$, $g(b) = \{a, b\}$, $g(c) = \{a, b, c\}$.

Dal punto di vista topologico, la realizzazione geometrica $|P|$ *di* P *può essere riguardata come il seguente* 2*-simplesso (in* R^2):



mentre la realizzazione geometrica $|\overline{\Delta(P)}|$ *di* $\overline{\Delta(P)}$ *può essere ri-*

guardata come il seguente poliedro (*in* R^2):



Notiamo infine che il secondo poliedro rappresenta effettivamente la suddivisione baricentrica del precedente.

Il Lettore è invitato a verificare che, escludendo il caso ovvio delle relazioni d'ordine banali (tutti gli elementi sono a due a due inconfrontabili), la «funzione di Quillen» $f : \overline{\Delta(P)} \to P$ *è una «emiconnessione di Galois» se e solo se* P *è una catena.*

2.3. *Il Teorema di Quillen per gli ideali di relazione.*

In questa sottosezione, discuteremo una variante del Criterio di omotopia di Quillen che si rivelerà essere assai utile nelle applicazioni combinatorie.

Siano P e Q posets e si consideri il loro *prodotto diretto*, vale a dire il prodotto cartesiano $P \times Q$, con l'ordine indotto nel modo ovvio.

Una sottoinsieme $Z \subseteq P \times Q$ si dice un *ideale di relazione* se e solo se Z è un ideale d'ordine di $P \times Q$, cioè:

$$\textit{se } p' \leqslant p \in P, \quad q' \leqslant q \in Q, \quad \textit{e } (p, q) \in Z, \quad \textit{allora } (p', q') \in Z .$$

Le mappe di proiezione $\pi_P : Z \to P$ e $\pi_Q : Z \to Q$ così definite:

$$\pi_P(p, q) = p \in P, \ (p, q) \in Z, \qquad \pi_Q(p, q) = q \in Q, \ (p, q) \in Z ,$$

sono *funzioni monotone* $\pi_P : Z \to P$ e $\pi_Q : Z \to Q$.

Di conseguenza la fibra (mediante π_P e π_Q) di ogni ideale è un ideale, e la fibra di ogni filtro è un filtro.

Sia $\underline{p} \in P$. Consideriamo i sottoinsiemi $Z_{\underline{p}} = \{q \in Q; (\underline{p}, q) \in Z\} \subseteq Q$, e $\pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}] = \{(p, q) \in Z; \pi_P((p, q)) = p \geqslant \underline{p}\} \subseteq Z$; si noti che $Z_{\underline{p}}$ è un ideale di Q e che $\pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}]$ è un filtro di Z.

TEOREMA 2. – *La coppia di applicazioni*

$$u_{\underline{p}}: Z_{\underline{p}} \to \pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}], \quad q \mapsto (\underline{p}, q)$$

e

$$v_{\underline{p}}: \pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}] \to Z_{\underline{p}}, \quad (p, q) \mapsto q$$

è una connessione di Galois tra $Z_{\underline{p}}$ *e* $\pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}]$.

DIMOSTRAZIONE. – La applicazione $u_{\underline{p}}$ è chiaramente ben definita.

Al fine di verificare che anche $v_{\underline{p}}$ è ben definita, notiamo che: $(p, q) \in \pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}] \Rightarrow (p, q) \in Z, \ p \geqslant \underline{p}$. Ma $(\underline{p}, q) \leqslant (p, q) \in Z \Rightarrow (\underline{p}, q) \in Z \Rightarrow q = v_{\underline{p}}((p, q)) \in Z_{\underline{p}}$.

Proviamo ora che la coppia $(v_{\underline{p}}, u_{\underline{p}})$ è una connessione di Galois tra $\pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}]$ e $Z_{\underline{p}}$.

La condizione

$$(p, q) \in \pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}], \quad v_{\underline{p}}((p, q)) = q \geqslant q' \in Z_{\underline{p}}$$

è equivalente alla condizione

$$(p, q) \in Z, \ p \geqslant \underline{p}, \ q \geqslant q' \in Z_{\underline{p}},$$

che è ancora equivalente alla condizione

$$q' \in Z_{\underline{p}}, \quad u_{\underline{p}}(q') = (\underline{p}, q') \leqslant (p, q) \in \pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}].$$

Perciò, abbiamo provato:

$$v_{\underline{p}}((p, q)) \geqslant q' \Leftrightarrow u_{\underline{p}}(q') \leqslant (p, q),$$

per ogni $(p, q) \in \pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}]$, $q' \in Z_{\underline{p}}$.

Di conseguenza, la coppia $(v_{\underline{p}}, u_{\underline{p}})$ è una connessione di Galois tra $\pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}]$ e $Z_{\underline{p}}$.

