Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paolo Freguglia

Calcolo geometrico e numeri ipercomplessi: origini e primi sviluppi ottocenteschi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.1, p. 101–125.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_1_101_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Aprile 2004, 101-125

Calcolo geometrico e numeri ipercomplessi: origini e primi sviluppi ottocenteschi.

PAOLO FREGUGLIA

La realizzazione di strutture algebriche differenti da quelle che l'algebra classicamente proponeva, è una delle tematiche, senz'altro tra le più interessanti, che la matematica dell'Ottocento presenta. L'ideazione del calcolo geometrico rientra appunto in questa linea storica. Si tratta di ricerche che ebbero come obiettivo la creazione di un calcolo di tipo algebrico che aveva come oggetti enti geometrici elementari sinteticamente considerati (punti, segmenti, ecc.). Già nell'*Algebra* (1572) di Bombelli e nella *Géométrie* (1637) di Descartes osserviamo tentativi di stabilire un calcolo tra segmenti non orientati in base al quale, ad esempio, il prodotto tra due segmenti dà per risultato un segmento (e non una superficie). Ma questo approccio si sviluppò ampiamente solo a partire dalla fine della prima metà dell'Ottocento per opera soprattutto di William Rowan Hamilton (1805-1865) e Hermann Günther Grassmann (1809-1877). Le problematiche che tra la fine Settecento e il primo Ottocento condussero all'esigenza di prendere in considerazione sistemi di calcolo geometrico, possono essere individuate principalmente tra quelle connesse con gli studi sulla geometria di posizione, sul calcolo baricentrico e sulla rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

1. – La geometria di posizione e il calcolo baricentrico.

Un'opera che fu riferimento culturale per molti tra coloro che si interessarono di calcolo geometrico, fu la *Géométrie de Position* [1803] di Lazare-Nicolas Carnot (1753-1823). Carnot dichiara che la «géométrie de position» ha come fine la ricerca delle correlazioni comparative che sussistono tra le posizioni di una figura geometrica. Si hanno, secondo Carnot, due tipi di *correlazioni*: quella di costruzione e quella di posizione. Quella per costruzione consiste nello stabilire tra i punti di due figure piane assegnate una corrispondenza relativa alla costruzione medesima delle figure (come avere stessa base o stessa altezza); mentre quella di posizione conserva appunto la posizione che i vari punti hanno nelle rispettive figure correlate. Ad esempio, due triangoli possono essere messi in corrispondenza costruttiva se hanno la stessa altezza. Tuttavia possono non essere correlati per posizione se il piede dell'altezza del primo cade all'interno della base e dell'altro all'esterno. Il significato che Carnot dava alla geometria di posizione differisce da quanto si intendeva nella *Geometrie der Lage* (1847) di G. K. C. Von Staudt, che piuttosto si riferiva alla geometria proiettiva. Legati alle concezioni di Carnot sono invece i lavori di Simon Lhuilier (*Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*, 1809) e di Gabriel Lamé (*Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problémes de Géométrie*, 1818).

Tra i problemi che Carnot affronta nella sua opera del 1803 c'è la determinazione del baricentro di una figura piana o solida. Fu però August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) che al calcolo baricentrico dette l'opera storicamente più significativa di quel periodo, cioè *Der barycentrische Calcul. Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie* [*Il calcolo baricentrico. Un nuovo aiuto alla trattazione analitica della geometria*] [1827]. Möbius ([1]) dice esplicitamente che Carnot e Lhuilier hanno cercato di «determinare il baricentro nell'ambito della geometria elementare considerando non corpi, superfici e linee, ma piuttosto sistemi di punti pesanti; per evitare ogni riferimento alla meccanica, chiamano *punto delle medie distanze* il baricentro di un sistema di punti pesanti, infatti la sua distanza da un qualunque piano è uguale alla media delle distanze di tutti i punti del sistema dallo stesso piano. Tutti devono riconoscere i progressi che questi matematici in questo modo hanno dato alla geometria».

([1]) Vedi A. F. Möbius [1827] pp. iii, iv.

Il calcolo baricentrico proposto da Möbius prende in considerazione segmenti orientati ed operazioni su di essi come:

$AB + BA = 0$

$BC + CA + AB = 0$, se i punti A, B, C appartengono ad una stessa retta.

Ma Möbius non introduce la regola di addizione per segmenti orientati non collineari, cioè la cosiddetta regola del parallelogramma.

2. – La rappresentazione geometrica dei numeri complessi ed il calcolo delle equipollenze.

Carnot, nella sua opera del 1803, afferma che i numeri immaginari e i numeri negativi sono utili creazioni della nostra mente che non hanno un'esistenza «naturale» (come i numeri interi positivi). Questa posizione epistemologica ci fa comprendere l'atteggiamento di quei matematici, per lo più di ambito culturale francese, che si occuparono della natura dei numeri complessi. In realtà, l'idea di rappresentare l'unità immaginaria ε come l'unità perpendicolare all'unità reale e tale che $\varepsilon^2 = -1$ si trova per la prima volta nel saggio *Om Directionens analytiske Betegning* [*Sulla rappresentazione analitica della direzione*] (1798) pubblicato nelle *Memorie dell'Accademia reale di Danimarca* da Caspar Wessel (1745-1818) ([2]). Ma il lavoro di Wessel rimase quasi sconosciuto per un secolo. Egli, peraltro, considera segmenti orientati nello spazio tridimensionale e studia altresì le rotazioni in $\boldsymbol{R}^3$, argomenti questi che ritroveremo indipendentemente sviluppati mezzo secolo più tardi nelle ricerche di W.R. Hamilton. L'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* di Jean Robert Argand fu pubblicato anonimo a Parigi nel 1806. Che si trattasse di Argand si seppe solo in seguito, dopo che fu pubblicato negli *Annales de Mathématiques* di Gergonne nel 1813 un lavoro di Jac-

([2]) In effetti già Wallis (1685), De Moivre (1707), Euler (1748, 1777) e Gauss (1799) avevano pensato più o meno esplicitamente alla possibilità di una rappresentazione geometrica dei numeri immaginari.

ques Frédéric Français. A conclusione di questo lavoro, che a sua volta tiene ben presente le idee della *Géométrie de Position*, Français presenta una rappresentazione geometrica dei numeri complessi, dicendo però che le idee presentate non erano sue, ma che appartenevano ad altro autore che però egli non cita. È a questo punto che Argand scrive alla redazione degli *Annales* rivendicando la paternità e presentando anche un lavoro in cui sono riassunti i risultati che si ritrovano nel suo saggio anonimo del 1806. Relativamente a questi anni sono realizzati altri interessanti lavori su questo argomento tra cui quello di Adrien-Quentin Buée del 1806, che sarà tenuto ben presente da Giusto Bellavitis.

Argand, come Carnot, rappresenta un numero negativo su una retta orientata. Ecco allora come si può rappresentare l'unità immaginaria.
Sia $KA = +1$ allora $KI = -1$; riferendoci al triangolo rettangolo isoscele IEA si può stabilire la proporzione:

$$KI : KE = KE : KA$$

Interpretando $KE = +\sqrt{-1}$ e sostituendo si ha:

$$-1 : +\sqrt{-1} = +\sqrt{-1} : +1$$

Si consideri dunque il triangolo rettangolo isoscele INA, si potrà porre $KN = -\sqrt{-1}$. Sostituendo, otteniamo la proporzione:

$$-1 : -\sqrt{-1} = -\sqrt{-1} : +1$$

Si può allora concludere che l'unità immaginaria è concepita come media proporzionale tra l'unità reale positiva e quella negativa. La regola del parallelogramma è esplicitamente introdotta da Argand, così si può rappresentare la somma tra numeri complessi. Il prodotto è poi definito nel modo seguente (vedi Figura 1).

