Bollettino
Unione Matematica Italiana

Saoussen Kallel-Jallouli

Régularité Gevrey des solutions de l'équation de Monge-Ampère réelle

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-B** (2003), n.3, p. 629–656.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6B_3_629_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
(8) **6**-B (2003), 629-656

Régularité Gevrey des Solutions de l'Équation de Monge-Ampère réelle.

SAOUSSEN KALLEL-JALLOULI

Sunto. – *In questo lavoro consideriamo il problema di Dirichlet associato ad un'equazione generale di Monge-Ampère:*

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \det\,(u_{ij}+a_{ij}(x,\,u,\,\nabla u)) = K(x)\, f(x,\,u,\,\nabla u) \ \text{ in } \ \Omega\subset\mathbb{R}^n \\ u\,|_{\partial\Omega}=\varphi \end{cases}$$

dove la curvatura K soddisfa $K>0$ in Ω, $K=0$ $dK\neq 0$ su $\partial\Omega$, ed f è strettamente positivo. Proviamo che se i dati Ω, a_{ij}, K, f, φ sono in una classe di Gevrey, ogni soluzione C^3 (C^2 se $n=2$) del problema (0.1) *sta nella stessa classe di Grevey su $\overline{\Omega}$.*

Summary. – *We consider in this work the Dirichlet problem associated to a general Monge-Ampère equation:*

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \det\,(u_{ij}+a_{ij}(x,\,u,\,\nabla u)) = K(x)\, f(x,\,u,\,\nabla u) \ \text{ in } \ \Omega\subset\mathbb{R}^n \\ u\,|_{\partial\Omega}=\varphi \end{cases}$$

where the curvature K satisfies: $K>0$ in Ω, $K=0$ $dK\neq 0$ on $\partial\Omega$, and f is strictly positive. We prove that if the data Ω, a_{ij}, K, f, φ are in a Gevrey class, every C^3 solution (C^2 if $n=2$) of problem (0.1) *is in the same Gevrey class on $\overline{\Omega}$.*

Introduction.

L'objet de ce travail est l'étude de la régularité Gevrey au bord des solutions réelles du problème de Dirichlet associé à une équation de Monge-Ampère générale dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$:

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \det(u_{ij}+a_{ij}(x,\,u,\,\nabla u)) = K(x)\, f(x,\,u,\,\nabla u) \\ u\,|_{\partial\Omega}=\varphi \end{cases}$$

les données a_{ij}, K, f, φ et Ω étant réelles et supposées appartenir à une classe de Gevrey d'ordre $s>1$ de leurs arguments.

Ce type d'équations contient «l'équation de la courbure de Gauss» et intervient classiquement dans le problème du prolongement isométrique des variétés Riemanniennes dans des espaces euclidiens (cf. [4], [9], [11]).

L'existence et la régularité C^∞ des solutions d'un tel problème a fait l'objet de nombreuses publications lorsque la courbure K (et f) est strictement positive dans $\overline{\Omega}$. Nous renvoyons aux articles [3], [10], [11] et à leurs bibliographies pour précisions et développements.

La difficulté principale réside dans le fait que l'on permet ici à K de s'annuler au bord de Ω. Plus précisément on supposera que:

$$\begin{cases} K > 0 \ \text{ dans } \Omega \\ K = 0,\ dK \neq 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \\ f(x, u, p) > 0,\ \forall (x, u, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{0.2}$$

Sous cette condition, J. Hong et C. Zuily [7] ont récemment montré que toute solution «convexe» assez régulière et non caractéristique de (0.1) est C^∞ sur $\overline{\Omega}$. On montre ici qu'une telle solution est alors Gevrey jusqu'au bord.

En s'inspirant de [7] on montre qu'après un certains nombre de réductions préliminaires, un changement de variables dépendant de la solution permet de se ramener à un système dont la partie principale est diagonale et composée d'équations de Tricomi. La régularité Höldérienne de telles équations a été étudiée par A. El Baraka [6] et J. Hong-C. Zuily [7]. Les estimations qui y sont démontrées permettent de mettre en œuvre la technique classique des «ouverts emboîtés» (cf. [1], [2], [5], [8]) convenablement modifiée pour l'adapter au cas non linéaire. Notons cependant que cette modification ne permet pas d'atteindre la régularité analytique qui dans le cas des équations de Tricomi linéaires a été prouvée par M. Derridj-C. Zuily [5]. Le changement de variables effectué dépendant de la solution, il est nécessaire de montrer avec soin que les estimations satisfaites par les solutions du système de Tricomi fournissent des estimations adéquates pour la solution de (0.1). Cela est fait tout d'abord pour les dérivées «presque tangentielles» et ensuite, utilisant l'équation, pour les autres.

I. – Enoncé des résultats.

I.1. *Notations.* On utilise les notations usuelles: pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-indice de $\mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$
$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On considère dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ assez régulier (Gevrey d'ordre s) l'équation de Monge-Ampère:

$$\det\big(Z_{ij} + a_{ij}(x; (\partial_x^\alpha Z)_{|\alpha| \leq 1})\big) = K(x)\, f(x; (\partial_x^\alpha Z)_{|\alpha| \leq 1}) \tag{I.1}$$

avec la condition au bord:

$$Z|_{\partial\Omega} = \varphi \,. \tag{I.2}$$

Ici Z désigne une fonction réelle de classe C^2, $Z_{ij} = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}$ et det est la fonction déterminant; les données K, φ, a_{ij} et f sont Gevrey d'ordre s respectivement sur $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega$ et $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{n+1}$. On supposera dans la suite que:

$$\begin{cases} K > 0 \ \text{ dans } \ \Omega \\ K = 0, \ dK \neq 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega \\ f(x, p) > 0, \ \forall (x, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{n+1}. \end{cases} \tag{I.3}$$

I.2. *Résultats.* Le résultat principal est le:

THÉORÈME I.1. – *Sous les conditions* (I.3) *toute solution réelle Z de* (I.1), (I.2), $Z \in C^2(\overline{\Omega})$ *si* $n=2$ ($Z \in C^3(\overline{\Omega})$ *si* $n \geqslant 3$) *vérifiant* $(Z_{ij} + a_{ij}(x, \partial_x^\alpha Z, |\alpha| \leqslant 1)) \geqslant 0$, *est en fait dans* $G^s(\overline{\Omega})$, *si* $\partial\Omega$ *est non caractéristique pour* (I.1).

Ce théorème va découler des deux résultats suivants:

THÉORÈME I.2. – *Sous les conditions* (I.3) *toute solution réelle Z de* (I.1), (I.2), $Z \in C^2(\overline{\Omega})$ *si* $n \geqslant 2$ ($Z \in C^3(\overline{\Omega})$ *si* $n \geqslant 3$) *vérifiant* $(Z_{ij} + a_{ij}(x; \partial^\alpha Z, |\alpha| \leqslant 1)) \geqslant 0$, *est en fait dans* $C^\infty(\overline{\Omega})$, *si* $\partial\Omega$ *est non caractéristique pour* (I.1).

Ce résultat a été énoncé et démontré dans [7].

THÉORÈME I.3. – *Sous les conditions* (I.3) *toute solution réelle* $Z \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *de* (I.1), (I.2), *vérifiant* $(Z_{ij} + a_{ij}(x; \partial^\alpha Z, |\alpha| \leqslant 1)) \geqslant 0$, *appartient à* $G^s(\overline{\Omega})$ *si* $\partial\Omega$ *est non caractéristique pour* (I.1).

Remarquons qu'à l'intérieur de Ω, $Z \in G^s(\Omega)$ puisque $K > 0$ dans Ω i.e.: l'équation (I.1) est elliptique.

Il reste à montrer que Z est Gevrey d'ordre s jusqu'au bord. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

II. – Preuve.

Notons $F[x] = F(x, (\partial^\alpha Z)_{|\alpha| \leqslant 2}) = \det(Z_{ij} + a_{ij})$.

II.1. *Réduction du problème.*

A. Première réduction. Soit p un point du bord que l'on peut supposer être l'origine.

En translatant Z par un polynôme de degré 7 en x on peut supposer que $\partial^\alpha Z(p) = 0$ pour tout $|\alpha| \leqslant 7$.

Soit $G(x) = 0$ l'équation du bord $\partial\Omega$ près de l'origine, celui-ci étant non caractéristique pour (I.1), on a:

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} F^{ij} \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \bigg|_{\partial\Omega} \neq 0 \qquad \text{où} \quad F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial Z_{ij}} .$$

Par suite, il existe i, j tels que $F^{ij}(0) \neq 0$; ceci implique que la matrice $(a_{ij}(0))_{1 \leqslant i, j \leqslant n} = A$ est de rang $n-1$, comme par hypothèse $(a_{ij}(0))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \geqslant 0$ et puisque l'équation (I.1)-(I.3) est invariante par rotation des coordonnées, il existe des coordonnées dans lesquelles l'équation s'écrit:

$$\det(Z_{ij} + A_{ij}(x; (\partial_x^\alpha Z)_{|\alpha| \leqslant 1})) = K(x)\, f(x; (\partial_x^\alpha Z)_{|\alpha| \leqslant 1}) \tag{II.1}$$

avec la condition au bord:

$$Z|_{\partial\Omega} = \varphi \qquad \text{et} \tag{II.2}$$

$$\begin{cases} A_{ij}(0) = \delta_i^j \text{ pour } 1 \leqslant i, j \leqslant n-1 \text{ et } A_{ij}(0) = 0 \text{ sinon} \\ \partial^\alpha Z(0) = 0, \ \forall |\alpha| \leqslant 7 . \end{cases} \tag{II.3}$$

Réécrivons le fait que $\partial\Omega$ est non caractéristique pour (II.1) en 0, il vient:

$$\sum F^{ij} \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}(0) = F^{nn} \left(\frac{\partial G}{\partial x_n} \right)^2 (0) \neq 0 . \tag{II.4}$$

On peut réécrire l'équation de $\partial\Omega$ près de l'origine sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & x_n = g(x') \quad \text{où} \quad g \in G^s \quad \text{prés de } 0, \ g(0) = 0 \\ & \text{et} \ \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1; \ldots; n-1 . \end{aligned} \tag{II.5}$$

B. Applatissement du bord. On introduit le changement de variables suivant:

$$(x'; x_n) \xrightarrow{C} (y'; y_n) = (x'; x_n - g(x)) . \tag{II.6}$$

On pose:

(II.7) $$\tilde{Z}(y) = Z(x) \quad \text{i.e.:} \quad Z = \tilde{Z} \circ C$$

«C» est un difféomorphisme local, de même régularité que $\partial\Omega$. Et

(II.8) $$(\tilde{Z}_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & -\nabla g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (Z_{ij}) \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\nabla g & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (g_{ij}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z_n .$$

Par conséquent, dans les nouvelles coordonnées on a:

(II.9) $$F(y; (\partial^\alpha Z)_{|\alpha| \leq 2}) = \det(\tilde{Z}_{ij} + \tilde{A}_{ij}) = \tilde{K}\tilde{f}; \qquad y_n > 0$$

(II.10) $$\tilde{Z}(y'; 0) = \varphi \in G^s(\mathbb{R}^{n-1})$$

avec

(II.11) $$\begin{cases} \tilde{A}_{ij}(0) = \delta_i^j \ \text{ si } \ 1 \leq i, j \leq n-1 \ \text{ et } \ \tilde{A}_{ij} = 0 \ \text{ sinon} \\ \partial^\alpha \tilde{Z}(0) = 0, \quad \text{pour } \ |\alpha| \leq 7 . \end{cases}$$

Dans toute la suite on pose $Z \doteqdot \tilde{Z}$, $A \doteqdot \tilde{A}$, $K \doteqdot \tilde{K}$ et $f \doteqdot \tilde{f}$ pour simplifier les notations.