COROLLARIO 2. – *Per ogni* $\underline{p} \in P$, *i poliedri* $|Z_{\underline{p}}|$ *e* $|\pi_P^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}]|$ *sono omotopicamente equivalenti.*

Nello stesso modo si può provare:

PROPOSIZIONE 4. – *Per ogni* $\underline{q} \in Q$, *i poliedri* $|Z_{\underline{q}}|$ *e* $|\pi_{\bar{Q}}^{-1}[Q_{\geqslant \underline{q}}]|$ *sono omotopicamente equivalenti.*

TEOREMA 3. – (*Quillen* [16, 17], *Bjorner* [4, 5])
Sia $Z \subseteq P \times Q$ *un ideale di relazione tale che, per ogni* $\underline{p} \in P$ *e per ogni* $\underline{q} \in Q$, *le realizzazioni geometriche* $|Z_{\underline{p}}|$ *e* $|Z_{\underline{q}}|$ *risultino contraibili. Allora i poliedri* $|P|$ *e* $|Q|$ *sono omotopicamente equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. – Poichè le realizzazioni geometriche

$$|Z_{\underline{p}}| \simeq |\pi_{\bar{P}}^{-1}[P_{\geqslant \underline{p}}]|$$

e

$$|Z_{\underline{q}}| \simeq |\pi_{\bar{Q}}^{-1}[Q_{\geqslant \underline{q}}]|$$

sono contraibili per ogni $\underline{p} \in P$ e per ogni $\underline{q} \in Q$, le proiezioni $\pi_P : Z \to P$ e $\pi_Q : Z \to Q$ sono entrambe mappe di Quillen (superiori).

Perciò, dal Teorema di Quillen, segue che:

$$|Z| \simeq |P| \quad \text{e} \quad |Z| \simeq |Q|,$$

da cui $|P|$ e $|Q|$ sono omotopicamente equivalenti.

3. – Funzioni di Möbius e caratteristica di Eulero.

3.1. *La funzione di Möbius.*

Sia $(\mathcal{L}, \leqslant, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un *reticolo finito*, vale a dire un poset finito tale che, per ogni coppia $x, y \in \mathcal{L}$, esistano sia l'estremo superiore $x \vee y$ che l'estremo inferiore $x \wedge y$; ogni reticolo *finito* ammette massimo **1** e minimo **0**.

La *funzione di Möbius* del reticolo $\mathcal{L}$ è la funzione

$$\mu : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to Z$$

unicamente definita dalle seguenti condizioni:

i) $\mu(x, y) = 0$ se $x \not\leqslant y$;

ii) $\mu(x, x) = 1$, per ogni $x \in \mathcal{L}$;

iii) $\mu(x, y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x, z) = -\sum_{x < z \leqslant y} \mu(z, y)$, se $x < y$.

Le relazioni

$$\mu(x, y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \mu(x, z) \quad \text{e} \quad \mu(x, y) = -\sum_{x < z \leqslant y} \mu(z, y), \ (x < y)$$

sono dette *ricursione inferiore* e *ricursione superiore*, rispettivamente.

Nel seguito, dati $x \leqslant y$, $x, y \in \mathcal{L}$, indicheremo con $]x, y[$ l'intervallo *aperto*:

$$]x, y[= \{z \in \mathcal{L};\ x < z < y\}.$$

Chiaramente, $]x, y[$ è un sottoposet del poset $\mathcal{L}$.

3.2. *Il Principio di Inversione.*

L'origine e l'importanza della nozione di funzione di Möbius di un reticolo è principalmente attribuibile al seguente «Principio di inversione»: questo principio fornisce un potente strumento per la soluzione di svariati problemi di combinatoria enumerativa/probabilità discreta e costituisce una profonda generalizzazione a reticoli arbitrari del cosiddetto «Principio di inclusione/esclusione insiemistico» (o, metodo del crivello).

La dimostrazione del seguente fondamentale risultato è comunque di carattere elementare.

TEOREMA 4. – (*Principio di inversione di Möbius*)
Sia $\mathcal{L}$ *un reticolo e siano* $F, G: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che:*

i) $F(x) = \sum_{y \geqslant x} G(y)$, *per ogni* $x \in \mathcal{L}$.

Allora risulta:

ii) $G(x) = \sum_{y \geqslant x} \mu(x, y)\, F(y)$, *per ogni* $x \in \mathcal{L}$.

