BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FEDERICO BARTOLOZZI

Alcune osservazioni sulle forme trilineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-B** (2003), n.3, p. 563–579.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6B_3_563_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
(8) **6**-B (2003), 563-579

Alcune osservazioni sulle forme trilineari (*).

Federico Bartolozzi

Sunto. – *Si studiano, nell'ambito della teoria delle forme trilineari, le cosidette 3-forme simmetriche, pervenendo ad un teorema di struttura utile per una possibile classificazione, ancora inesistente, di tali 3-forme.*

Summary. – *We obtain results on the geometry of trilinear forms. Our interest on this subject is also motivated by the absence of structure theorems in the existing literature. We pay special attention on obtaining refinements of projective geometry induced by a symmetric trilinear form on a vector space over a field.*

A Teresa

Introduzione.

In una serie di lavori, che fanno parte di un progetto di grande rilievo quale quello di descrivere la struttura dei sottogruppi di gruppi semplici finiti e di gruppi di tipo Lie sopra campi arbitrari, M. Aschbacher si è interessato, fra l'altro, di 3-forme su moduli di dimensione minimale per i gruppi eccezionali: ha studiato, per esempio, a fondo, in [1], la classica forma trilineare simmetrica, in dimensione 27, che appare in un lavoro di L. E. Dickson [3].

Successivamente, sempre Aschbacher, in [2], ha fornito indicazioni più precise per uno studio intrinseco delle forme trilineari, avvertendo che la letteratura sull'argomento è abbastanza limitata e che la teoria delle 3-forme simmetriche, anche se più difficile e inesplorata rispetto a quella delle forme bilineari e quadratiche, merita un necessario approfondimento.

In questo lavoro, riprendendo molte delle considerazioni, spesso soltanto accennate, fornite da Aschbacher, si perviene ad un teorema di struttura che può essere utile per una classificazione, del tutto ancora inesistente, delle 3-forme.

1. – Preliminari.

Consideriamo: $V = F$-spazio vettoriale di dimensione finita, F campo; t naturale $\geqslant 1$ e V^t il prodotto cartesiano di t copie di V; $E^t(V)$ lo F-spazio di tutte le funzioni da V^t in F.

(*) Lavoro eseguito con il contributo del MIUR (ex 40%, ex 60%).

Il gruppo lineare generale $GL(V)$ si rappresenta su $E^t(V)$ mediante

$$(\varrho g)(v_1, \ldots, v_t) = \varrho(v_1 g^{-1}, \ldots, v_t g^{-1}),$$

se $g \in GL(V)$ e se $\varrho \in E^t(V)$, $v_i \in V$; allo stesso modo, il gruppo simmetrico $S = Sym(\{1, \ldots, t\})$ si rappresenta su $E^t(V)$ mediante

$$\varrho s(v_1, \ldots, v_t) = \varrho(v_{1s^{-1}}, \ldots, v_{ts^{-1}}),$$

se $s \in S$ e se $\varrho \in E^t(V)$, $v_i \in V$.

Un elemento $\varrho \in E^t(V)$ si dice *simmetrico* (risp. *alternante*) se $\varrho s = \varrho$ (risp. $\varrho s = sgn(s)\varrho$) per ogni $s \in Sym(\{1, \ldots, t\})$, ($sgn(s)$ è la segnatura della permutazione s).

Si chiami con: $L^t(V)$ il sottospazio di tutte le funzioni $\varrho \in E^t(V)$ *lineari* in qualsiasi argomento; $S^t(V)$ (rispettivamente, $A^t(V)$) il sottospazio di $L^t(V)$ costituito dalle applicazioni multilineari simmetriche (rispettivamente, alternanti).

Se $\varrho \in E^t(V)$, una *similarità* di ϱ è un elemento $g \in GL(V)$ tale che $\varrho g = \lambda(g)\varrho$, $\lambda(g)$ opportuno in $F - \{0\} = F^*$; se $\lambda(g) = 1$, la similarità g si dice un'*isometria*.

Si denoti con $\Sigma(V, \varrho)$, $O(V, \varrho)$ il gruppo di tutte le similarità di ϱ, il gruppo di tutte le isometrie di ϱ, rispettivamente.

Se $\Delta \leqslant E^{t_1}(V) \cup \ldots \cup E^{t_k}(V)$, chiamiamo con $\Sigma(V, \Delta)$, $O(V, \Delta)$ l'intersezione dei gruppi $\Sigma(V, \varrho)$, $O(V, \varrho)$ rispettivamente, al variare di ϱ in Δ. Nel caso del gruppo $\Sigma(V, \Delta)$ si controlla facilmente che lo scalare $\lambda(g)$ non dipende da $\varrho \in \Delta$.