C. Réduction à un opérateur de Tricomi. On considère la transformation $y = (y'; y_n) \xrightarrow{\chi} (u; v)$ donnée par:

(II.12) $$\begin{cases} v = y_n \\ u_i = \chi_i(y) = y_i - y_n \dfrac{F^{ni}}{F^{nn}}[y] . \end{cases}$$

Remarques.

(II.13) a) $$\chi_i(y; 0) = y_i \qquad \frac{\partial \chi_i}{\partial y_n}(y'; 0) = -\frac{F^{ni}}{F^{nn}}[(y'; 0)]$$

b) (II.11) implique que:

(II.14) $$\frac{\partial^2 F}{\partial Z_{ij}\, \partial Z_{nn}}(0) = \delta_i^j; \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \ \text{ et } \ F^{nn}(0) = 1 .$$

c) Près de l'origine, χ est un difféomorphisme C^∞.

LEMME II.1 ([12], Lemme 1.6).

$$F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Z_{ij} \, \partial Z_{nn}} = F^{ij} F^{nn} - F^{nj} F^{ni}. \tag{II.15}$$

NOTATION. – On notera $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des fonctions f de la forme:

$$f(y) = \underline{f}(y ; (\partial^{\alpha} Z)_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ \alpha_n \leqslant 1}})$$

où Z est une solution C^{∞} de l'équation (II.9) et $\underline{f}$ est Gevrey d'ordre s de ses arguments.

REMARQUES II.2.

(i) $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_{k+1}$.

(ii) $\mathcal{E}_k = \{ f / f(y) = \underline{f}(y ; (\partial^{\alpha} Z)_{|\alpha| \leqslant k})$ où $\underline{f}$ est Gevrey d'ordre s de ses arguments$\}$.

(iii) Si $f \in \mathcal{E}_k$ alors pour $i = 1, \ldots, n$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_i} \in \mathcal{E}_{k+1}$.

(iv) $\dfrac{\partial y_i}{\partial u_j} = b_{ij} \circ \chi^{-1}$ où $b_{ij} \in \mathcal{E}_3$.

LEMME II.3. – *Pour tous* $1 \leqslant k, q \leqslant n-1$ *il existe* a_k, $a_{kq} \in \mathcal{E}_3$ *telles que:*

$$\text{(II.16)} \quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \sum_{i=1}^{n} F^{ni} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} = y_n a_k \\ &\text{b)} \quad \sum_{i,j=1}^{n} F^{ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \chi_q}{\partial y_j} = y_n a_{kq} ; \; a_{kq}(0) = \frac{\partial K}{\partial y_n}(0) \, f(0) \, \delta_k^q . \end{aligned}$$

PREUVE:

a) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} F^{ni} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} =$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F^{ni} \left(\delta_i^k - y_n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}} \right) \right) + F^{nn} \left\{ - \frac{F^{nk}}{F^{nn}} - y_n \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}} \right) \right\}$$

$$= F^{nk} - y_n \sum_{i=1}^{n} F^{ni} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}} \right) - F^{nk} - y_n \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}} \right)$$

$$= - y_n \sum_{i=1}^{n} F^{ni} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}} \right).$$

On pose alors: $a_k = -\sum_{i=1}^{n} F^{ni} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}}\right)$.

b)
$$\sum_{i,j=1}^{n} F^{ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \chi_q}{\partial y_j} = \sum_{i,j=1}^{n-1} F^{ij}\left(\delta_i^k - y_n \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}}\right)\right)\left(\delta_j^q - y_n \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{F^{nq}}{F^{nn}}\right)\right) +$$
$$\sum_{j=1}^{n-1} F^{nj}\left(-\frac{F^{nk}}{F^{nn}} - y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}}\right)\right)\left(\delta_j^q - y_n \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{F^{nq}}{F^{nn}}\right)\right) +$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} F^{ni}\left(\delta_i^k - y_n \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}}\right)\right)\left(-\frac{F^{nq}}{F^{nn}} - y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{F^{nq}}{F^{nn}}\right)\right) +$$
$$F^{nn}\left(-\frac{F^{nk}}{F^{nn}} - y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}}\right)\right)\left(-\frac{F^{nq}}{F^{nn}} - y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{F^{nq}}{F^{nn}}\right)\right).$$

Par suite:

$$\text{(II.17)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} F^{ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \chi_q}{\partial y_j} = F^{qk} - F^{nq} \frac{F^{nk}}{F^{nn}} + y_n a + y_n^2 b\,.$$

En utilisant la relation (II.15), on peut exprimer a et b comme suit:

$$\text{(II.18)} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{F}{F^{nn}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial Z_{iq}\partial Z_{nn}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial Z_{ik}\partial Z_{nn}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{F^{nq}}{F^{nn}}\right)\right\} \\ b = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} F^{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{F^{nk}}{F^{nn}}\right) \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{F^{nq}}{F^{nn}}\right). \end{cases}$$

Donc $a,\ b \in \mathcal{E}_3$.

D'après le lemme II.1, l'égalité (II.17) peut s'écrire:

$$\sum_{i,j=1}^{n} F^{ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \chi_q}{\partial y_j} = K \frac{f}{F^{nn}} \frac{\partial^2 F}{\partial Z_{qk}\partial Z_{nn}} + y_n(a + y_n b)\,.$$

Comme par hypothèse $K|_{y_n=0} = 0$, on a alors $\sum_{i,j=1}^{n} F^{ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \chi_q}{\partial y_j} = y_n a_{kq}$ avec $a_{kq} \in \mathcal{E}_3$ et $a_{kq}(0) = \frac{\partial K}{\partial y_n}(0)\, f(0)\, \delta_k^q$.

NOTATION. – Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $|\alpha| = 4$. On pose:

$$W = (W^\alpha)_{|\alpha|=4} \quad \text{où} \quad W^\alpha \circ \chi = \partial_{y'}^\alpha Z, \quad \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, \quad |\alpha| = 4\,.$$

LEMME II.4. – *Soit F une fonction de $(y, \partial^\gamma Z, |\gamma| \leqslant 2)$, Gevrey d'ordre s de ses arguments.*

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $|\alpha| = 4$. Alors pour tous $i, j = 1, \ldots, n$

et $|\beta| \leqslant 3$ *il existe* $b_\alpha \in \mathcal{E}_4$ *et* $b_{\alpha\beta ij} \in \mathcal{E}_4$ *telles que:*

$$\partial^\alpha_{y'}\big(F(y;(\partial^\gamma Z)_{|\gamma|\leqslant 2})\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Z_{ij}} \partial^\alpha_{y'} Z_{ij} + \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|\alpha|-1\\ i,j\leqslant n}} b_{\alpha\beta ij}\, \partial^\beta_{y'} Z_{ij} + b_\alpha. \tag{II.19}$$

PROPOSITION II.5. – $W = (W^\alpha)_{|\alpha|=4}$ *vérifie le système suivant*:

$$L_Z W^\alpha + \sum_{|\beta|=4} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_{\alpha\beta i}\, \partial_{u_i}\Big) W^\beta = G_\alpha, \quad v>0 \ \textit{près de l'origine} \tag{II.20}$$

où L_Z *est un opérateur de Tricomi donné par:*

$$L_Z = \partial_v^2 + v \sum_{j=1}^{n-1} a_j\, \partial_v\, \partial_{u_j} + v \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\, \partial_{u_i}\, \partial_{u_j} \tag{II.21}$$

avec

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \ a_j\circ\chi,\ a_{ij}\circ\chi,\ b_{\alpha\beta i}\circ\chi \in \mathcal{E}_4 \\ \text{(ii)}\ \ \textit{la matrice } (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \textit{ est définie positive près de l'origine.} \end{cases} \tag{II.22}$$

PREUVE. – On applique l'opérateur de dérivation $\partial^\alpha_{y'}$, avec $|\alpha| = 4$, à l'équation (II.9).

On obtient par application du lemme II.4:

$$\sum_{i,j=1}^{n} F^{ij}\, \partial^\alpha_{y'} Z_{ij} + \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|\alpha|-1\\ i,j\leqslant n}} b_{\alpha\beta ij}\, \partial^\beta_{y'} Z_{ij} + b_\alpha = \tag{II.23}$$

$$\partial^\alpha_{y'}\big(Kf(y,(\partial^\gamma Z)_{|\gamma|\leqslant 1})\big) = \sum_{i=1}^{n} K \frac{\partial f}{\partial Z_i} \partial^\alpha_{y'} Z_i + b \ \text{ avec } b \in \mathcal{E}_4.$$

En utilisant le changement de variables donné par (II.12) et en posant $W^\alpha \circ \chi = \partial^\alpha_{y'} Z$, l'équation (II.23) donne:

$$\partial_v^2 W^\alpha \circ \chi + 2 \sum_{\substack{p\leqslant n-1\\ j\leqslant n}} \frac{F^{nj}}{F^{nn}} \frac{\partial \chi_p}{\partial y_j} \partial_v\, \partial_{u_p} W^\alpha \circ \chi + \tag{II.24}$$

$$\sum_{\substack{k,q\leqslant n-1\\ i,j\leqslant n}} \frac{F^{ij}}{F^{nn}} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j} \partial_{u_k}\, \partial_{u_q} W^\alpha \circ \chi + \sum_{\substack{i\leqslant n\\ |\beta|=4}} b_{\alpha\beta i}\, \partial_{u_i} W^\beta \circ \chi = G_\alpha$$

avec $b_{\alpha\beta i}$, $G_\alpha \in \mathcal{E}_4$.

Utilisons maintenant le lemme II.3 pour remplacer $\displaystyle\sum_{j\leqslant n} \frac{F^{nj}}{F^{nn}} \frac{\partial \chi_p}{\partial y_j}$ par $y_n a_p$

et $\sum_{i,j\leq n} F^{ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \chi_q}{\partial y_j}$ par $y_n a_{kq}$ dans l'équation (II.24), on obtient alors l'équation (II.20).

REMARQUE.

$$W|_{v=0} \in G^s \text{ près de l'origine.} \tag{II.25}$$

En effet, sachant que $W^\alpha = \partial^\alpha Z \circ \chi^{-1}$ et en tenant compte de (II.12) on trouve: $W^\alpha(u;0) = \partial^\alpha Z \circ \chi^{-1}(u;0) = \partial^\alpha Z(u;0)$, or par hypothèse $\partial^\alpha Z|_{y_n=0} \in G^s$, d'où notre remarque.