OSSERVAZIONE 3. – *In generale, la stima dei valori* $\mu(x, y)$ *della funzione di Möbius di un reticolo risulta un problema assai complesso: l'utilizzo delle relazioni di recursione porta ovviamente ad algoritmi «esplosivi» dal punto di vista della complessità computazionale ed è, inoltre, assai «povero» dal punto di vista concettuale, in quanto fornisce informazioni generiche ed occasionali sulla struttura della classe dei reticoli in esame. Proprio per ovviare a questo problema è stata elaborata la cosiddetta «Teoria delle Funzioni di Möbius»* (*cfr., ad es.* [2]), *che consiste appunto nella scoperta e dimostrazione di una serie di profondi Teoremi atti a fornire metodologie efficaci per la determinazione di «forme chiuse» per la funzione di Möbius.*

Tuttavia, vi sono alcune situazioni significative nell'ambito delle quali i valori della funzione di Möbius possono essere determinati in modo totalmente elementare.

Ad esempio, sia $\mathcal{L} = (P(S), \subseteq, \cap, \cup)$ *il reticolo dei sottoinsiemi di un insieme finito* S, *ordinato per inclusione* (*Algebra di Boole su* S). *Dalle identità di recursione e dalla banale identità binomiale*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0,n},$$

ove $\delta_{0,n}$ *denota come d'uso la delta di Kronecker per* $(0, n)$, *si deduce immediatamente la seguente forma chiusa per la funzione di Möbius:*

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B| - |A|},$$

per ogni $A, B \in P(S)$, $A \subseteq B$.

APPLICAZIONE 1. – (*Problema delle concordanze generalizzato*)

Sia $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *il «segmento» degli interi positivi* $1, 2, \ldots, n$. *Una n-permutazione* σ *è una biiezione* $\sigma : \underline{n} \to \underline{n}$. *L'insieme di tutte le n-permutazioni* σ *forma un gruppo, rispetto alla composisizione di funzioni, denotato con* $\boldsymbol{S}_n$ *e detto «Gruppo Simmetrico su n elementi».*

Un intero $i \in \underline{n}$ *si dice «punto fisso» per la permutazione* σ *se e solo se* $\sigma(i) = i$.

Sia $m \leqslant n$; vogliamo determinare il numero $r_{n,m}$ delle permutazioni $\sigma \in \mathbf{S}_n$ che hanno esattamente m punti fissi.

A tal fine, per ogni permutazione $\sigma \in \mathbf{S}_n$, definiamo l'insieme

$$Fix(\sigma) = \{i \in \underline{n};\ \sigma(i) = i\}$$

e le funzioni F e G

$$F,\ G : P(\underline{n}) \to \mathbb{R}$$

tali che:

$$i)\ \ F(A) = \sharp\{\sigma \in \mathbf{S}_n;\ Fix(\sigma) = A\},\ \ per\ ogni\ A \subseteq \underline{n};$$

$$ii)\ \ G(B) = \sharp\{\sigma \in \mathbf{S}_n;\ Fix(\sigma) \supseteq B\},\ \ per\ ogni\ B \subseteq \underline{n}.$$

Ovviamente si ha:

$$\sum_{A \supseteq B} F(A) = G(B),\ \ per\ ogni\ B \in P(\underline{n}).$$

Per inversione di Möbius sul reticolo $(P(\underline{n}), \subseteq)$, dato $B \subseteq \underline{n}$, $|B| = m$, segue che:

$$F(B) = \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A| - |B|} G(A) =$$

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \left(\sum_{A \subseteq \underline{n},\ |A| = k} (n-k)! \right) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{n-m}{k-m} (n-k)!\,.$$

Moltiplicando questo intero per il numero delle scelte $\binom{n}{m}$ dello m-sottoinsieme B in $\underline{n}$ e semplificando i binomiali si ottiene:

$$r_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \frac{n!}{m!(k-m)!}\,.$$

Il caso $m = 0$ ammette una suggestiva e semplice interpretazione analitico/probabilistica. Dalla identità precedente si deduce che la probabilità $P_{n,0} = \frac{r_{n,0}}{n!}$ che una n-permutazione non abbia punti fissi è data da

$$P_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

Perciò l'«asintotica» è data da:

$$\lim_{n \to \infty} P_{n,0} = e^{-1},$$

ove e denota il numero di Nepero.

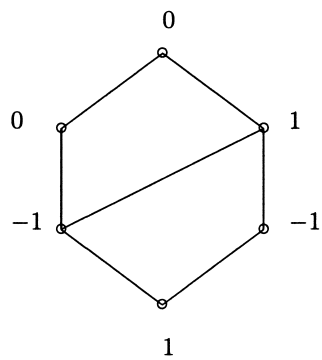
TEOREMA 5. – (*P. Hall, Rota* [15])
Sia $(\mathcal{L}, \leqslant, \vee, \wedge)$ *un reticolo finito, e siano* $x, y \in \mathcal{L}$, *con* $x \leqslant y$. *Allora*

$$\mu(x, y) = \chi_0(|\,]x, y[\,|),$$

ove $|\,]x, y[\,|$ *denota il poliedro realizzazione geometrica del complesso delle catene del poset* $]x, y[$ *e* $\chi_0(|\,]x, y[\,|)$ *denota la caratteristica di Eulero ridotta di tale poliedro.*

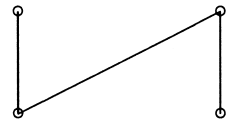
Grazie al Teorema di Hall-Rota emerge con chiarezza la natura *topologica* della funzione di Möbius di un reticolo; in particolare, i valori $\mu(x, y)$, $x \leqslant y$, sono invarianti *omotopici* del poliedro realizzazione geometrica dell'intervallo aperto $]x, y[$.