$\Sigma(V, \Delta)$ e $O(V, \Delta)$ si chiamano il *gruppo delle similarità* e il gruppo delle *isometrie* della famiglia Δ, rispettivamente.

Se $D \leqslant Sym(\{1, \ldots, t\})$ e se $\varrho \in E^t(V)$, poniamo

$$\varrho_D = \sum_{d \in D} \varrho d .$$

L'applicazione $E^t(V) \to E^t(V)$ definita ponendo $\varrho \to \varrho_D$ è un'applicazione lineare che, per restrizione a $L^t(V)$, dà un'applicazione lineare di $L^t(V)$ in $L^t(V)$.

Se $S = Sym(\{1, \ldots, t\})$, per ogni $\varrho \in L^t(V)$ si ha $\varrho_S \in S^t(V)$.

Siano $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una F-base di V e $\varrho \in L^t(V)$; se $(v_1, \ldots, v_t) \in V^t$, posto $v_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, t$, $h_{ij} \in F$, allora

$$\varrho(v_1, \ldots, v_t) = \varrho\left(\sum_j h_{ij} x_j, \ldots, \sum_j h_{tj} x_j\right),$$

e, per la linearità di ϱ in ciascun argomento, si ha che ϱ è determinato dagli scalari $\varrho(z_1, \ldots, z_t)$ quando $(z_1, \ldots, z_t)$ varia su tutti i sottoinsiemi ordinati di B di ordine t.

Scriviamo

$$\varrho = \sum_{(z_1, \dots, z_t)} r_{z_1, \dots, z_t} z_1 \dots z_t$$

per indicare che $\varrho(z_1, \dots, z_t) = r_{z_1, \dots, z_t}$.

L'addendo $r_{z_1, \dots, z_t} z_1 \dots z_t$ si dice un *monomio* di ϱ, quindi ϱ è determinato dai suoi monomi.

Si osservi che se ϱ è elemento simmetrico o alternante di $L^t(V)$, allora dalla conoscenza di un monomio di ϱ, in un'orbita dell'azione di $S = Sym(\{1, \dots, t\})$, ne deriva la conoscenza degli altri monomi dell'orbita in quanto $r_{z_1, \dots, z_t} = r_{z_{1\sigma}, \dots, z_{t\sigma}}$ per ogni $\sigma \in S$:
in questo caso, allora, si potrà scrivere soltanto un monomio per ogni orbita di S.

Una Applicazione.

Prendiamo in considerazione il caso $t = 3$, denotando, per brevità, sempre con S e con A, rispettivamente, il gruppo simmetrico e quello alterno sugli oggetti $\{1, 2, 3\}$.

Siano B una base di V e B^3 l'insieme prodotto di tre copie di B; consideriamo, quindi, i seguenti tre sottoinsiemi di B^3:

$$B_1^3 = \{(x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in B\},$$
$$B_2^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in B \text{ e due degli } x_i \text{ distinti}\},$$
$$B_3^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in B\} \text{ e gli } x_i \text{ a due a due distinti}\}.$$

Ovviamente S agisce su B^3 via

$$(x_1, x_2, x_3)\, s = (x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}),$$

$x_i \in B$, $s \in S$, quindi S agisce su ciascun B_i^3, $i = 1, 2, 3$.

Sia C_i, $i = 1, 2, 3$, un insieme di rappresentanti delle orbite di S su B_i^3; dopo ciò, siano $x \in B^3$ (fissato), z un qualsiasi elemento di B^3, $h^x : B^3 \to F$ tale che $h^x(z) = \delta_{x,z}$ (δ di Kronecker). h^x allora, per linearità, si estende ad un unico elemento di $L^3(V)$ che, su B^3, si comporta come h^x: continuiamo a chiamare con h^x tale estensione. Poiché, se $\varrho \in L^3(V)$, l'azione di ϱ su V^3 è nota non appena si sa come ϱ agisce su B^3, allora, per ogni $\varrho \in L^3(V)$, si ha

$$\varrho = \sum_{x \in B^3} \varrho(x)\, h^x.$$

Essendo ovvio che la famiglia $\{h^x : x \in B^3\}$ è parte libera di $L^3(V)$, si è così mostrato che $\{h^x : x \in B^3\}$ è una base di $L^3(V)$.