II.2. *Estimations Höldérienne.* Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de régularité C^ϱ jusqu'au bord obtenus par El Baraka [6] pour les solutions d'équations de type (II.21) et les appliquons à notre cas. Pour $0 < \varrho < 1$, rappelons que $C^\varrho(\mathbb{R}^n_+)$ est défini comme étant l'espace des $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ telles que $\sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\varrho} < +\infty$ muni de la norme:

$$\|u\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^n_+)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+)} + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\varrho}.$$

On considère l'opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par:

$$L \equiv \partial_t^2 + \sum_{j,k=1}^n a_{j,k}(t,x')\, t\partial_{x_j}\partial_{x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(t,x')\, t\partial_{x_j}\partial_t$$
$$+ \sum_{j=1}^n c_j(t,x')\, \partial_{x_j} + c(t,x')\, \partial_t + d(t,x')$$

dont les coefficients sont C^∞ sur $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$.

Considérons l'hypothèse: (H) $a_{j,k}$, b_j, c_j, c, d sont constants à l'extérieur d'un compact K de $\overline{\mathbb{R}}^n_+$. De plus la matrice (a_{jk}) est définie positive sur $\overline{\mathbb{R}}^n_+$.

THÉORÈME II.6. – *Sous l'hypothèse* (H) *on a: pour tout compact K de $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$, il existe $C_K > 0$ telle que pour tout $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ à support dans K on ait:*

$$\|\partial_t^2 u\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \tag{II.26}$$
$$\sum_{i,j\leq n}^n \|t\partial_{x_j}\partial_{x_i} u\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_i \|t\partial_{x_i}\partial_t u\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \|u\|_{C^{\varrho+4/3}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq$$
$$C_K\{\|Lu\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \|\gamma_0 u\|_{C^{\varrho+4/3}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\}$$

où par définition $(\gamma_0 u)(x') = u(x',0)$ *et* $\varrho \in]0;1[\setminus\{2/3\}$.

Ce théorème est énoncé et démontré dans [6] (théorème 3.3.3).

LEMME II.7. – *Soit* $B_r = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} / |(u, v)| < r$ *et* $v \geqslant 0\}$.
Soit $A(x)$ *une matrice de fonctions* C^∞, *définie positive sur* B_{r_1} $(r_1 > 0)$. *On peut construire* $\tilde{A}$ *vérifiant:*

(i) $\tilde{A}(x)$ *est définie positive sur* $\overline{\mathbb{R}}^n_+$.

(ii) $\tilde{A} = A$ *près de l'origine.*

(iii) $\tilde{A}$ *est* C^∞.

On dira que $\tilde{A}$ *est un «prolongement»* C^∞ *de* A *à* $\overline{\mathbb{R}}^n_+$.

PREUVE. – Soit $\chi \in C_0^\infty(\omega_{r_1})$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi|_{\omega_{r_2}} = 1$ et $\chi|_{\complement\omega_{r_3}} = 0$ avec $r_2 < r_3 < r_1$ et r_2, r_3 sont choisis assez petits. Il suffit alors de poser $\tilde{A} = (A - A(0))\chi + A(0)$.

Notons $\|W\|_\varrho = \sum_{|\alpha|=4} \|W^\alpha\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^n_+)}$ et $\tilde{L}_z$ l'opérateur défini sur $\mathbb{R}^n$ par: $\tilde{L}_z = \partial_v^2 + v \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_j \partial_v \partial_{u_j} + v \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{a}_{ij} \partial_{u_i} \partial_{u_j}$ où $\tilde{a}_{ij}$ (resp. $\tilde{a}_j$) est un «prolongement» C^∞ de $\tilde{a}_{ij}$ (resp. a_j) à $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ et

$$(\mathrm{II}.22)' \qquad \text{la matrice } (\tilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n-1} \text{ est définie positive sur } \overline{\mathbb{R}}^n_+$$

La condition (H) est vérifiée pour l'opérateur $\tilde{L}_z$ et le théorème II.6 s'applique.

On en déduit que: pour tout compact K, voisenage assez petit de zéro, il existe $C_K > 0$ telle que pour tout $W \in [C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+)]^N$ et $\operatorname{supp} W \subset K$, on ait:

$$(\mathrm{II}.27) \qquad \|\partial_v^2 W\|_\varrho + \sum_{i=1}^{n-1} \|v \partial_v \partial_{u_i} W\|_\varrho + \sum_{i,j=1}^{n-1} \|v \partial_{u_i} \partial_{u_j} W\|_\varrho + \|W\|_{\varrho+4/3} \leqslant$$
$$C_K \{\|(L_z + M) W\|_\varrho + \|\gamma_0 W\|_{\varrho+4/3} + \|W\|_\varrho\}$$

M étant la matrice $\left(\sum_{i=1}^{n} b_{\alpha\beta i} \partial_{u_i}\right)_{\substack{|\alpha|=4\\|\beta|=4}}$.

INDICATION. – En effet il suffit d'appliquer le théorème II.6 à l'opérateur $\tilde{L}_z$, de remarquer que pour W à support dans K voisinage de 0 assez petit, on a: $\tilde{L}_z W = L_z W$ et que

$$\|L_z W\|_\varrho \leqslant \|(L_z + M) W\|_\varrho + \|MW\|_\varrho \leqslant \|(L_z + M) W\|_\varrho + C\|W\|_{\varrho+1}$$
$$\leqslant \|(L_z + M) W\|_\varrho + \delta\|W\|_{\varrho+4/3} + C_\delta \|W\|_\varrho$$

un choix de δ petit nous permet d'obtenir l'inégalité (II.27).

II.3. *Régularité Gevrey de W.*

NOTATIONS. – On note ω un cylindre de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\omega = [0; a[\times \omega_u$ où $\omega_u = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} / |u| < a\}$.

On suppose $a < 1$ et on note pour $0 < \varepsilon < a$:

$$\omega_\varepsilon = \{(u; v) \in \omega / 0 \leqslant v < a - \varepsilon;\ |u| < a - \varepsilon\}$$
$$\widetilde{\omega}_\varepsilon = \{(u; v) \in \mathbb{R}^n / (u, v) \in \omega_\varepsilon \ \text{ ou } \ (u; -v) \in \omega_\varepsilon\}$$

Soit $\varrho \in]0; 1[\backslash \{2/3\}$, on note: $N_\varepsilon^\varrho(g) = \|g\|_{C^\varrho(\omega_\varepsilon)}$.

LEMME II.8. ([5], lemme I.9). – *Soient ε; ε_1 deux nombres positifs tels que $\varepsilon + \varepsilon_1 < a/2$. Il existe $\varphi \in C_0^\infty(\widetilde{\omega}_{\varepsilon_1})$ telle que:*

(i) $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$

(ii) $\varphi \equiv 0$ *sur* $\widetilde{\omega}_{\varepsilon + \varepsilon_1}$

(iii) $\partial_v \varphi \equiv 0$ *sur* $\{(u; v) \in \widetilde{\omega}_{\varepsilon_1} / |v| < a/2\}$

(iv) $\|\partial^\alpha \varphi\|_{C^\varrho(\widetilde{\omega}_{\varepsilon_1})} \leqslant C_\alpha \varepsilon^{-\varrho - |\alpha|}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, C_α *étant une consante indépendante de* ε.

Considérons maintenant le système (II.20).

LEMME II.9. – *Il existe une constante $C_\varrho > 0$ telle que pour tous ε, $\varepsilon_1 > 0$ vérifiant $\varepsilon + \varepsilon_1 < a/2$ et tout vecteur $W \in [C^\infty(\omega)]^N$ on ait:*

$$\text{(II.28)} \qquad N^\varrho_{\varepsilon+\varepsilon_1}(\partial_v^2 W) +$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} N^\varrho_{\varepsilon+\varepsilon_1}(v \partial_v \partial_{u_i} W) + \sum_{i,j=1}^{n-1} N^\varrho_{\varepsilon+\varepsilon_1}(v \partial_{u_i} \partial_{u_j} W) + N^{\varrho+4/3}_{\varepsilon+\varepsilon_1}(W) \leqslant$$
$$C_\varrho \Bigg\{ \varepsilon^{-\varrho} N^\varrho_{\varepsilon_1}((L_z + M) W) + \varepsilon^{-1-\varrho} \Bigg(N^\varrho_{\varepsilon_1}(v \partial_v W)) + \sum_{j=1}^{n-1} N^\varrho_{\varepsilon_1}(v \partial_{u_j} W) \Bigg) +$$
$$\varepsilon^{-1-\varrho} N^\varrho_{\varepsilon_1}(W) + \varepsilon^{-2-\varrho} N^\varrho_{\varepsilon_1}(vW) + \varepsilon^{-\varrho-4/3} N^{\varrho+4/3}_{\varepsilon_1}(W|_{v=0}) \Bigg\}.$$

PREUVE. – Ce lemme se démontre en appliquant l'inégalité (II.29) à la fonction φW où φ est donnée par le lemme II.8, en utilisant la propriété d'Algèbre de C^{ϱ} et en remarquant que l'on a

$$N^{\varrho}_{\varepsilon_1}(\partial_v \varphi \,.\, \partial^k_v W^{\alpha}) \leqslant C_{\varrho} C_2 \,\varepsilon^{-\varrho-1} N^{\varrho}_{\varepsilon_1}(v \partial^k_v W^{\alpha})\,.$$

On va maintenant préciser certaines données: par hypothèse s étant >1 il s'écrit $s = 1 + \tau$ avec $\tau > 0$. On choisit alors ϱ dans $]0;1[\backslash\{2/3\}$ vérifiant en plus $\varrho < \tau$ de sorte à pouvoir remplacer $\varepsilon^{-\varrho}$ par $\varepsilon^{-\tau}$ à droite de l'inégalité (II.28).