ESEMPIO 3.3. – *Si consideri il reticolo* $\mathcal{L}$ *rappresentato dal seguente diagramma di Hasse:*

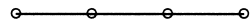


ove, in prossimità di ciascun punto $x \in \mathcal{L}$, *sono indicati i valori* $\mu(\mathbf{0}, x)$ *della funzione di Möbius tra il minimo* $\mathbf{0}$ *ed il punto stesso, calcolati mediante la recursione inferiore.*

Si noti, in particolare, che $\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = 0$; *di fatto, l'intervallo aperto* $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ *è rappresentato dal diagramma di Hasse:*



e, quindi, la sua realizzazione geometrica $|\,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\,|$ *può essere rappresentata* (*in* R^1) *dal poliedro*



che è chiaramente contraibile.

Perciò, $\chi_0(|\,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\,|) = 0 = \mu(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

3.3. *Il teorema del cross-cut.*

Un sottoinsieme C di $\mathcal{L}$ si dice «*cross-cut*» se e solo se soddifa le seguenti condizioni:

i) $\mathbf{0}, \mathbf{1} \notin C$;

ii) C è una anticatena, cioè dati due qualsiasi elementi $x, y \in C$, x e y sono *inconfrontabili*;

iii) ogni catena *massimale* σ tra $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ in $\mathcal{L}$ ha un elemento in comune con C.

Sia C un Cross-Cut di $\mathcal{L}$, $S \subseteq C$. Diremo che S è un «*generatore*» se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\bigvee_{p \in S} p = \mathbf{1}\,, \qquad \bigwedge_{p \in S} p = \mathbf{0}\,.$$

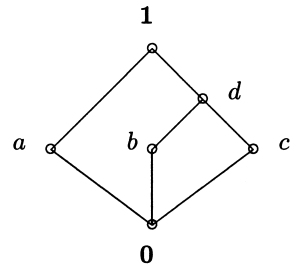
Se $S \subseteq C$ non è un generatore, esso si dice «*non-generatore*», rispetto al Cross-Cut C.

Ovviamente, la famiglia

$$\Gamma(C; \mathcal{L}) = \{S \subseteq C;\ S \text{ non-generatore}\}$$

è un complesso simpliciale astratto sull'insieme di vertici C.

ESEMPIO 4. – *Si consideri il seguente reticolo:*



L'insieme $C_1 = \{a, d\}$ *e l'insieme* $C_2 = \{a, b, c\}$ *sono Cross-Cuts di* $\mathcal{L}$, *mentre l'insieme* $\{a, b\}$ *non è Cross-Cut di* $\mathcal{L}$.

Riguardo al precedente esempio, consideriamo i complessi dei non-generatori $\Gamma(C_1; \mathcal{L}) = \{\{a\}, \{d\}\}$ e $\Gamma(C_2; \mathcal{L}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$. Si ha:

$$\chi_0(|\Gamma(C_1; \mathcal{L}|) = 2 - 1 = \chi_0(|\Gamma(C_2; \mathcal{L}|) = (3 - 1) - 1 = \mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}).$$

Sorge spontaneo chiedersi se queste identità siano manifestazione di un fatto occasionale o non, piuttosto, prefigurino un fatto generale. Di fatto, come vedremo subito, sussiste un profondo risultato topologico che lega il tipo omotopia della realizzazione geometrica del poset $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ nel reticolo $\mathcal{L}$ al tipo di omotopia della realizzazione geometrica del complesso dei non-generatori di un *qualsiasi* cross-cut di $\mathcal{L}$.

La dimostrazione del seguente fondamentale teorema sarà basata sulla versione del Teorema di Quillen per ideali di relazione.

TEOREMA 6. – (*del Cross-Cut Omotopico* (*Lakser, 1971* [10]))
Sia $\mathcal{L}$ *un reticolo, e siano* $\mathbf{0}$ *e* $\mathbf{1}$ *il suo minimo ed il suo massimo, rispettivamente. Sia* C *un cross-cut di* $\mathcal{L}$ *e si consideri il complesso dei non-generatori* $\Gamma(C; \mathcal{L})$ *di* C. *Allora, le realizzazioni geometriche* $|]\mathbf{0}, \mathbf{1}[|$ *e* $|\Gamma(C; \mathcal{L})|$ *sono omotopicamente equivalenti. In particolare, ne segue che* $\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \chi_0(\Gamma(C; \mathcal{L}))$.