Assegnato l'angolo CKD uguale all'angolo AKB, risulterà:

$$KA : KB = KC : KD$$

da cui, essendo $KA = +1$, si ha:

$$KB \cdot KC = KD$$

Per Giusto Bellavitis (1803-1880) fu altrettanto determinante l'in-

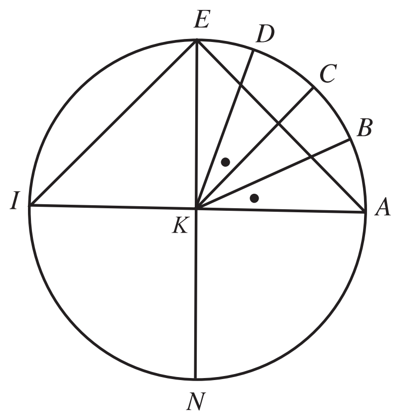


Figura 1

fluenza della *Géométrie de Position*. In una serie di lavori che partono dal 1832, Bellavitis propone il *calcolo delle equipollenze* mediante il quale si può rappresentare geometricamente l'algebra dei numeri complessi. Questo calcolo è altresì un calcolo geometrico piano completo.

Nel *Saggio sull'algebra degli immaginari* [1852], Bellavitis scrive:

> Il tipo o come si disse la rappresentazione delle quantità immaginarie, fu data da parecchi Analisti molto prima che io ne deducessi il mio metodo delle equipollenze; anche Cauchy la adopera non rade volte, ma sempre come un mezzo per esprimere più chiaramente qualche circostanza relativa alle quantità immaginarie, non già come l'essenziale ed unica definizione delle medesime: io invece la prenderò come la vera definizione e da essa dedurrò le proprietà degli immaginari (3).

Le tecniche di Bellavitis, nonostante l'apporto di innovazioni concettuali e formali, non differiscono molto da quelle di Argand e dei matematici sopra citati.

Per Bellavitis, due segmenti orientati nel piano si dicono *equipollenti* se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza. Con la scrittura $AB \mathrel{\Omega} CD$ Bellavitis denota che i segmenti

(3) Vedi G. Bellavitis [1852], p. 247.

orientati AB e CD sono equipollenti. La lunghezza di un segmento AB è indicata così *gr* AB. Di un segmento orientato AB si può altresì stabilire l'*inclinazione*, che Bellavitis denota con *inc* AB. Essa altro non è che l'angolo orientato (in senso antiorario) rispetto ad una retta di riferimento assegnata. Il calcolo delle equipollenze viene dunque caratterizzato dalle seguenti leggi:

1. Due angoli che hanno lati paralleli sono uguali.
2. $incBA = incAB \pm 180°$
3. (*regola del parallelogramma*) $AB + BC \,\Omega\, AC$
4. $AB + 0 \,\Omega\, 0 + AB \,\Omega\, AB$ (esistenza del segmento orientato nullo, cioè che ha lunghezza zero e nessuna direzione ed è denotato con 0).
5. $AB + BA \,\Omega\, 0$ ovvero $AB \,\Omega\, -BA$

Il parallelismo fra due segmenti orientati AB e CD è espresso con $AB \,\Omega\, tCD$, dove t è un numero reale.

Bellavitis definisce quindi prodotto e divisione fra segmenti orientati così:

i) $AB \,\Omega\, BD \cdot EF$ se $grAB = (grBD)(grEF)$ e $incAB = incBD + incEF$

ii) $BD \,\Omega\, AB/EF$ se $grBD = (grAB)/(grEF)$ e $incBD = incAB - incEF$

La rotazione (in senso antiorario) di 90° nel piano è espressa utilizzando appunto l'unità immaginaria (che talvolta Bellavitis denota con γ e chiama «ramuno» come contrazione di «radice di meno uno»), perciò:

$$\gamma AB \,\Omega\, A'B' \text{ se e solo se } AB \text{ è perpendicolare ad } A'B'$$

e le rotazioni maggiori o minori di 90° (in senso orario o antiorario) sono opportunamente rese di conseguenza. Il *coniugato* di un segmento orientato AB (che può rappresentare un numero complesso nel piano di Argand) è espresso con l'operatore *cj*, cioè $cjAB \,\Omega\, A'B'$. Questa scrittura indica appunto che $A'B'$ è il coniugato di AB laddove accada che:

$$gr(cj\,AB) = gr\,AB = gr\,A'B' \quad \text{e} \quad inc\,(cj\,AB) = -inc\,AB = inc\,A'B'$$

Sono poi stabiliti alcuni lemmi fondamentali che Bellavitis chiama *canoni*, i quali agevolano l'applicazione geometrica di questo calcolo. Riporteremo di seguito i canoni terzo e quarto.

Mediante il calcolo delle equipollenze si possono dimostrare i teoremi della geometria piana euclidea e teoremi proiettivi piani come quello di Desargues sui triangoli omologici (caso piano). In altre parole, si può fondare la geometria piana sulla nozione di segmento orientato e sul calcolo delle equipollenze ([4]).

Vediamo dunque un esempio di come si possano riottenere fondamentali risultati di geometria elementare piana. Ecco come Bellavitis dimostra il teorema di Pitagora (per facilitare la lettura abbiamo riportato l'enunciato dei canoni che l'autore utilizza per la dimostrazione).

Consideriamo un triangolo ([5]) ABD, dove AC è una sua mediana (vedi Figura 2), allora $AB + BC \,\Omega\, AC$ cioè $AB \,\Omega\, AC + CB$, ed inoltre $AD \,\Omega\, AC - CB$ (essendo $BC \,\Omega\, CD$ e $BC \,\Omega\, -CB$).

Moltiplicando membro a membro abbiamo:

$$\begin{aligned} &AB\cdot AD \,\Omega\, (AC + CB)(AC - CB) \,\Omega\, (AC)^2 - (CB)^2 \text{ ovvero} \\ &AB\cdot AD + (CB)^2 - (AC)^2 \,\Omega\, AB\cdot AD + CB^2 + AC\cdot CA \,\Omega\, 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

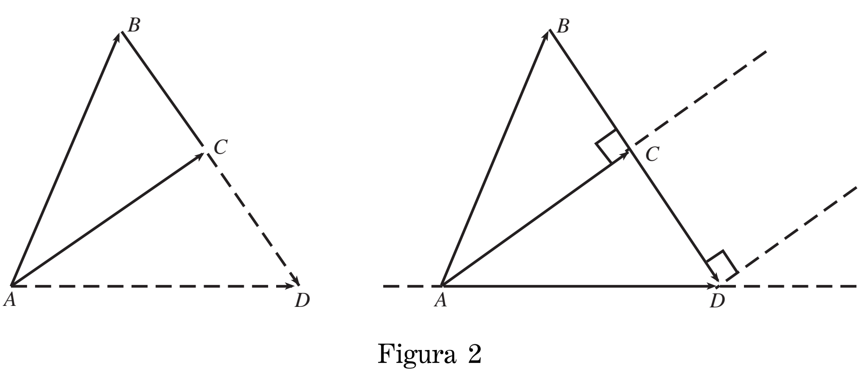


Figura 2

([4]) Si rimanda a P. Freguglia [2001] e [1992].
([5]) Vedi G. Bellavitis [1854] pp. 13 e segg.