Ricordando che $\varrho \in L^3(V)$ è simmetrico se $\varrho = \varrho s$, $\forall s \in S$ e osservato che i gruppi S, A, $\{1\}$ agiscono in modo regolare sulle orbite di S su B_i^3 quando $i = 3, 2, 1$ rispettivamente, si può concludere che lo spazio $S^3(V)$ delle forme trilineari simmetriche possiede una base

$$\{h_S^x, h_A^y, h^z : x \in C_3, y \in C_2, z \in C_1\}.$$

Riprenderemo nel seguito, in alcuni casi particolari, le considerazioni ora fatte.

2. – 3-forme.

Se V è un F-spazio vettoriale di dimensione finita, F campo, una 3-*forma* su V è una terna $\varepsilon = (c, q, f)$ tale che:

(*i*) f è una forma trilineare su V;

(*ii*) $q : V \times V \to F$ è lineare nella prima variabile e verifica

$$q(x, \alpha y) = \alpha^2 q(x, y),$$
$$q(x, y+z) = q(x, y) + q(x, z) + f(x, y, z)$$

per tutti gli $\alpha \in F$ e $x, y, z \in V$;

(*iii*) $c : V \to F$ verifica

$$c(\alpha x) = \alpha^3 c(x),$$
$$c(x+y) = c(x) + c(y) + q(x, y) + q(y, x)$$

per ogni $\alpha \in F$ e per tutti gli $x, y \in V$.

Interpretazione di (*ii*). Se $x \in V$, sia $q_x : V \to F$ così definita $q_x(y) = q(x, y)$, $\forall y \in V$. q_x è una forma quadratica su V con forma bilineare associata f_x definita da $f_x(y, z) = f(x, y, z)$ se $y, z \in V$.

Ciò significa che l'applicazione q può essere identificata con la famiglia lineare di forme quadratiche su $V : \{q_x \mid x \in V\}$.

Ovviamente, poi, l'applicazione $c : V \to F$ è una forma cubica.

La 3-forma ε si dice *regolare* se $q(x, x) = 3c(x)$, $\forall x \in V$; inoltre, $g \in L^3(V)$ si dice *simmetrica ristretta* se g è simmetrica (nel senso del n. 1) e se $g(x, x, x) = 0$, $\forall x \in V$, quando car $F = 3$, mentre $g(x, y, y) = 0$ $\forall x, y \in V$ se car $F = 2$.

Con $R^3(V)$ indicheremo lo spazio di tutte le forme trilineari, simmetriche ristrette; si può allora osservare, ricordando l'*Applicazione* del n. 1, che se car $F = 3$ allora $R^3(V)$ ha una base

$$\{h_S^x, h_A^y : x \in C_3, y \in C_2\},$$

mentre, se car $F = 2$, allora $R^3(V)$ ha una base $\{h_S^x : x \in C_3\}$. In quest'ultimo caso, risulta $h_S^x = 6h^x$, se $x \in C_3$, e ciò comporta che l'applicazione $L^3(V) \to L^3(V)$ definita da $\varrho \to \varrho_S$ è un'applicazione lineare di $L^3(V)$ *sopra* $R^3(V)$.

Sia, ora, $\varepsilon = (c, q, f)$ una 3-forma su V. Per (ii), se $x, y \in V$, si ha

$$q(x, 2y) = 4q(x, y) = 2q(x, y) + f(x, y, y),$$

quindi

$$f(x, y, y) = 2q(x, y). \tag{1}$$

Per (ii) e (iii), se $x, y, z \in V$, è:

$$c(x + y + z) = c(x) + c(y) + c(z) + \sum_{u \neq v} q(u, v) + f(x, y, z). \tag{2}$$

Ne deriva che la forma f di cui in $i)$ è una forma simmetrica ove si pensi come il gruppo $Sym(\{1, 2, 3\})$ è rappresentato su $L^3(V)$ (cf. n. 1).

Di più, se car $F = 2$, per la (1) è $f(x, y, y) = 0$ $\forall x, y \in V$; se car $F = 3$, per la (2) si ha:

$c(3x) = 3c(x) + 6q(x, x) + f(x, x, x)$, cioè $f(x, x, x) = 0$ per ogni $x \in V$.

Ciò prova che la forma trilineare f è simmetrica ristretta.

Infine, per (iii) riesce:

$$8c(x) = c(2x) = 2c(x) + 2q(x, x),$$

cioè $6c(x) = 2q(x, x)$, $\forall x \in V$.