DIMOSTRAZIONE. – (Brini [6], Walker [19])
Consideriamo i poset $\overline{\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)}$ e $\overline{\Gamma(C; \mathcal{L})}$, in quanto sia le realizzazioni geometriche $|]\mathbf{0}, \mathbf{1}[|$ e $|\overline{\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)}|$, sia le realizzazioni geome-

triche $|\overline{\Gamma(C;\mathfrak{L})}|$ e $|\Gamma(C;\mathfrak{L})|$ sono a due a due omeomorfe (per suddivisione baricentrica).

Sia Z l'ideale di relazione del prodotto diretto dei poset

$$\overline{\Delta(]\mathbf{0},\mathbf{1}[)} \times \overline{\Gamma(C;\mathfrak{L})}$$

definito come segue:

$$(\delta,\gamma) \in Z$$

se e solo se sussiste la seguente condizione:

nell'ordine di $\mathfrak{L}$, *ogni punto* x *della catena* δ *è confrontabile con ogni punto* y *del non-generatore* γ.

Ora, per ogni elemento $\delta \in \overline{\Delta(]\mathbf{0},\mathbf{1}[)}$, la fibra di relazione

$$Z_\delta = \{\gamma \in \overline{\Gamma(C;\mathfrak{L})}; (\delta,\gamma) \in Z\}$$

è non vuota e possiede evidentemente massimo; perciò è conicamente contraibile e quindi $|Z_\delta|$ è contraibile.

Viceversa, per ogni elemento $\gamma \in \overline{\Gamma(C;\mathfrak{L})}$, riguardando γ come elemento di $\Gamma(C;\mathfrak{L})$, γ è un non-generatore del cross-cut C. Perciò deve esistere l'estremo superiore

$$M(\gamma) = \bigvee_{c\in\gamma} c \quad \text{in} \quad]\mathbf{0},\mathbf{1}[$$

ovvero deve esistere l'estremo inferiore

$$m(\gamma) = \bigwedge_{c\in\gamma} c \quad \text{in} \quad]\mathbf{0},\mathbf{1}[\,.$$

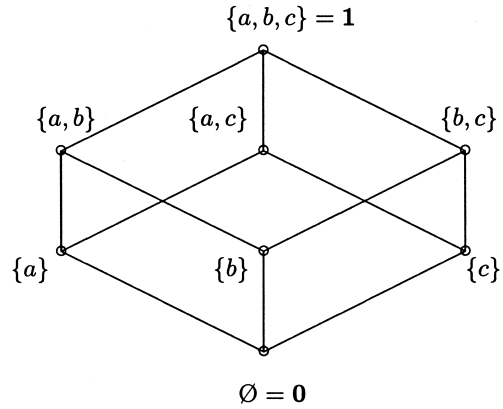
Supponiamo, ad esempio, che esista l'elemento $M(\gamma) \in]\mathbf{0},\mathbf{1}[$. La fibra di relazione

$$Z_\gamma = \{\delta \in \overline{\Delta(]\mathbf{0},\mathbf{1}[)}; (\delta,\gamma) \in Z\}$$

è ovviamente conicamente contraibile sul punto $M(\gamma) \in Z_\gamma$ e quindi $|Z_\gamma|$ è contraibile.

Dal teorema di Quillen per gli ideali di relazione segue allora che $|\overline{\Delta(]\mathbf{0},\mathbf{1}[)}| \simeq |\overline{\Gamma(C;\mathfrak{L})}|$, da cui le realizzazioni geometriche $|]\mathbf{0},\mathbf{1}[|$ e $|\Gamma(C;\mathfrak{L})|$ sono omotopicamente equivalenti.

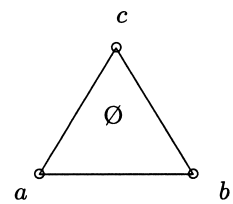
ESEMPIO 5. – *Consideriamo il seguente reticolo* $\mathcal{L}$ *(algebra di Boole su tre elementi):*



ed il cross-cut $C = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$; *il complesso dei non-generatori di* C *è*

$$\Gamma(C;\mathcal{L}) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,\,b\},\{a,\,c\},\{b,\,c\}\}\,.$$

La realizzazione geometrica $|\Gamma(C;\mathcal{L})|$ *è la* 1*-sfera* (*qui rappresentata in* R^2):



Perciò $\chi_0(|\Gamma(C;\mathcal{L})|) = -1 = \chi_0(|\,]\mathbf{0},\,\mathbf{1}[\,|) = \mu(\mathbf{0},\,\mathbf{1})$.