Inoltre se noi supponiamo:

(2.2) $inc\,CB = inc\,AC \pm 90°$, cioè CB perpendicolare ad AC,

abbiamo anche che:

(2.3) $$2\,inc\,CB = 2\,inc\,AC \pm 180°$$

Inoltre:

(2.4) da $CB^2 \,\underline{\Omega}\, CB \cdot CB$ si ha $2\,inc\,CB = inc\,CB + inc\,CB$

e

(2.5) da $-\mathrm{AC}^2 \,\underline{\Omega}\, \mathrm{AC} \cdot \mathrm{CA}$ segue che

$$inc\,AC + inc\,CA = inc\,AC + inc\,AC \pm 180° = 2\,inc\,AC \pm 180°$$

Se confrontiamo (2.4) e (2.5) con (2.3) troviamo che gli ultimi due termini di (2.1) hanno la stessa inclinazione. In tal caso possiamo applicare alla (2.1) quello che Bellavitis chiama terzo canone (del calcolo delle equipollenze).

TERZO CANONE. – *Se due termini di una equipollenza trinomiale hanno eguali inclinazioni, il terzo termine (se decidiamo di portare tutti e tre i termini a membro destro, per esempio) avrà un'inclinazione che differirà di 180 gradi da quella degli altri due e la sua lunghezza sarà uguale alla somma delle lunghezze dei primi due termini.* (vedi Figura 3)

$$LM + MN + NL \,\underline{\Omega}\, 0$$

Riprendendo la dimostrazione del teorema di Pitagora, risulterà allora:

$$gr\,(AB \cdot AD) = (gr\,CB)^2 + (gr\,AC)^2$$

$$inc\,(AB \cdot AD) = (2\,inc\,AC \pm 180°) \pm 180° = 2\,inc\,AC$$

Ma da $inc\,AC \pm 90° = inc\,DB$ risulta che $2\,inc\,AC \pm 180° = 2\,incDB$

Figura 3

o $2\, inc\, AC = 2\, inc\, DB \pm 180°$; da cui:

$$inc\,(AB \cdot AD) = inc\, AB + inc\, AD = 2\, inc\, DB \pm 180°$$

e

$$inc\, AB + inc\, DA \pm 180° = 2\, inc\, DB \pm 180°$$

quindi:

(2.7) $$inc\, AB + inc\, DA = 2\, inc\, DB$$

Abbiamo anche che:

(2.8) $$AD + DB \,\Omega\, AB \quad \text{o} \quad BA + DB + AD \,\Omega\, 0$$

per cui si può applicare, dati (2.7) e (2.8), il cosiddetto quarto canone, che dice:

QUARTO CANONE. – *Se confrontiamo i termini di una equipollenza trinomiale con i termini dell'equipollenza identica:*

$$LM + MN + NL \,\Omega\, 0$$

e accertiamo che $inc\, ML + inc\, LN = 2\, inc\, MN$ (*e le tre inclinazioni sono disuguali*) *allora seguirà che* $gr\, LM = gr\, NL$, *e viceversa*: *se* $gr\, LM = gr\, NL$ *allora* $inc\, LM + inc\, LN = 2\, inc\, MN$. (vedi Figura 4, dove $inc\, ML = inc\, L'N = \beta$, $inc\, ML' = \delta$ e $inc\, MN = \tau$).

Avremo allora che

(2.9) $$gr\, AB = gr\, AD.$$

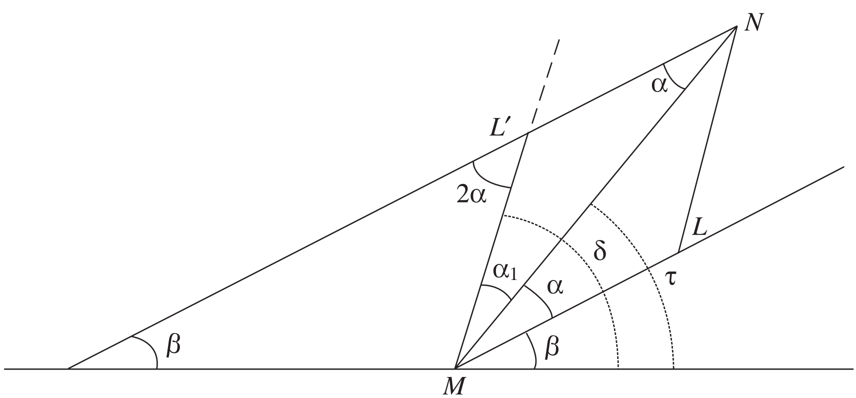


Figura 4

Se sostituiamo (2.9) in (2.6) otteniamo:

$$(grAB)^2 = (grCB)^2 + (grAC)^2$$

che è appunto il teorema di Pitagora.

Sui rapporti tra geometria euclidea piana e numeri complessi Émile Borel e Robert Deltheil nel 1931 pubblicarono un interessante volumetto dal titolo *La géométrie et les imaginaires* ([6]), in cui si riprende l'impostazione bellavitisiana, ormai a quel tempo ben consolidata nella cultura matematica. Si rammenta peraltro che le idee di Bellavitis ebbero un certo successo in Francia: furono tradotte, rielaborate e pubblicate da J.Hoüel nel 1869 e da C.A.Laisant nel 1887 ([7]). Per ottenere una rotazione di un angolo θ (in senso antiorario) da un vettore-numero complesso z a z' basta dunque considerare il seguente prodotto:

$$z' = z(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta) \tag{2.10}$$

dove $(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ è un numero complesso unitario, il cui modulo, cioè, vale 1. La (2.10) è conforme al sistema di Bellavitis.

3. – I fondamentali sistemi di calcolo geometrico nella prima metà dell'Ottocento.

Gli anni quaranta dell'Ottocento vedono fiorire contributi fondamentali di calcolo geometrico ([8]). Adhémar Barré de Saint Venant nel 1845 pubblica *Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique*, dove troviamo elementi di calcolo vettoriale e nozioni del tutto equivalenti a quelle di prodotto vettoriale e prodotto misto, nonché applicazioni alla meccanica. Significativo è altresì il lavoro *Mémoire sur les clefs algébriques* (1847) in cui Cauchy presenta le cosiddette *chiavi alge-*

([6]) Vedi É. Borel, R. Deltheil [1931].
([7]) Vedi J. Hoüel [1869] e C.A.Laisant [1887].
([8]) Vedi E. Cartan [1907]. Ancor prima, per quanto riguarda l'Italia, vanno tenuti presenti i lavori di Gaetano Giorgini (1795-1874) e di Domenico Chelini (1802-1878). Per approfondimenti si rimanda a S. Caparrini [2003]. In generale vedi anche M. J. Crowe [1967].

briche. Esse ricordano alcune idee di Hermann Günther Grassmann, alle quali Cauchy assai probabilmente attinse. Grassmann, che lavorò in modo autonomo ed in un certo qual senso da vero e proprio solitario, propone le sue idee algebrico geometriche partendo da una nozione alquanto analoga a quella che oggi chiamiamo spazio vettoriale a n dimensioni. Già nel suo lavoro *Theorie der Ebbe und Flut* (*Teoria delle maree*) del 1840 compaiono alcune idee fondamentali che ritroviamo in *Die lineale Ausdehnungslehre* (*La teoria lineare dell'estensione*, prima edizione [1844]). L'impianto teorico grassmanniano, di cui daremo solo alcuni cenni semplificati relativi alle nozioni fondamentali di partenza, prevede dapprima l'assunzione di un numero n di unità fondamentali $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, per introdurre poi la nozione di *extensive Grösse* (grandezza estensiva) così:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i = \alpha$$

dove $a_i \in \boldsymbol{R}$.