Soient $l \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > 0$ assez petit. On pose: $\varepsilon_1 = \delta l^{\frac{\tau}{1+\tau}}$ et $\varepsilon = C\delta l^{-\frac{1}{1+\tau}}$ où C est une constante fixée dépendant de τ et vérifiant

$$0 < C \leqslant q\left[\left(1 + \frac{1}{q}\right)^{\frac{\tau}{1+\tau}} - 1\right], \qquad \forall q \geqslant 1$$

$\left(\text{par exemple } C = \dfrac{\tau}{1+\tau}\right)$. On a alors: $\varepsilon + \varepsilon_1 \leqslant \delta(l+1)^{\frac{\tau}{1+\tau}}$ ce qui permet de majorer $N^{\alpha}_{\delta(l+1)^{\frac{\tau}{1+\tau}}}(\cdot)$ par $N^{\alpha}_{\varepsilon+\varepsilon_1}(\cdot)$. L'inégalité (II.28) donne alors en posant $\mu = \dfrac{\tau}{1+\tau}$ et $\varepsilon = C\delta l^{-\frac{1}{1+\tau}}$

$$\text{(II.29)} \quad N^{\varrho}_{\delta(l+1)^{\mu}}(\partial^2_v W) + \sum_{i=1}^{n-1} N^{\varrho}_{\delta(l+1)^{\mu}}(v \partial_v \partial_{u_i} W) + \sum_{i,j \leqslant n-1} N^{\varrho}_{\delta(l+1)^{\mu}}(v \partial_{u_i} \partial_{u_j} W) + N^{\varrho+4/3}_{\delta(l+1)^{\mu}}(W) \leqslant$$
$$C_{\tau}\left\{ \varepsilon^{-\tau} N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((L+M)\,W) + \varepsilon^{-\tau-1}\left(N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(v\partial_v W) + \sum_{j=1}^{n-1} N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(v \partial_{u_j} W)\right) + \right.$$
$$\left. \varepsilon^{-\tau-1} N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(W) + \varepsilon^{-\tau-2} N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(vW) + \varepsilon^{-\tau-4/3} N^{\varrho+4/3}_{\delta l^{\mu}}(W|_{v=0}) \right\}$$

LEMME II.10. – *Soient $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ et $p \in \mathbb{N}$ fixé. On peut trouver une constante absolue C_n (indépendante de α et de p) telle que:*

$$\text{(II.30)} \quad A = \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \frac{|\alpha-\gamma|!\,(|\gamma|+p)!\,(|\alpha|+p)^{n+1}}{(|\alpha-\gamma|+1)^{n+1}(|\gamma|+p+1)^{n+1}(|\alpha|+p)!} < C_n.$$

PROPOSITION II.11. – *Soit W une solution C^{∞} de* (II.22) *vérifiant $W|_{v=0} \in G^s$, alors on peut trouver deux constantes positives H_0, H_1 telles que: pour tout*

$l \in \mathbb{N}^*$ *vérifiant* $\delta l^\mu < a/2$ *on ait:*

$$(\mathrm{II.31})_l \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad N^{\varrho}_{\delta l^\mu}(\partial_v^k \partial_u^\alpha W) \\ \qquad \leqslant H_0 H_1^{(|\alpha|+k-2)_+} \dfrac{(|\alpha|+k)!}{(|\alpha|+k+1)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha|+k-2)_+(1+\tau)}; \\ \qquad \text{si } |\alpha| \leqslant l-1 \text{ et } k \leqslant 2 \\ \text{(ii)} \quad N^{\varrho}_{\delta l^\mu}(v \partial_v^k \partial_u^\alpha W) \\ \qquad \leqslant H_0 H_1^{(|\alpha|+k-2)_+} \dfrac{(|\alpha|+k)!}{(|\alpha|+k+1)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha|+k-2)_+(1+\tau)}; \\ \qquad \text{si } |\alpha| \leqslant l \text{ et } k=1 \text{ ou si } |\alpha| \leqslant l+1 \text{ et } k=0 \\ \text{(iii)} \quad N^{\varrho+4/3}_{\delta l^\mu}(\partial_u^\alpha W) \leqslant H_0 H_1^{|\alpha|} \dfrac{(|\alpha|+2)!}{(|\alpha|+3)^{n+2}} \delta^{-|\alpha|(1+\tau)}; \\ \qquad \text{si } |\alpha| \leqslant l-1\,. \end{cases}$$

Avant de passer à la preuve de cette proposition, on va énoncer certains lemmes.

NOTATIONS. – (i) Pour $a \in \mathcal{E}_4$, on identifie a à $\underline{a}$ et on pose $a \circ \chi^{-1} \doteqdot a\big(y; (\partial^\alpha Z)_{\substack{|\alpha| \leqslant 4 \\ \alpha_n \leqslant 1}}\big) \circ \chi^{-1}$ ce qui permet de simplifier l'écriture.

(ii) On pose $u_n = v$.

LEMME II.12. – *Pour tout* $j = 1, 2, \ldots, n-1$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant 4$ *il existe* $c_{\alpha j}$, $d_{\alpha j}$, $d_{\alpha n} \in \mathcal{E}_4$ *telles que pour tout* $a \in \mathcal{E}_4$

$$(\mathrm{II.32}) \quad \frac{\partial}{\partial u_j}(a \circ \chi^{-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a}{\partial y_i} \circ \chi^{-1} \cdot b_{ij} \circ \chi^{-1} + \sum_{|\alpha| \leqslant 3} \frac{\partial a}{\partial Z_\alpha} \circ \chi^{-1} \cdot c_{\alpha j} \circ \chi^{-1} + \sum_{\substack{|\alpha|=4 \\ \alpha_n = 0}} \frac{\partial a}{\partial Z_\alpha} \circ \chi^{-1} \cdot \partial_{u_j} W^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|=4,\, \alpha_n=1 \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \frac{\partial a}{\partial Z_\alpha} \circ \chi^{-1} \cdot d_{\alpha^i k} \circ \chi^{-1} \cdot \partial_{u_k} W^{\alpha^i}$$

où b_{ij} *est donnée par la remarque* II.2 (iv), *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $i \leqslant n-1$ *on note* $\alpha^i = (\alpha_1; \ldots; \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{n-1}; 0)$.

Soit $a_0 \in \mathcal{E}_4$, fixé et soit $\mathcal{F}$ la partie finie de $\mathcal{E}_4$ définie par

$$\mathcal{F} = \{a_0, b_{ij}, c_{\alpha j}, d_{\beta j}, d_{\beta n} \text{ où } 1 \leqslant i, j \leqslant n-1,\ |\alpha| \leqslant 3 \text{ et } |\beta| = 4\}.$$

LEMME II.13. – *Supposons* $(\mathrm{II.31})_k$ *vraie pour* $0 \leqslant k \leqslant l$ *alors il existe deux constantes positives* B_1 *et* H_2 *indépendantes de* k, l, H_1, δ *telles que pour tout*

$\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ tout $\theta \in \mathbb{N}^M$ vérifiant $|\alpha| + |\theta| \leqslant l$ et pour tout $a \in \mathcal{F}$ on ait:

$$(\mathrm{II.33})_\alpha \qquad N^{\varrho}_{\delta l^\mu}(\partial^\alpha_u(a^{(\theta)} \circ \chi^{-1})) \leqslant$$

$$B_1 H_0 H_1^{(|\alpha|-1)_+} H_2^{|\theta|} \frac{(|\alpha| + |\theta| + 1)!}{(|\alpha| + |\theta| + 2)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha| + |\theta| - 1)_+ (1+\tau)}$$

où par définition:

$$a^{(\theta)}(X_1, \dots, X_M) \doteqdot \frac{\partial^{|\theta|} a}{\partial X_1^{\theta_1} \dots \partial X_M^{\theta_M}}(X_1, \dots, X_M), \quad \forall \theta \in \mathbb{N}^M.$$

PREUVE. – On procède par récurrence sur $|\alpha|$. Pour $|\alpha| = 0; 1$ $(\mathrm{II.33})_\alpha$ est vérifié pour tout $a \in \mathcal{F}$ car $\underline{a}$ est Gevrey d'ordre s de ses arguments et $\mathcal{F}$ est un ensemble fini. Supposons $(\mathrm{II.33})_\alpha$ vraie pour tout $0 \leqslant |\alpha| \leqslant j$ avec $j < l$ et démontrons que $(\mathrm{II.33})_\alpha$ reste vraie pour $|\alpha| = j + 1$.

Soit $\alpha = \alpha' + \alpha''$ avec $|\alpha''| = 1$ et $|\alpha'| = j$

$$\partial^\alpha_u(a^{(\theta)} \circ \chi^{-1}) = \partial^{\alpha'}_u(\partial_{u_j}(a^{(\theta)} \circ \chi^{-1})).$$

Or, d'après le lemme II.12:

$$\partial_{u_j}(a^{(\theta)} \circ \chi^{-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial y_i} \circ \chi^{-1} \cdot b_{ij} \circ \chi^{-1} + \sum_{|\alpha| \leqslant 3} \frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha} \circ \chi^{-1} \cdot c_{\alpha j} \circ \chi^{-1} +$$

$$\sum_{\substack{|\alpha| = 4 \\ \alpha_n = 0}} \frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha} \circ \chi^{-1} \cdot \partial_{u_j} W^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha| = 4,\, \alpha_n = 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha} \circ \chi^{-1} \cdot d_{\alpha^i k} \circ \chi^{-1} \cdot \partial_{u_k} W^{\alpha^i}$$

on pose $a^{(\theta_i)} = \dfrac{\partial a^{(\theta)}}{\partial y_i}$ et $a^{(\theta_\alpha)} = \dfrac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha}$. Par suite:

$$\partial^\alpha_u(a^{(\theta)} \circ \chi^{-1}) = \sum_{1=1}^{n-1} \underbrace{\partial^{\alpha'}_u(a^{(\theta_i)} \circ \chi^{-1} \cdot b_{ij} \circ \chi^{-1})}_{(4)} +$$

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 3} \underbrace{\partial^{\alpha'}_u(a^{(\theta_\alpha)} \circ \chi^{-1} \cdot c_{\alpha j} \circ \chi^{-1})}_{(5)} + \sum_{\substack{|\alpha| = 4 \\ \alpha_n = 0}} \underbrace{\partial^{\alpha'}_u(a^{(\theta_\alpha)} \circ \chi^{-1} \cdot \partial_{u_j} W^\alpha)}_{(6)} +$$

$$\sum_{\substack{|\alpha| = 1,\, \alpha_n = 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \underbrace{\partial^{\alpha'}_u(a^{(\theta_\alpha)} \circ \chi^{-1} \cdot d_{\alpha^i k} \circ \chi^{-1} \cdot \partial_{u_k} W^{\alpha^i})}_{(7)}$$

avec $|\theta_\alpha| = |\theta_i| = |\theta| + 1$.