Ne deriva, se car $F \neq 2$, $3c(x) = q(x, x)$, $\forall x \in V$, cioè ε è regolare.

Raccogliendo i risultati sin qui ottenuti si perviene al

LEMMA 1. – *Sia $\varepsilon = (c, q, f)$ una 3-forma su V. Allora se $x, y, z \in V$ si ha:*

a) $f(x, y, y) = 2q(x, y)$;

b) $c(x + y + z) = c(x) + c(y) + c(z) + \sum_{u \neq v} q(u, v) + f(x, y, z)$;

c) f è simmetrica ristretta;

d) ε è regolare se car $F \neq 2$.

Denotiamo, ora, con $T(V)$ lo spazio di tutte le 3-forme di V e con $T^*(V)$ il sottospazio di tutte le 3-forme regolari.

Se $\varepsilon = (c, q, f) \in T(V)$, poniamo

$$\varepsilon P_1 = c, \qquad \varepsilon P_2 = q, \qquad \varepsilon P_3 = f$$

per modo che:

$P_1 \colon T(V) \to E^1(V) = \{$funzioni da V in $F\}$,

$P_2 \colon T(V) \to E^2(V) = \{$funzioni di $V \times V \to F\}$,

$P_3 \colon T(V) \to E^3(V) = \{$funzioni di $V \times V \times V \to F\}$

sono applicazioni lineari di $T(V)$ in $E^t(V)$, $t=1,2,3$ e, quindi, ha senso considerare:

$$\operatorname{Ker} P_1 = \{\varepsilon = (c, q, f) \mid c = 0\},$$
$$\operatorname{Ker} P_2 = \{\varepsilon = (c, q, f) \mid q = 0\},$$
$$\operatorname{Ker} P_3 = \{\varepsilon = (c, q, f) \mid f = 0\}.$$

Con tali notazioni, sussistono le seguenti affermazioni che compendiamo nel

LEMMA 2.

a) $\operatorname{Ker} P_i \leqslant \operatorname{Ker} P_3$ *se* $i = 1, 2$;

b) *se* car $F \neq 2$ *allora* $\operatorname{Ker} P_3 = \operatorname{Ker} P_2$;

c) *se* car $F \neq 2, 3$ *allora* P_i *è iniettiva per ogni* $i = 1, 2, 3$;

d) *se* car $F = 3$ *allora* P_1 *è iniettiva e* $\operatorname{Ker}(P_2) = \operatorname{Ker}(P_3)$ *è costituito da tutti gli* $\varepsilon = (c, q, f) \in T(V)$ *con* $c: F \to F$ *semilineare rispetto all'endomorfismo* $\alpha \to \alpha^3$ *di* F;

e) *se* car $F = 2$ *e* $F \neq GF(2)$ *allora* P_1 *e* P_2 *sono iniettive e, per ogni* $\varepsilon = (c, q, f) \in Ker P_3$, q *è sesquilineare rispetto all'endomorfismo* $\alpha \to \alpha^2$ *di* F;

f) *se* F *è di ordine due allora per ogni* $\varepsilon = (c, q, f) \in \operatorname{Ker} P_3$, q *è bilineare,* $\operatorname{Ker} P_2$ *consiste di quegli* $\varepsilon \in T(V)$ *con* c *lineare e* $\operatorname{Ker} P_1$ *consiste di quegli* $\varepsilon \in T(V)$ *con* q *bilineare simmetrica.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\varepsilon = (c, q, f)$ una 3-forma.

Se $c = 0$, per (iii), $\pi \in E^2(V)$ definita da $\pi(x, y) = q(x, y) + q(y, x)$, $x, y \in V$ è la funzione nulla, quindi, per b) del lemma 1, si ha $f = 0$, cioè $\operatorname{Ker} P_1 \leqslant \operatorname{Ker} P_3$.

Se $q = 0$, da (*ii*) si trae $f = 0$, quindi $\operatorname{Ker} P_2 \leqslant \operatorname{Ker} P_3$.

La a) è così provata.

Per a) del lemma 1, quali che siano $x, y \in V$ è $f(x, y, y) = 2q(x, y)$ e, se car $F \neq 2$ e se $f = 0$, si trae $q = 0$, cioè vale la b).