Tra le grandezze estensive, che hanno o possono avere una opportuna interpretazione geometrica, è immediato stabilire le operazioni di somma e differenza, come pure il prodotto $k\alpha$, con $k \in \boldsymbol{R}$. Grassmann presenta quindi il prodotto tra grandezze estensive

$$\sum a_i \boldsymbol{e}_i \circ \sum b_j \boldsymbol{e}_j = a_i b_j (\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j) \qquad \text{con } a_i,\ b_i \in \boldsymbol{R}$$

che considera articolato in due tipi: *prodotto interno* e *prodotto esterno*. Il prodotto interno si ottiene se si stabiliscono tra le unità fondamentali le seguenti regole di calcolo:

$$\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_i = 1 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j = 0 \qquad \text{con } i \neq j$$

mentre si ha il prodotto esterno se stabiliamo le regole sottostanti:

$$\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_i = 0 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{e}_i \qquad \text{con } i \neq j\,.$$

Come si può osservare il prodotto esterno risulta essere non commutativo. Alle idee di Grassmann ([9]) andrà dato ovviamente ben più spazio di quanto qui in breve riportiamo. Va peraltro considerato il

([9]) Per contributi storico critici su Grassmann si rimanda a G. Schubring (ed. by) [1996], S. Briccoli Bati, *Appendice A* in P. Freguglia [1992].

cruciale impatto che esse ebbero in Italia sull'opera di Peano (1888) e della sua scuola (in particolare nei lavori di Cesare Burali-Forti) ([10]). Chi invece in Italia contribuì fra i primi a introdurre il calcolo dei quaternioni di Hamilton fu proprio Bellavitis, che il 21 marzo 1858 a Venezia presso l'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti propose in una conferenza l'argomento. In questo stesso anno, cioè nel 1858, Bellavitis pubblica nelle *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, la memoria «Calcolo dei quaternioni di W.R.Hamilton e sua relazione con il calcolo delle equipollenze» ([11]).

Nel 1843 William Rowan Hamilton rese noto di aver «inventato» i quaternioni ([12]). Poi, sin dal 1844 realizzò numerosi lavori in merito ed in particolare i sostanziosi e fondamentali volumi *Lectures on Quaternions* [1853] e *Elements of Quaternions* [1866]. In realtà dal 1828 al 1843 Hamilton si era impegnato a trovare una adeguata definizione per la moltiplicazione fra due vettori tridimensionali che soddisfacesse la proprietà commutativa come accade per i numeri reali e per i numeri complessi.

Pertanto la teoria dei *quaternioni* deve essere vista come uno sviluppo del calcolo tra segmenti orientati (dal piano allo spazio) e un tentativo di estensione della nozione di numero complesso. Il calcolo quaternionale è, nelle intenzioni del suo autore, una struttura sia algebrica sia geometrica, ossia, sempre secondo Hamilton, un impianto teorico con cui concretizzare l'idea ispirata dalla lettura di Kant secondo cui nell'algebra si individua la scienza del tempo puro e nella geometria quella dello spazio puro. La nozione di quaternione sicuramente non fu considerata da Hamilton un concetto matematico come tanti altri. I quaternioni sono numeri (*ipercomplessi*) e la loro importanza è determinante al pari di come lo è quella degli

([10]) Sul calcolo geometrico in Peano e la sua scuola si rimanda a U. Bottazzini [1982] e a P. Freguglia [1992] e [1993].

([11]) Vedi G. Bellavitis [1858].

([12]) Per informazioni relative all'itinerario culturale seguito da Hamilton per giungere ai quaternioni si rimanda alle parti introduttive e prefazioni di W. R. Hamilton [1853] e [1866]. Per la letteratura storiografica sui quaternioni segnaliamo (senza pretesa esaustiva) T. Archibald [2001], D. Bloor [1981], P.Freguglia [1985], cap.2 di [1992] e [2001], L. Sinègre [1995].

altri numeri a partire dai naturali. Per cui importantissime dovevano essere le applicazioni dei quaternioni, che appunto venivano considerati come la «chiave di lettura» dell'universo fisico, cioè lo strumento più consono per attuare quella visione meccanicistico-deterministica a cui Hamilton credeva, al di là dei suoi espliciti riferimenti alla filosofia kantiana. Hamilton e i suoi allievi, in particolare Peter Guthrie Tait (1831-1901) ([13]), si cimentarono dunque anche sulle applicazioni alla meccanica ([14]). Tait nel suo volume *Elementary Treatise on Quaternions* [1867, 1873], traccia, proprio nei primi capoversi rispettivamente dei capitoli I e II e tenendo presente l'insegnamento del maestro, le differenziazioni che si hanno considerando i segmenti orientati nel piano, e quindi i numeri complessi, e i segmenti orientati nello spazio, nonché i quaternioni. Dice Tait:

> Per almeno due secoli la rappresentazione geometrica delle grandezze algebriche negativa e immaginaria, -1 e $\sqrt{-1}$, è stato argomento privilegiato di speculazione tra i matematici. L'essenza di quasi tutte le proposte consiste nell'utilizzo dei simboli sopra riportati come designanti una direzione e non la *lunghezza* di un segmanto rettilineo ([15]).
>
> [...]
>
> Si giunge ora ad una parte della teoria nella quale il Calcolo dei quaternioni differisce completamente da ogni precedente metodo matematico; ed è qui che noi comprendiamo in che cosa consista un quaternione e la ragione del suo nome. Questa parte della teoria si basa sul nuovo significato che viene assegnato ai simboli di moltiplicazione e di divisione. Considerare il quoziente tra due vettori rappresenta la via più semplice per entrare nell'argomento ([16]).

4. – I quaternioni e il loro significato geometrico.

Leggendo la seconda delle *Lectures on Quaternions* (1853) di Hamilton troviamo esaminato il quoziente ed il prodotto fra due vet-

([13]) Sull'opera di Tait e la sua lettura dell'opera di Hamilton, vedi T. Archibald [2001] e E. Bellone [1976] seconda parte, cap. 1, in particolare pp. 72-78.

([14]) Va peraltro rammentato il volume di A. Mc Aulay [1893].

([15]) Vedi P. G. Tait [1873], p. 1.

([16]) Ibid. p. 31.