On utilise alors l'hypothèse de récurrence pour majorer chacun des termes, ainsi que $(\mathrm{II}.31)_k$, $0 \leqslant k \leqslant l$. On écrit que:

$$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((4)) \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} C_{\varrho} N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial^{\beta}_{u}(b_{ij} \circ \chi^{-1}))\, N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial^{\alpha'-\beta}_{u}(a^{(\theta_i)} \circ \chi^{-1})) \leqslant$$

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} C_{\varrho} B_1 H_0 H_1^{(|\beta|-1)_+} \frac{(|\beta|+1)!}{(|\beta|+2)^{n+2}} \delta^{-(|\beta|-1)_+(1+\tau)} B_1 H_0 H_1^{(|\alpha'-\beta|-1)_+} \times$$

$$H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\alpha'-\beta|+|\theta|+2)!}{(|\alpha'-\beta|+|\theta|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha'-\beta|+|\theta|)(1+\tau)} \leqslant$$

$$C_{\varrho} B_1^2 H_0^2 H_1^{(|\alpha'|-1)} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\alpha'|+|\theta|+2)!}{(|\alpha'|+|\theta|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha'|+|\theta|)(1+\tau)} \cdot A_1$$

avec

$$A_1 = \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \frac{(|\beta|+1)!(|\alpha'-\beta|+|\theta|+2)!(|\alpha'|+|\theta|+3)^{n+2}}{(|\beta|+2)^{n+2}(|\alpha'-\beta|+|\theta|+3)^{n+2}(|\alpha'|+|\theta|+2)!} \leqslant$$

$$3^{n+2} \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \frac{|\beta|!(|\alpha'-\beta|+|\theta|)!(|\alpha'|+|\theta|+1)^{n}}{(|\beta|+1)^{n}(|\alpha'-\beta|+|\theta|+1)^{n}(|\alpha'|+|\theta|)!}.$$

En utilisant le lemme II.10 on en déduit que $A_1 \leqslant 3^{n+2} C_{n-1}$, ce qui donne:

$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((4)) \leqslant$

$$3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho} B_1^2 H_0^2 H_1^{(|\alpha|-2)} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\alpha|+|\theta|+1)!}{(|\alpha|+|\theta|+2)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha|+|\theta|-1)(1+\tau)}.$$

$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((5))$ se majore de la même façon.

$$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((6)) \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} C_{\varrho} N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial^{\beta}_{u} \partial_{u_j} W^{\alpha})\, N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial^{\alpha'-\beta}_{u}(a^{(\theta_\alpha)} \circ \chi^{-1}))$$

$$\leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} C_{\varrho} N^{\varrho+4/3}_{\delta l^{\mu}}(\partial^{\beta}_{u} W^{\alpha})\, N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial^{\alpha'-\beta}_{u}(a^{(\theta_\alpha)} \circ \chi^{-1}))$$

$$\leqslant C_{\varrho} B_1 H_0^2 H_1^{|\alpha'|} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\alpha'|+|\theta|+2)!}{(|\alpha'|+|\theta|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha'|+|\theta|)(1+\tau)} \times A_2$$

avec

$$A_2 = \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \frac{(|\beta|+2)!(|\alpha'-\beta|+|\theta|+2)!(|\alpha'|+|\theta|+3)^{n+2}}{(|\beta|+3)^{n+2}(|\alpha'-\beta|+|\theta|+3)^{n+2}(|\alpha'|+|\theta|+2)!}.$$

En utilisant le lemme II.10, en majorant A_2 comme A_1 on trouve que $A_2 \leqslant 3^{n+2} C_{n-1}$. Donc:

$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((6)) \leqslant$

$$3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho} B_1 H_0^2 H_1^{|\alpha|-1} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\alpha|+|\theta|+1)!}{(|\alpha|+|\theta|+2)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha|+|\theta|-1)(1+\tau)}.$$

Reste à majore le dernier terme (7). On a:

$$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((7)) \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} C_{\varrho} N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial_u^{\beta}(a^{(\theta_\alpha)} \circ \chi^{-1} \cdot d_{\alpha^i k} \circ \chi^{-1}))\, N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial_u^{\alpha'-\beta} \partial_{u_k} W^{\alpha^i}).$$

D'après la majoration de la norme de (4) on sait que

$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial_u^{\beta}(a^{(\theta_\alpha)} \circ \chi^{-1} \cdot d_{\alpha^i k} \circ \chi^{-1})) \leqslant$

$$3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho} B_1^2 H_0^2 H_1^{|\beta|} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\beta|+|\theta|+2)!}{(|\beta|+|\theta|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\beta|+|\theta|)(1+\tau)}$$

or, $N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}(\partial_u^{\alpha'-\beta} \partial_{u_k} W^{\alpha^i}) \leqslant N^{\varrho+4/3}_{\delta l^{\mu}}(\partial_u^{\alpha'-\beta} W^{\alpha^i})$, d'où

$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((7)) \leqslant$

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} 3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho}^2 B_1^2 H_0^2 H_1^{|\beta|} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\beta|+|\theta|+2)!}{(|\beta|+|\theta|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\beta|+|\theta|)(1+\tau)} \times$$

$$H_0 H_1^{|\alpha'-\beta|} \frac{(|\alpha'-\beta|+2)!}{(|\alpha'-\beta|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha'-\beta|)(1+\tau)} \leqslant$$

$$3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho}^2 B_1^2 H_0^3 H_1^{|\alpha'|} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\alpha'|+|\theta|+2)!}{(|\alpha'|+|\theta|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha'|+|\theta|)(1+\tau)} \cdot A_3$$

où

$$A_3 = \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \frac{(|\beta|+|\theta|+2)!(|\alpha'-\beta|+2)!(|\alpha'|+|\theta|+3)^{n+2}}{(|\beta|+|\theta|+3)^{n+2}(|\alpha'-\beta|+3)^{n+2}(|\alpha'|+|\theta|+2)!}$$

est majoré par $3^{n+2} C_{n-1}$. Par suite:

$N^{\varrho}_{\delta l^{\mu}}((7)) \leqslant$

$$(3^{n+2} C_{n-1})^2 C_{\varrho}^2 B_1^2 H_0^3 H_1^{|\alpha|-1} H_2^{|\theta|+1} \frac{(|\alpha|+|\theta|+1)!}{(|\alpha|+|\theta|+2)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha|+|\theta|-1)(1+\tau)}.$$

On trouve alors que:

$$N_{\delta l^{\mu}}^{\varrho}(\partial_u^{\alpha}(a^{(\theta_\alpha)}\circ\chi^{-1}))\leqslant$$

$$B_1 H_0 H_1^{|\alpha|-1} H_2^{|\theta|}\frac{(|\alpha|+|\theta|+1)!}{(|\alpha|+|\theta|+2)^{n+2}}\delta^{-(|\alpha|+|\theta|-1)(1+\tau)}\times C(H_0,H_1,H_2)$$

avec:

$$C(H_0, H_1, H_2) = (n+M)\,3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho} B_1 H_0 H_2 H_1^{-1} +$$

$$M3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho} H_0 H_2 + n^2 M(3^{n+2} C_{n-1})^2 B_1 H_2 H_0^2 .$$

Pour H_0 choisi assez petit et H_1 choisi assez grand de sorte que l'on ait

$$\begin{cases} 3^{n+2} M C_{n-1} C_{\varrho} H_2 .\ H_0 < 1/3 \\ n^2 M 9^{n+2} C_{n-1}^2 B_1 H_0 H_2 .\ H_0 < 1/3 \quad \text{et} \\ (n+M)\,3^{n+2} C_{n-1} C_{\varrho} B_1 H_0 H_2 < (1/3)\, H_1 \end{cases}$$

on trouve que $C(H_0, H_1, H_2) < 1$, d'où notre récurrence.

Preuve de la proposition II.11. – On procède par récurrence sur l. $(\mathrm{II.31})_l$ étant vraie pour l borné si H_1 est assez grand, supposons $(\mathrm{II.31})_k$ vraie pour $0 \leqslant k \leqslant l$ et démontrons que $(\mathrm{II.31})_{l+1}$ reste vraie pour H_0, H_1 convenables.

Soit $|\alpha| = l \geqslant 2$ et appliquons l'opérateur ∂_u^{α} au système (II.20). Notons G le vecteur $(G_\alpha)_{|\alpha|=4}$ et M la matrice $\left(\sum_{i=1}^{n} b_{\alpha\beta i}\,\partial_{u_i}\right)_{\substack{|\alpha|=4\\|\beta|=4}}$ on peut écrire

$$(L_z + M)\,\partial_u^{\alpha} W = \partial_u^{\alpha} G + [(L_z+M),\,\partial_u^{\alpha}]\,W; \qquad v>0\,.$$

On applique alors l'inégalité (II.28) à $\partial_u^{\alpha} W$, il vient:

$$N_\alpha(W) \doteqdot N_{\delta(l+1)^{\mu}}^{\varrho}(\partial_v^2\partial_u^{\alpha} W) +$$

$$\sum_{|\gamma|=1} N_{\delta(l+1)^{\mu}}^{\varrho}(v\partial_v\,\partial_u^{\alpha+\gamma} W) + \sum_{|\gamma|=2} N_{\delta(l+1)^{\mu}}^{\varrho}(v\partial_u^{\alpha+\gamma} W) + N_{\delta(l+1)^{\mu}}^{\varrho+4/3}(\partial_u^{\alpha} W) \leqslant$$

$$C_\tau \Big\{ \underbrace{\varepsilon^{-\tau} N_{\delta l^{\mu}}^{\varrho}(\partial_u^{\alpha} G + [L_z + M,\,\partial_u^{\alpha}]\,W)}_{(8)} + \underbrace{\varepsilon^{-\tau-2} N_{\delta l^{\mu}}^{\varrho}(v\partial_u^{\alpha} W)}_{(9)} +$$

$$\underbrace{\varepsilon^{-\tau-1}\Big(N_{\delta l^{\mu}}^{\varrho}(v\partial_v\,\partial_u^{\alpha} W) + \sum_{|\beta|=1} N_{\delta l^{\mu}}^{\varrho}(v\partial_u^{\alpha+\beta} W)\Big)}_{(10)} +$$

$$\underbrace{\varepsilon^{-\tau-1} N_{\delta l^{\mu}}^{\varrho}(\partial_u^{\alpha} W)}_{(11)} + \underbrace{\varepsilon^{-\tau-4/3} N_{\delta l^{\mu}}^{\varrho+4/3}(\partial_u^{\alpha} W|_{v=0})}_{(12)} \Big\} \quad \text{avec } \varepsilon = C\delta l^{-\frac{1}{1+\tau}}\,.$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$(9) \leqslant C^{-\tau-2}\delta^{-\tau-2} l^{\frac{\tau+2}{\tau+1}} H_0 H_1^{l-2} \frac{l!}{(l+1)^{n+2}} \delta^{-(l-2)(1+\tau)}$$

$$(9) \leqslant 3^{n+2} C^{-\tau-2} H_0 H_1^{l-2} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)} \tag{II.34}$$

$$(10) \leqslant 2^{n+2} n C^{-\tau-1} H_0 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)} \tag{II.35}$$

$$(11) \leqslant C^{-\tau-1}\delta^{-\tau-1} l N_{\delta l^\mu}^{\varrho+4/3}(\partial_u^{\alpha'} W) \text{ avec } |\alpha'| = |\alpha| - 1 = l-1$$

$$(11) \leqslant 2^{n+2} C^{-\tau-1} H_0 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)}. \tag{II.36}$$

Quant au terme (8):

$$(8) \leqslant \underbrace{\varepsilon^{-\tau} N_{\delta l^\mu}^{\varrho}(\partial_u^\alpha G)}_{(13)} + \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{\varepsilon^{-\tau} N_{\delta l^\mu}^{\varrho}(v[a_j \partial_v \partial_{u_j}, \partial_u^\alpha] W)}_{(14)} +$$

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n-1} \varepsilon^{-\tau} N_{\delta l^\mu}^{\varrho}(v[a_{ij} \partial_{u_i} \partial_{u_j}, \partial_u^\alpha] W)}_{(15)} + \underbrace{\sum_{\substack{|\beta|=|\gamma|=4 \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \varepsilon^{-\tau} N_{\delta l^\mu}^{\varrho}([b_{\gamma\beta i} \partial_{u_i}, \partial_u^\alpha] W^\beta)}_{(16)}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence ainsi que le lemme II.13 pour $a_0 = G \circ \chi$, $a_j \circ \chi$ avec $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $a_{ij} \circ \chi$ avec $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$ et $a_0 = b_{\gamma\beta i} \circ \chi$ avec $|\beta| = |\gamma| = 4$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ on peut écrire que

$$(13) \leqslant 2^{n+2} C^{-\tau} B_1 H_0 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)}$$

$$(14) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon^{-\tau} \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_\varrho N_{\delta l^\mu}^{\varrho}(\partial_u^\beta(a_j)) N_{\delta l^\mu}^{\varrho}(v\partial_v \partial_{u_j}^{\alpha-\beta} \partial_{u_j} W) \leqslant$$

$$n C_\varrho C^{-\tau} B_1 H_0^2 H_1^{|\alpha|-1} \delta^{-\tau} l^{\frac{\tau}{1+\tau}} \frac{(|\alpha|+2)!}{(|\alpha|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha|-1)(1+\tau)} \cdot A_4$$

avec

$$A_4 = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{(|\beta|+1)!(|\alpha-\beta|+2)!(|\alpha|+3)^{n+2}}{(|\beta|+2)^{n+2}(|\alpha-\beta|+3)^{n+2}(|\alpha|+2)!}$$

est majorée par $3^{n+2} C_{n-1}$.