TEOREMA 7. – (*del Cross-Cut Combinatorio* (*Rota, 1964* [15]))

Sia $\mathcal{L}$ *un reticolo, e siano* $\mathbf{0}$ *e* $\mathbf{1}$ *il suo minimo ed il suo massimo, rispettivamente. Sia* C *un cross-cut di* $\mathcal{L}$. *Per ogni* $k \in Z^+$, *poniamo:*

$$q_k = \sharp\{T \subseteq C;\quad T \text{ generatore},\quad |T| = k\}\,.$$

Allora

$$\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \sum_{k \geq 2} (-1)^k q_k .$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia a_n il numero degli $(n+1)$-sottoinsiemi di C che risultino non-generatori; allora

$$a_n + q_{n+1} = \binom{|C|}{n+1} .$$

Abbiamo che

$$\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) + 1 = \chi(\Gamma(C; \mathfrak{L})) =$$

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{|C|}{n+1} - \sum_{n \geq 0} (-1)^n q_{n+1} = 1 + \sum_{k \geq 2} (-1)^k q_k .$$

ESEMPIO 6. – *In riferimento all'Esempio 5, notiamo che l'unico sottoinsieme generatore del cross-cut C è dato dalla terna $\{a, b, c\}$, da cui $q_3 = 1$, $q_k = 0$ se $k \neq 3$. Perciò, coerentemente,* $\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = -q_3 = -1$.

Il confronto tra il «*Teorema del Cross-Cut Omotopico*» ed il «*Teorema del Cross-Cut Combinatorio*» ci conduce a comprendere un ulteriore fondamentale fatto riguardante la *fenomenologia* della ricerca matematica, e, più in generale, della conoscenza nel senso più lato.

Ricorrendo ad una strumentale semplificazione, della quale ci scusiamo con il Lettore, osserviamo che il «*Teorema del Cross-Cut Combinatorio*» è (da un punto di vista logico) un banale Corollario del «*Teorema del Cross-Cut Omotopico*»; di conseguenza, si sarebbe portati a pensare che tale Corollario non dia alcun sostanziale ed ulteriore apporto conoscitivo rispetto al «Teorema del Cross-Cut Omotopico».

Tuttavia, questa posizione è profondamente *errata* dal punto di vista filosofico/metodologico: la banale *deducibilità logica* del secondo Teorema pertiene al cosiddetto «contesto della giustificazione», mentre l'originalità del suo *significato* pertiene al cosiddetto

«contesto della scoperta». Le due versioni del Teorema, pur essendo la seconda banalmente deducibile dalla prima, predicano di situazioni affatto diverse e risultano quindi, dal punto di vista delle applicazioni, *inconfrontabili e complementari.*

Come dovrebbe risultare palese dai due precedenti esempi, ai fini del calcolo dell'invariante $\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, il «Teorema del Cross-Cut Omotopico» risulta efficace nel caso in cui il cross-cut C possieda «*pochi* non-generatori», mentre il «Teorema del Cross-Cut Combinatorio» risulta efficace nel caso in cui il cross-cut C possieda «*pochi* generatori».

3.4. *Complementazione e contraibilità.*

Un reticolo finito $\mathfrak{L}$ si dice *complementato* se e solo se, per ogni $x \in \mathfrak{L}$, esiste un $x' \in \mathfrak{L}$ tale che:

$$x \vee x' = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad x \wedge x' = \mathbf{0}\,.$$

L'elemento x', in generale non unico, si dice *complemento* di x.

Un elemento $x \in \mathfrak{L}$ si dice *coatomo* se è *coperto* dal massimo $\mathbf{1}$, vale a dire

$$\{y \in \mathfrak{L};\ x < y < \mathbf{1}\} = \varnothing\,.$$

Chiaramente, l'insieme F dei coatomi di $\mathfrak{L}$ è un cross-cut.

Un reticolo $\mathfrak{L}$ si dice *fortemente complementato* se e solo se sussiste la seguente condizione: per ogni $x \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, esiste un $S \in \Gamma(F, \mathfrak{L})$ tale che:

i) $x \wedge \left(\bigwedge_{c \in S} c\right) = \mathbf{0}$,

ii) $x \vee \left(\bigwedge_{c \in S} c\right) = \mathbf{1}$.

A parole, un reticolo $\mathfrak{L}$ è fortemente complementato se e solo ogni elemento ammette un complemento che sia esprimibile come estremo inferiore di coatomi.

TEOREMA 8. – (*Brini, 1982* [6])

Se $\mathfrak{L}$ non è fortemente complementato, allora $|\,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\,|$ è contraibile.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $p \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ un punto per cui non esistano complementi esprimibili come estremo inferiore di coatomi.