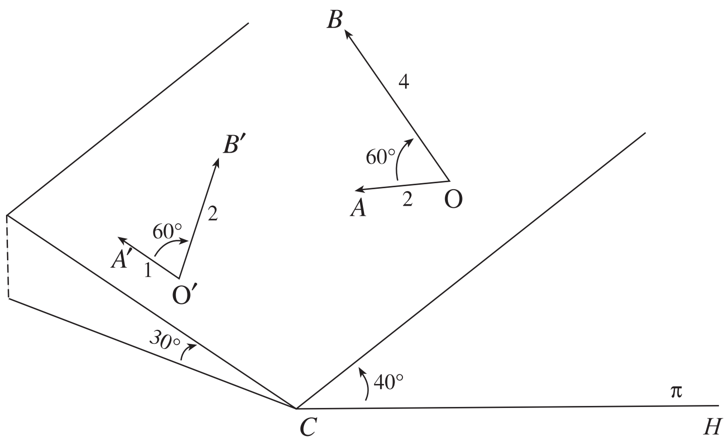


Figura 5

tori tridimensionali. Così, il rapporto $\boldsymbol{v}/\boldsymbol{u}$ (dove $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$ sono vettori) denota sinteticamente il risultato di un'analisi che coinvolge il rapporto fra due lunghezze, l'angolo fra due direzioni e la posizione di un dato piano. Hamilton illustra negli *Elements of Quaternions* (1866) (vedi Figura 5), il significato geometrico del quoziente fra due vettori.

Il rapporto fra due segmenti orientati OB/OA ($O'B'/O'A'$) viene dunque determinato dalla seguente quaterna ordinata:

$$2, \quad 60°, \quad 40°, \quad 30°$$

ove il primo numero esprime il rapporto (*ratio*) fra le lunghezze dei due vettori, il secondo l'angolo (*angle*) fra i due vettori, il terzo lo scostamento da una linea di riferimento CH (*ledge*) ed infine il quarto l'inclinazione (*slope*) relativa ad un piano di riferimento. I tre valori angolari sono tra loro, e dal primo valore scalare, ben distinti. Sinteticamente (vedi la già citata *Lecture II*) un quaternione come rapporto di due vettori viene così scritto:

$$\boldsymbol{v}/\boldsymbol{u} = q \tag{4.1}$$

che, con espressioni alquanto originali, Hamilton indica così: «factor/faciend=factor». La (4.1) esprime geometricamente una *dilatazione* che porta $\boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{v}$. Dice Tait: «L'operatore di allungamento (della dilatazione) verrà detto TENSORE [TENSOR], e verrà denotato con il prefisso T davanti al simbolo del quaternione considerato. L'operatore di rotazione è chiamato VERSORE (VERSOR), e sarà denotato dalla lettera U come prefisso al simbolo di quaternione» ([17]). Si scriverà allora:

$$q = Tq \,.\, Uq = Uq \,.\, Tq \tag{4.2}$$

Ed ancora, «un quaternione, in generale può essere scomposto nella somma di due parti, una scalare [numerical] e l'altra vettoriale [vector]. Hamilton chiama queste parti rispettivamente SCALARE [SCALAR], e VETTORE [VECTOR], e denota esse rispettivamente con le lettere S e V messe a prefisso dell'espressione che individua il quaternione. [...]» ([18]). Ossia:

$$q = Sq + Vq \tag{4.3}$$

Dalla (4.1) si ha:

$$q\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \tag{4.4}$$

che può essere vista come un caso particolare del prodotto tra due quaternioni:

$$q_1 \cdot q_2 = q_3$$

dal momento che un vettore tridimensionale può essere considerato come un quaternione la cui parte scalare è uguale a zero, cioè $Sq = 0$.

L'espressione analitico-polinomiale di un quaternione è:

$$q = q_0 + \boldsymbol{q} = q_0 + q_1 \boldsymbol{i} + q_2 \boldsymbol{j} + q_3 \boldsymbol{k} \tag{4.5}$$

dove q_0 è chiamato *parte scalare* e $\boldsymbol{q}$ *parte vettoriale*; q_0, q_1, q_2, q_3 che sono in questo contesto numeri reali, sono detti *componenti* del quaternione q. La somma di due quaternioni è ancora un quaternione che ha ogni componente uguale rispettivamente alla somma delle componenti dei due quaternioni dati. Il prodotto tra due quaternioni si esegue come un normale prodotto tra polinomi, osservando però

([17]) Vedi P. G. Tait [1867], p. 32.
([18]) Ibid. p. 48.

le seguenti regole:

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-1\,;\ \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{ji}\,;\ \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{ik}\,;\ \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{kj}$$

Tale prodotto si può stabilire anche nel modo seguente:

$$pq = p_0 q_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + p_0\boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} \tag{4.6}$$

dove $\cdot$ è il simbolo che esprime il *prodotto scalare* e $\times$ il *prodotto vettoriale* (19).

Il prodotto tra quaternioni è in generale *non-commutativo*, cioè:

$$pq \neq qp$$

e lo si può immediatamente constatare applicando le regole di calcolo poco sopra assunte.

Hamilton e Tait danno anche una dimostrazione geometrica. Seguendo un passo degli *Elements* (20), vediamo come Hamilton mostra geometricamente la non commutatività del prodotto tra quaternioni. Si comincia con l'introduzione della nozione di *Radial* (o *Radial Quotient*). Consideriamo a tal proposito una sfera di raggio unitario, la *Unit-Sphere*; due raggi di essa sono due vettori di uguale lunghezza, coiniziali (origine nel centro della sfera) ma di diversa direzione. Quindi questi due raggi, e siano α e β, individuano due differenti vettori. Il *Radial* sarà allora un particolare quaternione, individuato appunto dal quoziente $q = \beta/\alpha$ (vedi Figura 6) che esprime la rotazione da α a β. L'arco AB verrà chiamato *vector-arc*. Due vector-arc si dicono uguali

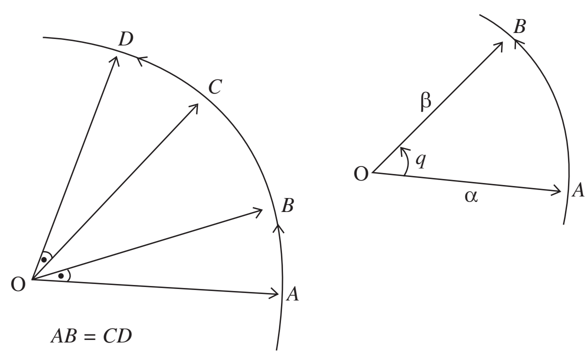


Figura 6

(19) Si ha altresì, tenendo presenti (4.1) e (4.3) che: $Sq = -(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$ e $Vq = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.
(20) Vedi W. R. Hamilton [1866] pp. 143-149.

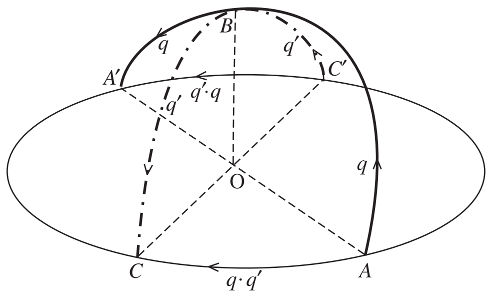


Figura 7

se stanno sullo stesso cerchio massimo, hanno la stessa direzione e la stessa lunghezza.