De plus, on a par hypothèse $\varepsilon_1 = \delta l^{\frac{\tau}{\tau+1}} < 1$ donc $l^{\frac{\tau}{\tau+1}} < \delta^{-1}$ par suite $\delta^{-\tau} l^{\frac{\tau}{\tau+1}} < \delta^{-(1+\tau)}$, ce qui donne:

$$(14) \leqslant 3^{n+2} n C_\varrho C^{-\tau} C_{n-1} B_1 H_0^2 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)}.$$

(15) se majore de la même façon.

$$(16) \leqslant \varepsilon^{-\tau} \sum_{\substack{0<\eta\leqslant\alpha \\ |\beta|=|\gamma|=4 \\ 1\leqslant i\leqslant n}} \binom{\alpha}{\eta} C_\varrho N^{\varrho}_{\delta l^\mu}(\partial_u^\eta(b_{\gamma\beta i}))\, N^{\varrho+4/3}_{\delta l^\mu}(\partial_u^{\alpha-\eta}\partial_{u_i} W^\beta)$$

$$\leqslant n N^2 C_\varrho C^{-\tau} B_1 H_0^2 H_1^{(|\alpha|-1)} \delta^{-\tau} l^{\frac{\tau}{1+\tau}} \frac{(|\alpha|+2)!}{(|\alpha|+3)^{n+2}} \delta^{-(|\alpha|-1)(1+\tau)} \times A_4.$$

$$(16) \leqslant 3^{n+2} n N^2 C_{n-1} C_\varrho C^{-\tau} B_1 H_0^2 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)}.$$

On obtient donc:

$$\text{(II.37)} \qquad (8) \leqslant (2^{n+2} C^{-\tau} B_1 + 3^{n+2} n(N^2+2)\, C_\varrho C_{n-1} C^{-\tau} B_1 H_0) \times$$
$$\times H_0 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)}.$$

Reste à majorer le terme (12); pour cela on utilise le fait que $W|_{v=0} \in G^s$, par suite, il existe H telle que $\forall \beta \in \mathbb{N}^{n-1}$,

$$\|\partial_u^\beta W|_{v=0}\|_{C^{\varrho+4/3}(\omega)} \leqslant H_0 H^{|\beta|} \frac{|\beta|!}{(|\beta|+1)^{n+2}} |\beta|^{\tau(|\beta|-2)_+}.$$

En particulier pour $|\alpha| = l$, on a:

$$N^{\varrho+4/3}_{\delta l^\mu}(\partial_u^\alpha W|_{v=0}) \leqslant H_0 H^l \frac{l!}{(l+1)^{n+2}} l^{\tau(l-2)_+}.$$

Or, $\delta l^{\frac{\tau}{1+\tau}} < 1$ donc $l^\tau < \delta^{-(1+\tau)}$. Par suite:

$$N^{\varrho+4/3}_{\delta l^\mu}(\partial_u^\alpha W|_{v=0}) \leqslant H_0 H^l \frac{l!}{(l+1)^{n+2}} \delta^{-(l-2)(1+\tau)}$$

un choix de $H_1 > H$ donne:

$$\text{(II.38)} \qquad (12) \leqslant 3^{n+2} C^{-\tau-4/3} H H_0 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)}.$$

En regroupant les informations données par (II.34)...(II.38) on peut écrire

$$N_\alpha(W) \leqslant \mathcal{M}(H_0; H) \cdot H_0 H_1^{l-1} \frac{(l+2)!}{(l+3)^{n+2}} \delta^{-l(1+\tau)}$$

avec

$$\mathcal{M}(H_0; H) = (2^{n+2} C^{-\tau} B_1 + 3^{n+2} n(N^2+2)\, C_\varrho C^{-\tau} A_0 B_1 H_0 +$$

$$3^{n+2} C^{-\tau-2} + 2^{n+2}(1+n)\, C^{-\tau-1} + 3^{n+2} C^{-\tau-4/3} H) \times C_\tau.$$

Un choix de H_1 assez grand permet d'avoir $H_1 > \mathcal{M}(H_0, H)$ ce qui achève la démonstration.

II.4. *Passage de W à Z.*

Proposition II.14. – *Soit K un compact de* ω, *on peut trouver* H_0 *et H telles que:* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $\forall k = 0; 1; 2$

$$\|\partial_v^k \partial_u^\alpha W\|_{L^\infty(K)} \leqslant H_0 H^{(k+|\alpha|-2)_+} \frac{(|\alpha|+k)!^s}{(|\alpha|+k+1)^{s(n+2)}}. \tag{II.39}$$

Preuve. – Soit $c < a/2$ telle que $K \subset \omega_c$. Prenons dans $(\text{II.31})_l$ (i): $\delta l^\mu = c$ et $|\alpha| + k = l - 1$. En remplaçant δ^{-1} par sa valeur l^μ / c, il vient:

$$N^\varrho_{\delta l^\mu}(\partial_v^k \partial_u^\alpha W) \leqslant H_0 H_1^{(l-3)_+} \frac{(l-1)!}{l^{n+2}} \left(\frac{l^{\frac{\tau}{1+\tau}}}{c} \right)^{(1+\tau)(l-3)_+} \leqslant H_0 H_3^{(l-3)_+} (l-1)!^{(1+\tau)}.$$

D'où notre proposition.

Soit K_0 un petit voisinage de l'origine dans $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, image réciproque de K par l'application χ donnée par (II.12).

Proposition II.15. – *Il existe trois constantes* H_0, H_1 *et* H_2 $(H_2 > H_1)$ *telles que:* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $\forall \gamma \in \mathbb{N}^{n-1}$, *et* $\forall k = 0, 1, 2$

$$(\text{II.40})_\alpha \qquad \|\partial_{y'}^\alpha (\partial_v^k \partial_u^\gamma W) \circ \chi\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant$$

$$H_0 H_1^{|\gamma|+k} H_2^{(|\alpha|-2)_+} \frac{(|\alpha|+|\gamma|+k)!^s}{(|\alpha|+|\gamma|+k+1)^{s(n+2)}}.$$

Avant de passer à la preuve de cette assertion, on va énoncer certains lemmes:

LEMME II.16. – *Pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 3$ *il existe* $C_{\alpha i}$, C_i, $C_n \in \mathcal{E}_4$ *telles que pour tout* $a \in \mathcal{E}_4$

$$\text{(II.41)} \qquad \partial_{y_i}(a) = \frac{\partial a}{\partial y_i} + \sum_{|\alpha| \leq 3} \frac{\partial a}{\partial Z_\alpha} \cdot C_{\alpha i} + \sum_{\substack{|\alpha| = 4 \\ \alpha_n = 0}} \frac{\partial a}{\partial Z_\alpha} \cdot \partial_{y_i}(W^\alpha \circ \chi)$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha| = 4,\ \alpha_n = 0 \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\partial a}{\partial Z_\alpha} \cdot C_j \cdot (\partial_{u_j} W^{\alpha^i}) \circ \chi$$

avec pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha^i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$.

Soit $a_0 \in \mathcal{E}_4$ fixé et posons:

$$\mathcal{E} = \{a_0, C_{\alpha i}, C_i, C_n \ \text{ avec } i = 1, \ldots, n-1 \ \text{ et } |\alpha| \leq 3\}.$$

LEMME II.17. – *Supposons* (II.40)$_\alpha$ *vraie pour tout* $|\alpha| \leq l$ *alors il existe deux constantes positives* B *et* H_3 *indépendantes de* α, l, H_1, H_2 *telles que pour tout* $a \in \mathcal{E}$ *on ait:* $\forall \gamma \in \mathbb{N}^{n-1}$ *et* $|\gamma| \leq l$, $\forall \theta \in \mathbb{N}^M$,

$$\text{(II.42)}_\gamma \qquad \|\partial_{y'}^{\gamma}(a^{(\theta)})\|_{L^\infty(K_0)} \leq B H_0 H_2^{(|\gamma|-1)_+} H_3^{|\theta|} \left[\frac{(|\gamma| + |\theta| + 1)!}{(|\gamma| + |\theta| + 2)^{(n+2)}} \right]^s.$$

PREUVE. – On procède par récurrence sur $|\gamma|$. Pour $|\gamma| = 0, 1$ (II.42)$_\gamma$ est vérifiée pour tout $a \in \mathcal{E}$ car a est Gevrey d'ordre s de ses arguments et $\mathcal{E}$ est un ensemble fini.

Supposons (II.42)$_\gamma$ vraie pour $0 \leq |\gamma| \leq j$ avec $1 \leq j \leq l-1$ et démontrons que (II.42)$_\gamma$ reste vraie pour $|\gamma| = j+1 \leq l$.

Soit $\gamma = \gamma' + \gamma''$ avec $|\gamma''| = 1$ et $|\gamma'| = j$.

$\partial_{y'}^{\gamma}(a^{(\theta)}) = \partial_{y'}^{\gamma'}(\partial_{y_i}(a^{(\theta)}))$ et par le lemme II.16:

$$\partial_{y'}^{\gamma}(a^{(\theta)}) = \underbrace{\partial_{y'}^{\gamma'}\left(\frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial y_i}\right)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq 3} \partial_{y'}^{\gamma'}\left(\frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha} \cdot C_{\alpha i}\right)}_{(2)} +$$

$$\underbrace{\sum_{\substack{|\alpha| = 4 \\ \alpha_n = 0}} \partial_{y'}^{\gamma'}\left(\frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha} \cdot \partial_{y_i}(W^\alpha \circ \chi)\right)}_{(3)} + \underbrace{\sum_{\substack{|\alpha| = 4,\ \alpha_n = 0 \\ 1 \leq j \leq n}} \partial_{y'}^{\gamma'}\left(\frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha} \cdot C_j . (\partial_{u_j} W^{\alpha^i}) \circ \chi\right)}_{(4)}.$$

On pose $\dfrac{\partial a^{(\theta)}}{\partial y_i} = a^{(\theta_i)}$ et $\dfrac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\alpha} = a^{(\theta_\alpha)}$ où $|\theta_\alpha| = |\theta_i| = |\theta| + 1$.