Indicato con $\Gamma(F; \mathcal{L})$ il complesso dei non-generatori del cross-cut dei coatomi F, sia Γ_p il sottocomplesso di $\Gamma(F; \mathcal{L})$ i cui vertici sono tutti i coatomi $q \in F$, $q \geqslant p$. Il poset $\overline{\Gamma}_p$ è chiaramente conicamente contraibile (di fatto, possiede massimo).

Sia Z l'ideale di relazione $Z = \{(\gamma, \delta) \in \overline{\Gamma}_p \times \overline{\Gamma(F; \mathcal{L})}; \gamma \cup \delta$ è simplesso di $\Gamma(F; \mathcal{L})\}$.

Notiamo che, per ogni $\gamma \in \overline{\Gamma}_p$, la fibra di relazione

$$Z_\gamma = \{\delta \in \overline{\Gamma(F; \mathcal{L})},\ (\gamma, \delta) \in Z\}$$

è conicamente contraibile su γ, per definizione.

Sia ora $\delta \in \overline{\Gamma(F; \mathcal{L})}$ e sia

$$m_\delta = \bigwedge_{q \in \delta} q\ .$$

Ovviamente $m_\delta > \mathbf{0}$, in quanto, come sottoinsieme del cross-cut F, δ è un non-generatore.

Consideriamo la fibra di relazione $Z_\delta \subseteq \overline{\Gamma}_p$. Possono darsi due casi:

i) la coppia (p, m_δ) ha estremo inferiore in $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$. In questo caso $Z_\delta = \overline{\Gamma}_p$ e quindi Z_δ è conicamente contraibile;

ii) la coppia (p, m_δ) non ha estremo inferiore in $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$. Allora (p, m_δ) ha estremo superiore u in $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$; infatti, se così non fosse, m_δ sarebbe complemento di p in $\mathcal{L}$, m_δ esprimibile come estremo inferiore di coatomi, contro l'ipotesi.

Sia $z \in F$, $z \geqslant u = p \vee m_\delta$; allora $\{z\} \in \Gamma_p$. Dato un simplesso $\gamma \in Z_\delta$, si ha che

$$\Big(\bigwedge_{\{y\} \in \gamma} y\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\{q\} \in \delta} q\Big) > \mathbf{0}\ ;$$

d'altra parte, essendo $z \geqslant m_\delta = \bigwedge_{\{q\} \in \delta} q$, risulta che

$$\Big(\bigwedge_{\{y\} \in \gamma} y\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\{q\} \in \delta} q\Big) =$$

$$\Big(\bigwedge_{\{y\} \in \gamma} y\Big) \wedge \Big(\Big(\bigwedge_{\{q\} \in \delta} q\Big) \wedge z\Big) = \Big(\Big(\bigwedge_{\{y\} \in \gamma} y\Big) \wedge z\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\{q\} \in \delta} q\Big)) > \mathbf{0}\ ,$$

da cui $(\{z\} \cup \gamma) \cup \delta$ è simplesso in $\Gamma(F; \mathcal{L})$, e quindi $(\{z\} \cup \gamma, \delta) \in Z_\delta$.

Ne segue che ogni 0-simplesso $\{z\} \in \Gamma_p$, con $z \geqslant u$, dà luogo ad un vertice conico di Z_δ e quindi $|Z_\delta|$ è contraibile.

In conclusione, abbiamo provato che tutte le fibre di relazione

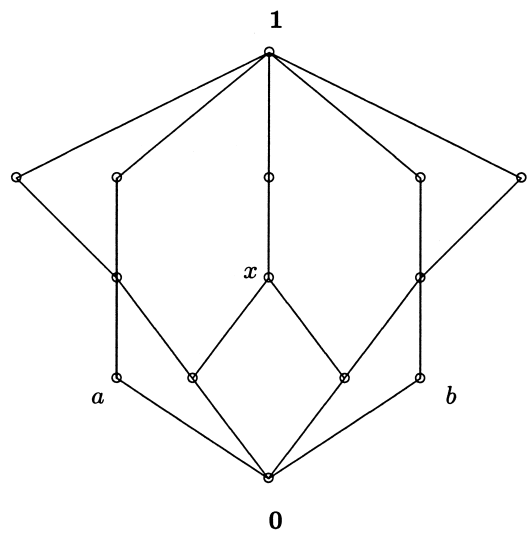
$$Z_\gamma, \quad \gamma \in \overline{\Gamma}_p \quad \text{e} \quad Z_\delta, \quad \delta \in \overline{\Gamma(F; \mathcal{L})}$$

hanno realizzazione geometrica contraibile; dal Teorema 3 segue allora che $|\overline{\Gamma(F; \mathcal{L})}|$ e $|\overline{\Gamma}_p|$ sono omotopicamente equivalenti.