Passiamo ora alla Figura 7. Esamineremo due casi: quando i due quaternioni q e q', di cui vogliamo considerare il prodotto, non appartengono allo stesso piano, cioè allo stesso cerchio massimo, e quando si. A sua volta il primo caso è suddiviso nei seguenti due sottocasi:

a) AA' e CC' sono ambedue semicerchi. Avremo allora che: $q \cdot q'$ corrisponde, con notazione di comodo sugli archi, a

$AB + BC = AC$ (corrispondendo $AB = BA'$ a q e $C'B = BC$ a q') mentre:

$q' \cdot q$ corrisponde a $C'B + BA' = C'A'$

ma AC è diverso da CA (essendo $AC = A'C'$).

b) AA' e CC' non sono ambedue semicerchi. In questo caso a maggior ragione si ottiene la non-commutatività dal momento che AC e $C'A'$ non solo hanno differenti direzioni, ma non giacciono neppure sullo stesso piano.

Vediamo quindi ora il caso in cui q e q' giacciono sullo stesso piano, cioè appartengono allo stesso cerchio massimo. In questo caso, come Hamilton mostra, il prodotto tra due quaternioni è commutativo. Infatti (vedi Figura 8) si ha che: $q \cdot q'$ corrisponde ad AC e $q' \cdot q$ corrisponde a $C'A'$ (corrispondendo $AB = BA'$ a q e $C'B = BC$ a q'). Essendo $AC = C'A'$ si ha che $q \cdot q' = q' \cdot q$.

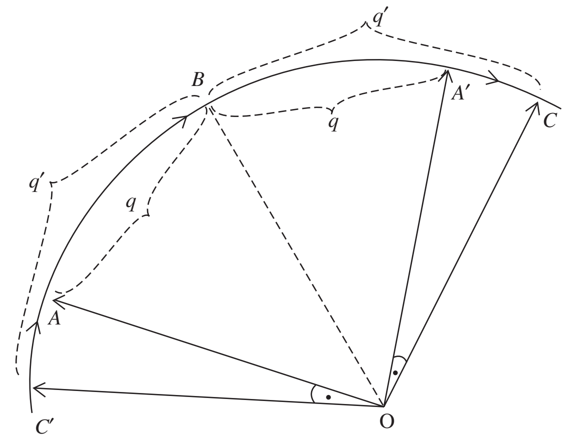


Figura 8

L'analogia con i numeri complessi porta a sviluppare ulteriori nozioni. Così mediante $Kq = q_0 - \boldsymbol{q} = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k}$ Hamilton indica il *quaternione coniugato* di q che brevemente noi indicheremo con q^*. Avremo così che $q + q^* = 2q_0$. La norma (che corrisponde al modulo nei complessi) di q, in simboli $|q|$, è uguale a $\sqrt{(q^* q)}$ e $q^* q = qq^* = |q|^2 = q_0^2 + |\boldsymbol{q}|^2$. Risulta pure che $(pq)^* = q^* p^*$. L'*inverso* di q è così definito:

$$q^{-1} = q^*/|q|^2$$

Hamilton aveva dimostrato in *On Quaternions* del 1847 come si poteva caratterizzare una *rotazione* in $\boldsymbol{R}^3$. A tal fine utilizzava la nozione di *quaternione unitario*, cioè un quaternione la cui *norma* vale 1. A tal proposito vediamo come nell'*Elementary Treatise on Quaternions*, Tait ([21]) propone il seguente problema, relativo appunto alla rappresentazione di una rotazione, problema che vale la pena esaminare:

Rappresentare la rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse di un dato angolo assegnato.

([21]) Vedi P. G. Tait [1867] § 369 (§ 351 dell'edizione francese tradotta da G. Plarr).

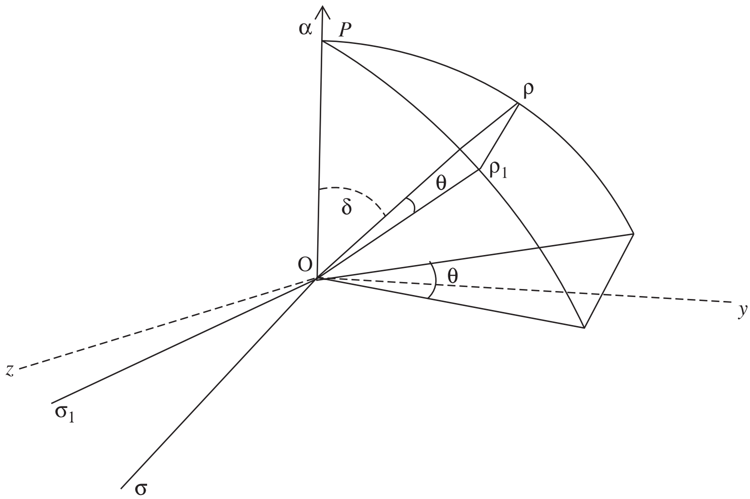


Figura 9

Tait procede in questo modo. Sia α il vettore unitario che ha stessa direzione e stesso verso dell'asse di rotazione e tale che $\alpha^2 = -1$; ϱ sia il vettore che individua un punto qualunque del corpo rigido con origine in O, punto fisso origine del sistema di riferimento scelto, e θ sia l'angolo di rotazione assegnato (vedi Figura 9).

Partendo dal prodotto $\alpha\varrho$ (di due vettori) Tait dà di ϱ un'espressione quaternionale, infatti risulta dalle definizioni precedenti:

(4.7) $$\alpha\varrho = S\alpha\varrho + V\alpha\varrho$$

da cui, poiché $\alpha^{-1} = -\alpha$ (essendo $\alpha^2 = -1$), discende:

(4.8) $$\varrho = \alpha^{-1} S\alpha\varrho + \alpha^{-1} V\alpha\varrho = -\alpha S\alpha\varrho - \alpha V\alpha\varrho$$

Osserviamo intanto che il primo termine $-\alpha S\alpha\varrho$ della (4.8) rimane inalterato per qualunque rotazione intorno all'asse assegnato. Infatti abbiamo:

(4.9) $$-\alpha S\alpha\varrho = \alpha|\alpha|\,|\varrho|\cos\delta$$

che è appunto la proiezione di ϱ sull'asse fisso di rotazione. Se dunque vogliamo far ruotare rigidamente il punto ϱ di un angolo θ dobbiamo soffermarci sul secondo termine $-\alpha V\alpha\varrho$ della (4.8), che peraltro è un vettore perpendicolare a α. $-\alpha V\alpha\varrho$ viene fatto ruotare moltiplicandolo per $(\cos\theta + \alpha\sin\theta) = \alpha^{2\theta/\pi}$ (vedi poi (4.14)). Infatti, se la rotazione fosse di $\pi/2$, essa, utilizzando l'analogia con quanto Tait fa con i *versori quadrantali* ([22]), verrebbe espressa con $\alpha(-\alpha V\alpha\varrho)$; α è un vettore unitario, ma è anche un particolare quaternione unitario. Esso è un caso particolare del quaternione unitario $(\cos\theta + \alpha\sin\theta) = q$ quando $\theta = \pi/2$. Poiché dobbiamo rappresentare una rotazione di un angolo θ in generale diversa da $\pi/2$, dovremmo moltiplicare per q, avremo cioè: $q\,(-\alpha V\alpha\varrho)$. Dunque di seguito risulterà:

$$(\cos q + \alpha\sin\theta)(-\alpha V\alpha\varrho) =$$

$$= -\alpha V\alpha\varrho\cos\theta - \alpha^2 V\alpha\varrho\sin\theta = -\alpha V\alpha\varrho\cos\theta + V\alpha\varrho\sin\theta$$

cioè:

$$-\alpha^{2\theta/\pi}(\alpha V\alpha\varrho) = -\alpha V\alpha\varrho\cos\theta + V\alpha\varrho\sin\theta \tag{4.10}$$

essendo, come abbiamo posto, $\alpha^{2\theta/\pi}$ un modo abbreviato per scrivere $(\cos\theta + \alpha\sin\theta)$.