Pour majorer chacun des termes (1), …, (4) on utilise (II.40)$_\alpha$, $|\alpha| \leq l$ et l'hypothèse de récurrence, on trouve:

$$\text{(II.43)}\qquad \|(1)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant BH_0 H_2^{|\gamma|-2} H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\gamma|+|\theta|+1)!}{(|\gamma|+|\theta|+2)^{n+2}}\right]^s$$

$$\|(2)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant 3}\sum_{\beta\leqslant\gamma'}\binom{\gamma'}{\beta}\|\partial_{y'}^{\beta}(C_{\alpha i})\|_{L^\infty(K_0)}\cdot\|\partial_{y'}^{\gamma'-\beta}(a^{(\theta_\alpha)})\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant$$

$$n^3 B^2 H_0^2 H_2^{|\gamma'|-1} H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\gamma'|+|\theta|+2)!}{(|\gamma'|+|\theta|+3)^{n+2}}\right]^s\cdot A_5^s$$

avec

$$A_5 = \sum_{\beta\leqslant\gamma'}\binom{\gamma'}{\beta}\frac{(|\beta|+1)!(|\gamma'-\beta|+|\theta|+2)!(|\gamma'|+|\theta|+3)^{n+2}}{(|\beta|+2)^{n+2}(|\gamma'-\beta|+|\theta|+3)^{n+2}(|\gamma'|+|\theta|+2)!}.$$

Le lemme II.10 implique que $A\leqslant 3^{n+2}C_{n-1}=A_0$. D'où

$$\text{(II.44)}\qquad \|(2)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant n^3 A_0^s B^2 H_0^2 H_2^{|\gamma|-2} H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{|\gamma|+(|\theta|+1)!}{(|\gamma|+|\theta|+2)^{n+2}}\right]^s$$

$$\|(3)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant \sum_{|\alpha|=4,\ \alpha_n=0}\ \sum_{\beta\leqslant\gamma'}\binom{\gamma'}{\beta}\|\partial_{y'}^{\beta}(a^{(\theta_\alpha)})\|_{L^\infty(K_0)}\|\partial_{y'}^{\gamma'-\beta}\partial_{y_i}(W^\alpha\circ\chi)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant$$

$$n^4\sum_{\beta\leqslant\gamma'}\binom{\gamma'}{\beta}BH_0H_2^{(|\beta|-1)_+}H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\beta|+|\theta|+2)!}{(|\beta|+|\theta|+3)^{n+2}}\right]^s\cdot H_0H_2^{(|\gamma'-\beta|-1)_+}\times$$

$$\left[\frac{(|\gamma'-\beta|+1)!}{(|\gamma'-\beta|+2)^{n+2}}\right]^s \leqslant n^4 BH_0^2H_2^{|\gamma'|-1}H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\gamma'|+|\theta|+2)!}{(|\gamma'|+|\theta|+3)^{n+2}}\right]^s\cdot A_6^s$$

avec

$$A_6=\sum_{\beta\leqslant\gamma'}\binom{\gamma'}{\beta}\frac{(|\beta|+|\theta|+2)!(|\gamma'-\beta|+1)!(|\gamma'|+|\theta|+3)^{n+2}}{(|\beta|+|\theta|+3)^{n+2}(|\gamma'-\beta|+2)^{n+2}(|\gamma'|+|\theta|+2)!}=A_5\leqslant A_0.$$

Donc

$$\text{(II.45)}\qquad \|(3)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant n^4 A_0^s BH_0^2 H_2^{|\gamma|-2} H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\gamma|+|\theta|+1)!}{(|\gamma|+|\theta|+2)^{n+2}}\right]^s$$

$$\|(4)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant \sum_{\substack{|\alpha|=4,\ \alpha_n=1\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\ \sum_{\beta\leqslant\gamma'}\binom{\gamma'}{\beta}\|\partial_{y'}^{\beta}(C_j.\ a^{(\theta_\alpha)})\|_{L^\infty(K_0)}\|\partial_{y'}^{\gamma'-\beta}(\partial_{u_j}W^{\alpha^i}\circ\chi)\|_{L^\infty(K_0)}.$$

Or, d'après la majoration de $\|(2)\|_{L^\infty(K_0)}$

$$\|\partial_{y'}^{\beta}(C_j.\, a^{(\theta_\alpha)})\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant A_0^s B^2 H_0^2 H_2^{(|\beta|-1)_+} H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\beta|+|\theta|+2)!}{(|\beta|+|\theta|+3)^{n+2}}\right]^s.$$

Par suite

$$\|(4)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant n^5 \sum_{\beta \leqslant \gamma'} \binom{\gamma'}{\beta} A_0^s B^2 H_0^2 H_2^{(|\beta|-1)_+} H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\beta|+|\theta|+2)!}{(|\beta|+|\theta|+3)^{n+2}}\right]^s.$$

$$H_0 H_1 H_2^{(|\gamma'-\beta|-2)_+}\left[\frac{(|\gamma'-\beta|+1)!}{(|\gamma'-\beta|+2)^{n+2}}\right]^s \leqslant$$

$$n^5 A_0^s B^2 H_0^3 H_2^{|\gamma'|-1} H_1 H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\gamma'|+|\theta|+2)!}{(|\gamma'|+|\theta|+3)^{n+2}}\right]^s \cdot A_6^s$$

$$\text{(II.46)} \qquad \|(4)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant n^5 A_0^{2s} B^2 H_0^3 H_2^{|\gamma|-2} H_1 H_3^{|\theta|+1}\left[\frac{(|\gamma|+|\theta|+1)!}{(|\gamma|+|\theta|+2)^{n+2}}\right]^s.$$

En regroupant les informations données par (II.43), …, (II.46) on trouve

$$\|\partial_{y'}^{\gamma}(a^{(\theta)})\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant BH_0 H_2^{|\gamma|-1} H_3^{|\theta|}\left[\frac{(|\gamma|+|\theta|+1)!}{(|\gamma|+|\theta|+2)^{n+2}}\right]^s C_1(H_0, H_1, H_3) H_2^{-1}$$

où

$$C_1(H_0, H_1, H_3) = (1 + n^3 A_0^s B H_0 + n^4 A_0^s H_0 + n^5 A_0^{2s} B H_0^2 H_1)\, H_3.$$

Un choix de H_2 assez grand permet d'avoir $C_1(H_0, H_1, H_3) < H_2$ ce qui achève la preuve du lemme II.17.

Preuve de la proposition II.15. – On procède par récurrence sur $|\alpha|$. Pour $|\alpha| = 0, 1, 2$ l'inégalité $(\text{II.40})_\alpha$ découle de la proposition II.14. Supposons $(\text{II.40})_\alpha$ vraie pour $2 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ et démontrons que $(\text{II.40})_\alpha$ reste vraie pour $|\alpha| = l + 1 \geqslant 3$.

Posons $\alpha = \alpha' + \alpha''$ avec $|\alpha'| = l$ et $|\alpha''| = 1$ et notons $W^{(\gamma,k)} = \partial_v^k \partial_u^\gamma W$

$$\partial_{y'}^{\alpha}(W^{(\gamma,k)} \circ \chi) = \partial_{y'}^{\alpha'} \partial_{y_i}(W^{(\gamma,k)} \circ l) = \partial_{y'}^{\alpha'}\left(\sum_{j \leqslant n-1} \frac{\partial u_j}{\partial y_i}(\partial_{u_j} W^{(\gamma,k)} \circ l)\right) =$$

$$\sum_{j \leqslant n-1} \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \partial_{y'}^{\beta}\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) \partial_{y'}^{\alpha'-\beta}(W^{(\gamma_j,k)} \circ l) \ \text{avec}\ |\gamma_j| = |\gamma| + 1\,.$$

Pour $\beta > 0$, $\partial_{y'}^{\beta}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) = \partial_{y'}^{\beta'}\left(\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial y_i \partial y_k}\right)$ avec $|\beta'| = |\beta| - 1$. Or, il existe

$C_{ij} \in \mathcal{E}_4$ telle que $C_{ij}(y) = \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial y_i \partial y_k}$ donc pour $\beta > 0$

$$\partial_{y'}^{\beta}\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) = \partial_{y'}^{\beta'}(C_{ij}).$$

Par le lemme II.16 on peut écrire:

$$\left\| \partial_{y'}^{\beta}\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) \right\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant BH_0 H_2^{(|\beta'|-1)_+}\left[\frac{(|\beta'|+1)!}{(|\beta'|+2)^{(n+2)}}\right]^s$$

i.e.:

$$\left\| \partial_{y'}^{\beta}\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) \right\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant BH_0 H_2^{(|\beta|-2)_+}\left[\frac{|\beta|!}{(|\beta|+1)^{n+2}}\right]^s,$$

d'où

$\|\partial_{y'}^{\alpha}(W^{(\gamma,k)} \circ \chi)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant$

$$n\sum_{\beta \leqslant \alpha'}\binom{\alpha'}{\beta} BH_0 H_2^{(|\beta|-2)_+}\left[\frac{|\beta|!}{(|\beta|+1)^{n+2}}\right]^s H_0 H_1^{|\gamma_j|+k} H_2^{(|\alpha'-\beta|-2)_+} \times$$

$$\left[\frac{(|\alpha'-\beta|+|\gamma_j|+k)!}{(|\alpha'-\beta|+|\gamma_j|+k+1)^{n+2}}\right]^s \leqslant$$

$$nBH_0^2 H_1^{|\gamma|+k+1} H_2^{(|\alpha'|-2)}\left[\frac{(|\alpha'|+|\gamma|+k+1)!}{(|\alpha'|+|\gamma|+k+2)^{n+2}}\right]^s A_7^s$$

avec

$$A_7 = \sum_{\beta \leqslant \alpha'}\binom{\alpha'}{\beta}\frac{|\beta|!(|\alpha'-\beta|+|\gamma|+k+1)!(|\alpha'|+|\gamma|+k+2)^{n+2}}{(|\beta|+1)^{n+2}(|\alpha'-\beta|+|\gamma|+2)^{n+2}(|\alpha'|+|\gamma|+k+1)!}$$

ce qui donne en utilisant le lemme II.10: $A_7 \leqslant 2^n C_{n-1}$. Par suite:

$\|\partial_{y'}^{\alpha}(W^{(\gamma,k)} \circ \chi)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant$

$$(n2^{2n}C_{n-1}^2 BH_0 H_1 H_2^{-1})\cdot H_0 H_1^{|\gamma|+k} H_2^{|\alpha|-2}\left[\frac{(|\alpha|+|\gamma|+k)!}{(|\alpha|+|\gamma|+k+1)^{n+2}}\right]^s.$$

Il suffit alors de choisir H_2 assez grand de sorte que l'on ait

$$H_2 > n2^{2n}C_{n-1}^2 BH_0 H_1.$$

PROPOSITION II.18. – *Il existe deux constantes positives H_0, H_1 telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$*

$$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}(W \circ \chi)\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant H_0 H_2^{(|\alpha|-1)_+} \left[\frac{(\alpha|+1)!}{(|\alpha|+2)^{n+2}} \right]^s. \tag{II.47}$$

PREUVE:

$$\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n} W \circ \chi = \partial_{y'}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y_n} \partial_{u_i} W \circ \chi \right)$$
$$= \sum_{i=1} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_{y'}^{\beta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_n} \right) \partial_{y'}^{\alpha-\beta}((\partial_{u_i} W) \circ \chi).$$

Pour $\beta \neq 0$, $\partial_{y'}^{\beta} \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial y_n} \right) = \partial_{y'}^{\beta'} \left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y_j \partial y_n} \right)$ avec $|\beta'| = |\beta| - 1$. Or il existe $a_{ij} \in \mathcal{E}_4$ telle que $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y_j \partial y_n} = a_{ij}$.