Ricordando che $|\overline{\Gamma}_p|$ è contraibile e che $|\overline{\Gamma(F; \mathcal{L})}| \simeq |\Gamma(F; \mathcal{L})| \simeq |\,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\,|$, in virtù del Teorema del Cross-Cut omotopico, resta provato che $|\,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\,|$ è contraibile.

COROLLARIO 3. – (*Crapo* [8])
Se $\mathcal{L}$ non è fortemente complementato, allora $\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = 0$.

ESEMPIO 7. – *Consideriamo il reticolo $\mathcal{L}$ rappresentato dal seguente diagramma di Hasse:*



Si noti che il reticolo $\mathcal{L}$ è complementato; tuttavia, i complementi di x sono solo a e b, e questi elementi non possono essere espressi come estremi inferiori di coatomi. Perciò $\mathcal{L}$ non è fortemente complementato; di conseguenza $|\,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\,|$ è contraibile e, quindi, $\chi_0(|\,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[\,|) = \mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = 0$.

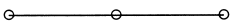
Al fine di apprezzare il significato di questo esempio, e del Teorema del quale è applicazione, il Lettore è invitato a rappresentare (*in* R^2) *la realizzazione geometrica* $|\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)|$ *del complesso di catene* $\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)$ *ed a verificare che risulta essere un poliedro contraibile; di più, il complesso di catene* $\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)$ *è collassabile.*

Ci limitiamo a notare che il complesso di catene $\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)$ *è costituito da* 12 *simplessi di dimensione* 0, 21 *simplessi di dimensione* 1 *e* 10 *simplessi di dimensione* 2; *perciò*

$$\chi_0(|\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)|) = (12 - 21 + 10) - 1 = 0 .$$

A titolo riepilogativo, menzioniamo altre due maniere di verificare che $|]\mathbf{0}, \mathbf{1}[|$ *è contraibile:*

i) La terna di elementi di $\mathfrak{L}$ *aventi rango* 2 *è un cross-cut il cui complesso dei non-generatori ha dimensione* 1 (*si noti che* $\Delta(]\mathbf{0}, \mathbf{1}[)$ *è invece di dimensione* 2) *e realizzazione geometrica:*



ii) Il poset $|]\mathbf{0}, \mathbf{1}[|$ *è smantellabile.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. AIGNER, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, 1978.

[2] M. BARNABEI - A. BRINI - G.-C. ROTA, *Theory of Möbius functions* (in russo), Uspehi Mat. Nauk, **41** (1986), 113-157. English translation: *Theory of Möbius functions*, Russian Math. Translations (London Math. Soc.), **41** (1987), 113-157.

[3] E. A. BENDER - J. R. GOLDMAN, *On application of Möbius inversion in combinatorial analysis*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975), 789-803.

[4] A. BJORNER, *Homotopy types of posets and lattice complementation*, J. Combin. Theory (A), **30** (1981), 90-100.

[5] A. BJORNER, *Topological Methods*, *in* «Handbook of Combinatorics, vol. II» (R. L. Graham, M. Grotschel, L. Lovasz, Eds.), pp. 1821-1872, North-Holland, Amsterdam, 1995.

[6] A. BRINI, *Some Homological Properties of Partially Ordered Sets*, Advances in Math., **43** (1982), 197-201.

[7] M. CERASOLI - F. EUGENI - M. PROTASI, «*Elementi di Matematica Discreta*», Zanichelli, 1988.
[8] H. CRAPO, *The Möbius function of a lattice*, J. Combin. Theory (A), **1** (1966), 126-131.
[9] J. FOLKMAN, *The homology groups of a lattice*, J. Math. Mech., **15** (1966), 631-636.
[10] H. LAKSER, *The homology of a lattice*, Disc. Math., **1** (1971), 187-192.
[11] J. MATHER, *Invariance of the homology of a lattice*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 1120-1124.
[12] C. R. F. MAUNDER, «*Algebraic Topology*», Van Nostrand, 1970.
[13] J. R. MUNKRES, «*Elements of Algebraic Topology*», Addison-Wesley, 1984.
[14] O. ORE, *Galois connections*, Trans. Amer. Math. Soc., **55** (1944), 493-513.
[15] G.-C. ROTA, *On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **2** (1964), 340-368.
[16] D. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory, I*, *in* «Algebraic K-Theory, 1», Lecture Notes in Mathematics, No. 341, pp. 85-147, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
[17] D. QUILLEN, *Homotopy properties of posets of non-trivial p-subgroups of a group*, Advances in Math., **28** (1978), 101-128.
[18] R. P. STANLEY, «*Enumerative Combinatorics. Volume I*», Wadsworth and Brooks, 1986.
[19] J. W. WALKER, *Homotopy Type and Euler Characteristic of Partially Ordered sets*, Europ. J. Combinatorics, **2** (1981), 373-384.

A. Brini, University of Bologna, Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna, Italy