Perciò da (4.9) e (4.10), per ϱ_1, che è la posizione di ϱ dopo la rotazione, si ha:

$$\varrho_1 = -\alpha S\alpha\varrho - \alpha V\alpha\varrho\cos\theta + V\alpha\varrho\sin\theta \tag{4.11}$$

Riassumendo, riusciamo a determinare ϱ_1 in base alle condizioni:

$$S\alpha\varrho_1 = S\alpha\varrho \qquad V\alpha\varrho_1 = p^2 V\alpha\varrho \tag{4.12}$$

dove $p = (\cos\theta/2 + \alpha\sin\theta/2)$ è un quaternione unitario (per il quale vale, come sappiamo, la proprietà $p^{-1} = p^*$).

Con conti tutt'altro che brevi (da Tait sottintesi ma esplicitati nell'edizione francese) si ha alla fine che:

$$\varrho_1 = p\varrho p^{-1} = p\varrho p^* = \tag{4.13}$$

$$= (\cos\theta/2 + \alpha\sin\theta/2)\,\varrho(\cos\theta/2 - \alpha\sin\theta/2) = \alpha^{\theta/\pi}\varrho\alpha^{-\theta/\pi}$$

dove appunto $q = (\cos\theta + \alpha\sin\theta) = \alpha^{2\theta/\pi}$. Quindi è come aver dimo-

([22]) Vedi P. G. Tait, ibid §§ 64-72.

strato che dato un qualunque quaternione unitario q, per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3$ l'azione dell'operatore:

$$R^q(\boldsymbol{v}) = q\boldsymbol{v}q^*$$

esprime geometricamente una rotazione di $\boldsymbol{v}$ di un angolo 2θ attorno a $\boldsymbol{q}$, preso come asse di rotazione ([23]). Si constata immediatamente che $R^q(\boldsymbol{v})$ è un operatore *lineare*.

([23]) La predetta dimostrazione si può ottenere anche (vedi J. B. Kuipers [1999] pp. 128-134) facendo vedere come interviene la:

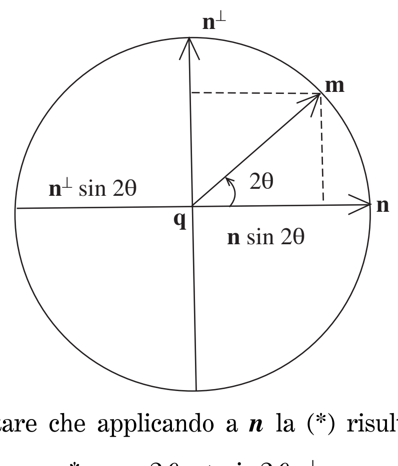
$$q\boldsymbol{v}q^* = (q_0^2 - |\boldsymbol{q}|^2)\,\boldsymbol{v} + 2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{q} + 2q_0(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v}) \tag{*}$$

Scomponiamo infatti il vettore $\boldsymbol{v}$ in due componenti ortogonali fra di loro, una, che indicheremo con $\boldsymbol{a}$, secondo il vettore $\boldsymbol{q}$ e l'altra secondo il vettore perpendicolare a $\boldsymbol{q}$ e la indicheremo con $\boldsymbol{n}$. Potremmo scrivere allora: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{n}$.

Nella rotazione attorno a $\boldsymbol{q}$ è geometricamente ovvio che la relativa componente $\boldsymbol{a}$ di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{q}$ resti inalterata. Applicando la (*) ciò è verificato. Se $\boldsymbol{a}$ rimane fisso chi dovrà ruotare è $\boldsymbol{n}$, che appunto ruota (in senso antiorario) in un piano T perpendicolare a $\boldsymbol{q}$. Supponiamo che $\boldsymbol{n}$ ruoti di un angolo 2θ andando a sovrapporsi ad $\boldsymbol{m}$, avremo allora:

$$\boldsymbol{m} = \cos 2\theta\boldsymbol{n} + \sin 2\theta\boldsymbol{n}^\perp$$

essendo $\boldsymbol{n}^\perp$ un vettore unitario appartenente a T e perpendicolare a $\boldsymbol{n}$ (vedi figura sottostante).



Possiamo ora constatare che applicando a $\boldsymbol{n}$ la (*) risulta:

$$q\boldsymbol{n}q^* = \cos 2\theta\boldsymbol{n} + \sin 2\theta\boldsymbol{n}^\perp = \boldsymbol{m}$$

Avremo quindi:

$$\boldsymbol{w} = q\boldsymbol{v}q^* = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{m}$$

Si può infine verificare che i vettori $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^\perp$ e $\boldsymbol{m}$ hanno la stessa lunghezza.

È dunque il quaternione unitario, la cui espressione è appunto:

$$q = q_0 + \boldsymbol{q} = \cos\theta + \boldsymbol{u}\sin\theta \tag{4.14}$$

(per ogni angolo $-\pi < \theta \leqslant \pi$ e dove $\boldsymbol{u}$ è un vettore unitario che rappresenta la direzione di $\boldsymbol{q}$, cioè $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{q}/|\boldsymbol{q}|$) che consente di rappresentare adeguatamente le rotazioni di un angolo 2θ nello spazio tridimensionale.

5. – Conclusioni.

Non c'è dubbio che alcune considerazioni comparative siano immediate. Da un punto di vista geometrico, seppur nelle loro specificità, come abbiamo visto (confronta (2.10) e (4.13)), i quaternioni estendono a tre dimensioni quanto i numeri complessi permettono di fare, in materia di rotazioni e dilatazioni, nel piano. Ma l'analogia si ferma qui. Infatti sempre limitandoci agli aspetti geometrici elementari, un punto nel piano può essere rappresentato (vettorialmente) con un numero complesso, mentre un punto nello spazio tridimensionale non può essere rappresentato con un quaternione, dal momento che un quaternione può essere visto come un vettore quadridimensionale. Si dimostra agevolmente che i quaternioni determinano uno spazio vettoriale quadridimensionale su $\boldsymbol{R}$ con base 1, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{ij}$ ([24]). D'altronde tra Ottocento e Novecento gli studi dei quaternionisti si intersecarono con le ricerche sulla geometria sintetica quadridimensionale ([25]). Da un punto di vista algebrico sono altrettanto significative le differenze: i numeri complessi sono un campo, i quaternioni un corpo non commutativo. La cosa storicamente è assai rilevante se si pensa alle convinzioni legate alle idee di G. Peacock, in particolare al *principio di permanenza* in base al quale le generalizzazioni simbolico algebriche non avrebbero dovuto distaccarsi dalle leggi della struttura concreta di riferimento, in altre parole da quelle dei numeri. Quindi la non-commutatività doveva quanto meno considerarsi una legge anomala, come d'altronde alcune leggi (ad

([24]) Vedi S. Mac Lane, G. Birkhoff [1965 (1975)] p. 266.