Donc, d'après le lemme II.17 et le lemme II.15

$$\|\partial_{y'}^{\beta'}(a_{ij})\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant B H_0 H_2^{(|\beta'|-1)_+} \left[\frac{(|\beta'|+1)!}{(|\beta'|+2)^{n+2}} \right]^s$$

et

$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n} W \circ \chi\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant$

$$n \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} B H_0 H_2^{(|\beta|-2)_+} \left[\frac{|\beta|!}{(|\beta|+1)^{n+2}} \right]^s H_0 H_1 H_2^{(|\alpha-\beta|-2)_+} \times$$
$$\left[\frac{(|\alpha-\beta|+1)!}{(|\alpha-\beta|+2)^{n+2}} \right]^s \leqslant n B H_0^2 H_1 H_2^{(|\alpha|-2)_+} \left[\frac{(|\alpha|+1)!}{(|\alpha|+2)^{n+2}} \right]^s \cdot A_8^s$$

avec

$$A_8 = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{|\beta|!(|\alpha-\beta|+1)!(|\alpha|+2)^{n+2}}{(|\beta|+1)^{n+2}(|\alpha-\beta|+2)^{n+2}(|\alpha|+1)!}.$$

En utilisant le lemme II.10 on trouve que $A_8 \leqslant 2^{n+1} C_{n-1} \leqslant A_0$. Par suite pour $|\alpha| \geqslant 2$ on a:

$$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n} W \circ \chi\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant (n A_0^s B H_0 H_1 H_2^{-1}) \cdot H_0 H_2^{|\alpha|-1} \left[\frac{(|\alpha|+1)!}{(|\alpha|+2)^{n+2}} \right]^s.$$

Or pour H_2 choisit assez grand on peut avoir $H_2 > n \cdot A_0^s B H_0 H_1$. D'où le lemme.

Sachant que $W \circ \chi = (\partial_{y'}^{\alpha} Z)_{|\alpha|=4}$ on déduit des propositions II.15 et II.18:

PROPOSITION II.19. – *Il existe deux constantes positives H_0 et H_2 telles que: $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $k = 0, 1$*

$$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{k} Z\|_{L^{\infty}(K_0)} \leqslant H_0 H_2^{(|\alpha|+k-2)_+} \left[\frac{(|\alpha|+k)!}{(|\alpha|+k+1)^{n+4}} \right]^s. \tag{II.48}$$

II.5. *Fin de la preuve.*

PROPOSITION II.20. – *Il existe trois constantes positives H_0, H_2 et H telles que: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$*

$$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{k} Z\|_{L^{\infty}(K_0)} \leqslant H_0 H_2^{(|\alpha|-1)_+} H^{(k-1)_+} \left[\frac{(|\alpha|+k)!}{(|\alpha|+k+1)^{n+4}} \right]^s. \tag{II.49$_\mathrm{k}$}$$

Avant de passer à la preuve de cette proposition on va énoncer un lemme.

LEMME II.21. – *Soit $a \in \mathcal{E}_2$. Si on suppose* (II.49)$_k$ *vraie pour* $0 \leqslant k \leqslant l$ *alors il existe deux constantes positives B et H_3 indépendantes de k, l, H_2, H telles que: $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $\forall \theta \in \mathbb{N}^M$, $\forall k \leqslant l-1$*

$$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{k} (a^{(\theta)})\|_{L^{\infty}(K_0)} \leqslant B H_0 H_2^{|\alpha|+1} H^k H_3^{|\theta|} \left[\frac{(|\alpha|+k+|\theta|+2)!}{(|\alpha|+k+|\theta|+3)^{n+4}} \right]^s \tag{II.50$_\mathrm{k}$}$$

PREUVE. – On procède par récurrence sur k.

Pour $k = 0$ (II.50)$_0$ découle de l'inégalité (II.42)$_\alpha$. Supposons (II.50)$_k$ vraie pour $0 \leqslant k \leqslant j$ avec $j \leqslant l-2$ et démontrons que (II.50)$_{j+1}$ reste vraie.

$$\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j+1} (a^{(\theta)}) = \partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j} \left(\frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial y_n} + \sum_{\substack{|\beta| \leqslant 2 \\ \beta_n \leqslant 1}} \frac{\partial a^{(\theta)}}{\partial Z_\beta} \partial_{y_n} \partial^{\beta} Z \right) =$$

$$\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j} \left(a^{(\theta_n)} + \sum_{\substack{|\beta| \leqslant 2 \\ \beta_n \leqslant 1}} a^{(\theta_\beta)} \cdot \partial_{y_n} \partial^{\beta} Z \right) \text{ avec } |\theta_n| = |\theta_\beta| = |\theta| + 1 .$$

$$\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j+1} (a^{(\theta)}) = \underbrace{\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j} (a^{(\theta_n)})}_{(1)} + \underbrace{\sum_{\substack{|\gamma| \leqslant 2 \\ \gamma_n = 0}} \partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j} (a^{(\theta_\gamma)} \cdot \partial_{y_n} \partial^{\gamma} Z)}_{(2)} + \underbrace{\sum_{\substack{|\gamma| \leqslant 2 \\ \gamma_n = 1}} \partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j} (a^{(\theta_\gamma)} \cdot \partial_{y_n} \partial^{\gamma} Z)}_{(3)}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence ainsi que le lemme II.10 pour majorer

$\|(1)\|_{L^\infty(K_0)}$, $\|(2)\|_{L^\infty(K_0)}$ et $\|(3)\|_{L^\infty(K_0)}$ on trouve en posant $C_0 = 4^{n+3} C_n$:

$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{j+1}(a^{(\theta)})\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant$

$$BH_0 H_2^{|\alpha|+1} H^{j+1} H_3^{|\theta|} \left[\frac{(|\alpha| + j + |\theta| + 3)!}{(|\alpha| + j + |\theta| + 4)^{n+4}} \right]^s \cdot C_2(H_0, H_2, H_3, H)$$

avec

$$C_2(H_0, H_2, H_3, H) = (1 + n^2 C_0^s H_0 H_2) H_3 H^{-1} + n^2 C_0^s H_0 H_3 .$$

Pour H_0 choisi assez grand et H assez grand, on peut avoir

$$n^2 C_0^s H_3 \cdot H_0 < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (1 + n^2 C_0^s H_0 H_2) H_3 < \frac{1}{2} H$$

donc $C_2(H_0, H_2, H_3, H) < 1$.

Preuve de la proposition II.20. – On procède par récurrence sur k. Pour $k = 0; 1$ il s'agit de l'inégalité (II.48) déjà prouvée.

Supposons (II.49)$_k$ vraie $\forall 0 \leqslant k \leqslant l$ $(l \geqslant 1)$ et démontrons (II.49)$_{l+1}$. Pour cela on a besoin de revenir à notre équation de départ qui, d'après (II.15) peut s'écrire: $Z_{nn} = a(y)$ où $a \in \mathcal{E}_2$. Donc:

$$\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{l+1} Z = \partial_{y'}^{\alpha} \partial y_n^{l-1} Z_{nn} = \partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{l-1}(a) .$$

On n'a qu'à appliquer le lemme II.21 et on trouve:

$$\|\partial_{y'}^{\alpha} \partial_{y_n}^{l+1} Z\|_{L^\infty(K_0)} \leqslant H_0 H_2^{|\alpha|-1} H^l \left[\frac{(|\alpha| + l + 1)!}{(|\alpha| + l + 2)^{n+4}} \right]^s \cdot BH_2^2 H^{-1} .$$

Un choix de H assez grand permet d'avoir $BH_2^2 < H$.

Le théorème I.3 est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi - C. Goulaouic, *Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés; Applications*, Journal of Functional Analysis, **9** (1972), 208-248.

[2] M. S. Baouendi - C. Goulaouic, *Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Extrait des Annales Scientifiques de l'Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 4, fasc. 1, 1971.

[3] L. Caffarelli - L. Nirenberg - J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations I. Monge-Ampère equation*, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. **XXXVII** (1984), 369-402.

[4] S. Y. Cheng - S. T. Yau, *On the regularity of the solution of the n-dimentional Minkowski problem*, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. **XXIX** (1976).

[5] M. Derridj - C. Zuily, *Régularité analytique et Gevrey d'opérateurs elliptiques dégénérés*, J. Math. Pures et Appl., **52** (1973), 65-80.

[6] A. El Baraka, *Estimations Höldériennes et L^p pour une classe de problèmes linéaires singulièrs. Application à la régularité des solutions de problèmes aux limites singuliers non linéaires*, Thèse de 3ème cycle (1987).

[7] J. Hong - C. Zuily, *L^p et Hölder estimates for a class of degenerate elliptic boundary value problems. Application to the Monge-Ampère equation*, Comm. in Partial Diff. Equ., **16** (1991), 997-1031.

[8] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, 1963.

[9] C. S. Lin, *The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of 2-dimentional Riemannian manifolds with non negative curvature*, J. Diff. Geometry, **21** (1985), 213-230.

[10] A. V. Pogorelov, *On the regularity of generalized solutions of the equation* $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right) = \varphi(x^1, \ldots, x^n) > 0$, Soviet Math. Dokl., Vol. **12** (1971), no. 5=Dokl. Nank SSSR, Tom. 200 (1971), no. 3.

[11] A. V. Pogorelov, *The Minkowski multidimentional problem*, USSR Academy of Sciences, 1978.

[12] C. Zuily, *Sur la régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère réelle*, Annali. Della Sc. N. Sup. di Pisa, Série 4, Vol. **15**, 1988.

Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques
1060 Tunis, Tunisie; e-mail: saoussen-kallel@fst.rnu.tn

Pervenuta in Redazione
il 6 ottobre 2001