([25]) Vanno rammentati in particolare le ricerche di Arthur S. Hathaway (1897, 1902) e Irving Stringham (1901, 1905).

es. l'idempotenza per il prodotto) dell'algebra-logica proposta nel 1847 e nel 1854 da George Boole. Ambedue le strutture ora citate hanno un referente semantico di origine ben preciso: i quaternioni hanno un inequivocabile significato geometrico, l'algebra di Boole si riconduce all'algebra degli insiemi. Curiosamente Tait in un passo del suo *Elementary Treatise on Quaternions* ([26]) si sofferma sulle analogie commutative delle due algebre, facendo notare che «the symbols S, V, K are commutative» risultando:

$$SKq = KSq = Sq \qquad \text{e} \qquad VKq = KVq = -Vq$$

come lo sono le operazioni (somma logica e prodotto logico) tra i «simboli elettivi», cioè tra simboli denotanti estensioni di concetti. Operazioni che nell'uno e l'altro caso hanno per oggetto «operatori».

Anche sulle origini dei due tipi di numeri, complessi e quaternioni, non ci sono analogie. A parte la differenza dei rispettivi periodi storici (XVI secolo i primi, XIX secolo i secondi), i numeri complessi nascono da problemi legati alle soluzioni delle equazioni algebriche, mentre i quaternioni scaturiscono da esigenze geometriche conseguenti — come abbiamo visto — dal dare un significato al prodotto o al quoziente tra vettori nello spazio tridimensionale. Relativamente all'algebra delle matrici, che via via andrà a soppiantare per gli aspetti algebrico lineari le tecniche di calcolo geometrico, vanno sottolineate le connessioni tra $SO(2)$ e i numeri complessi e tra $SO(3)$ e i quaternioni. Tuttavia le tecniche quaternionali basilari, integrate con quelle matriciali, hanno mantenuto tutt'oggi un certo interesse anche in questioni applicative ([27]).

Ampio fu l'interesse nella seconda metà dell'Ottocento per i quaternioni, che attirarono sia opinioni favorevoli se non addirittura entusiaste, sia fortemente critiche. Taluni ampliarono l'apparato concettuale, introducendo altre forme di numeri ipercomplessi (ad es. *biquaternioni*, *ottetti*). In tal senso vanno quanto meno rammentati Arthur Cayley (1821-1895), William Kingdon Clifford (1845-1879), James Clerk Maxwell (1831-1879), Josiah Willard Gibbs (1839-1903),

([26]) Vedi p. 49 della terza edizione (1890) di P. G. Tait [1867].

([27]) A titolo di esempio citeremo J. B. Kuipers [1999], M.-F. Vignéras [1980] e (P. Freguglia, G. Turchetti ed. by [2002]).

Oliver Heaviside (1850-1925), Benjamin Peirce (1809-1880) e F.Georg Frobenius (1849-1917). Sull'opera di questi matematici e fisici dovremo però ritornare in altra occasione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

T. ARCHIBALD, *Priority claims and mathematical values: disputes over quaternions at the end of the nineteenth century*, in (Lützen, J. ed. by, pp. 255-269), 2001.

B. BELLONE, *Il mondo di carta, ricerche sulla seconda rivoluzione scientifica*, EST Mondadori, Milano, 1976.

D. BLOOR, *Hamilton and Peacock on the Essence of Algebra*, Soc. Hist. of XIX Cent. Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 1981, pp. 202-232.

G. BELLAVITIS, *Saggio sull'algebra degli immaginari*, in Memorie dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1852, pp. 243-344.

G. BELLAVITIS, *Sposizione del metodo delle equipollenze*, in Memorie della Società Italiana delle Scienze, vol. XXV, Modena, 1854, pp.1-85.

G. BELLAVITIS, *Calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton e sua relazione con il calcolo delle equipollenze*, in Memorie della Società Italiana delle Scienze (t. I, s. II), 1858, pp. 27-40.

É. BOREL - R. DELTHEIL, *La Géométrie et les Imaginaires*, éditions Albin Michel, Paris, 1931.

U. BOTTAZZINI, *Sul Calcolo geometrico di Peano*, Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica (San Gemignano 4-8 dic. 1982), CLUEB, Bologna, 1983, pp. 331-336.

S. CAPARRINI, *Early Theories of Vectors*, Essays on the History of Mechanics, in Memory of C. A. Truesdell and E. Benvenuto, ed. by M. Corradi et al., Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 179-198.

L. CARNOT, *Géométrie de Position*, J.B.M. Duprat, Paris, 1803.

E. CARTAN, *Nombres Complexes, exposé d'après l'article allemand de E. Study*, Encyclopédie des Sciences Mathématiques, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1907, pp. 329-468.

M. J. CROWE, *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*, Univ. of Notre Dame, N.D. Indiana, 1967.

P. FREGUGLIA, *I quaternioni: una chiave di lettura dell'universo*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, s. V, v. IX, part II, 1985, pp. 211-216.

P. FREGUGLIA, *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contributo italiano al calcolo geometrico*, QuattroVenti ed., Urbino, 1992.

P. FREGUGLIA, *Il contributo di Giuseppe Peano e della sua scuola al calcolo geometrico*, Peano e i fondamenti della matematica, Atti del Convegno (Modena 22-24 ott. 1991), Mucchi, Modena, 1993, pp. 255-285.

P. FREGUGLIA, *Bellavitis's Equipollences Calculus and his Theory of Complex Numbers*, in (Lützen, J. ed. by, pp. 181-203), 2001.

(P. FREGUGLIA - G. TURCHETTI, ed. by), *Mechanics and Geometry*, QuattroVenti editore, Urbino, 2002.

H. G. GRASSMANN, *Die lineale Ausdehnungslehre*, *eine neuer Zweig der Mathematik*, 1844, in *G.W.* (Teubner), Leipzig, 1894.

W. R. HAMILTON, *On Quaternions*, Proceedings of the Royal Irish Academy, 3 (1847), 1-16.

W. R. HAMILTON, *Lectures on Quaternions*, Hodges and Smith, Dublin, 1853.

W. R. HAMILTON, *Elements of Quaternions*, Longmans, Green & C., London, 1866.

J. HOÜEL, *Sur les calcul des équipollences, méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis*, Gauthier-Villars, Paris, 1869.

J. B. KUIPERS, *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton University Press, Princeton, 1999.

C. A. LAISANT, *Introduction à la méthode des Quaternions*, Gauthier-Villars, Paris, 1881.

C. A. LAISANT, *Théorie et Applications des équipollences*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.

(J. LÜTZEN, ed. by), *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*, C. A. Reitzels Forlag, Copenhagen, 2001.

S. MAC LANE - G. BIRKHOFF, *Algebra* (trad. it.), U. Mursia ed., Milano, 1975.

A. MC AULAY, *Utility of Quaternions in Physics*, Mac Millan and Co., London, 1893.

A. F. MÖBIUS, *Der barycentrische Calcul. Ein neue Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, in G.W. (Hirzel), Leipzig, 1885-87.

L. SINÈGRE, *Les quaternions et le mouvement du solide autour d'un point fixe chez Hamilton*, Revue d'histoire des mathématiques, I, 1995, pp. 83-109.

(G. SCHUBRING, ed. by), *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1996.

P. G. TAIT, *Elementary Treatise on Quaternions*, Cambridge University Press, 1873 (prima edizione 1867), edizione francese tradotta sulla seconda edizione inglese a cura di G. Plarr, Gauthier-Villars, Paris, 1882.

M.-F. VIGNÉRAS, *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Paolo Freguglia, Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
Università di L'Aquila