Per d) del lemma 1, è $6c(x) = 2q(x, x)\ \forall x \in V$, quindi, se car $F \neq 2, 3$, si ha $\operatorname{Ker} P_2 \leqslant \operatorname{Ker} P_1$; ne segue, per quanto già visto, $\operatorname{Ker} P_1 = \operatorname{Ker} P_2 = \operatorname{Ker} P_3$ e la c) è verificata.

Se car $F = 3$, per b) è $\operatorname{Ker} P_3 = \operatorname{Ker} P_2$; sia $\varepsilon = (c, q, f) \in \operatorname{Ker} P_1$, quindi $c = 0$; $\operatorname{Ker} P_1 \leqslant \operatorname{Ker} P_3$ implica anche $f = 0$, e allora $q = 0$ poiché $\operatorname{Ker} P_3 = \operatorname{Ker} P_2$ e P_1 è iniettiva. Inoltre, se $\varepsilon \in \operatorname{Ker} P_2$, cioè se $q = 0$, per (*iii*) c è semilineare rispetto all'applicazione $\alpha \to \alpha^3$ di F in F. Ovviamente tale applicazione se car $F = 3$ è un endomorfismo: ciò prova la d).

Sia car $F = 2$ e $F \neq GF(2)$; se $\varepsilon \in \operatorname{Ker} P_1$, allora $c = 0$ e, per (*iii*), q è simmetrica, quindi, l'ipotesi $F \neq GF(2)$ comporta l'esistenza di $\beta \in F$ tale che $\beta^2 \neq \beta$. Ne deriva $\beta^2 q(x, y) = q(x, \beta y) = q(\beta y, x) = \beta q(x, y)$, $\forall x, y \in V$, cioè $q = 0$.

Per (ii) si ha, allora, $f = 0$ e P_1 è iniettiva.

Sia $\varepsilon = (c, q, f) \in \operatorname{Ker} P_2$; allora $q = 0$ e, per (iii), c è additiva e $c(\alpha x) = \alpha^3 c(x)$ per ogni $\alpha \in F$ e per ogni $x \in V$. Sia $l(z)$ un polinomio su $GF(2)$ e sia u un suo zero; allora

$$0 = c[l(u)x] = l(u)^3 c(x) = l(u^3)\, c(x)$$

se $x \in V$ e, se $c \neq 0$, riesce $l(u^3) = 0$.

Ora, se $F \neq GF(2)$, si possono scegliere $l(z)$ irriducibile su $GF(2)$ e u non appartenente a $GF(2)$ e generatore del gruppo moltiplicativo del campo di decomposizione di $l(z)$ su $GF(2)$. Con tali scelte, u è di ordine $2^t - 1$ (t naturale $\geqslant 2$) e, per la transitività del gruppo di Galois di $l(z)$ sulle sue radici, si ha $u^3 = u^{2^j}$, per qualche $j < t$: contraddizione.

Nelle ipotesi attuali è allora $q = 0$, $c = 0$, $f = 0$ e P_2 è iniettiva.

Infine, se car $F = 2$ e se $f = 0$ (cioè se $\varepsilon \in \ker P_3$) allora, per (ii), q è sesquilineare rispetto all'endomorfismo $\alpha \to \alpha^2$ di F e la e) è verificata.

Supponiamo ora che $F = GF(2)$. Se $\varepsilon = (c, q, f) \in \operatorname{Ker} P_3$, allora q è bilineare per (ii); se $\varepsilon \in \operatorname{Ker} P_2$ allora c è lineare, mentre se $\varepsilon \in \operatorname{Ker} P_1$ si ha che q è bilineare (è $\operatorname{Ker} P_1 \leqslant \operatorname{Ker} P_3$) simmetrica. Ciò prova f) e, quindi, il lemma 2 è dimostrato.

Nel lemma 1 abbiamo osservato che ogni 3-forma, in caratteristica $\neq 2$, è regolare. Vogliamo ora completare quest'ultima osservazione includendo il caso della caratteristica due; faremo ciò non tanto per acquisire un'ulteriore conoscenza sulle 3-forme, ma perché la dimostrazione del risultato sembra contenere qualche tecnica utile ad un maggiore approfondimento della teoria. Stabiliamo quindi il

TEOREMA. – *Se $F \neq GF(2)$, ogni 3-forma è regolare.*

DIMOSTRAZIONE. – Per quanto osservato, resta da esaminare il caso $|F| > 2$ e car $F = 2$.

Cominciamo la prova con la seguente costruzione.

Se $\varrho \in L^3(V)$ definiamo $\varrho^c \in E^1(V)$, $\varrho^q \in E^2(V)$, $\varrho^f = \varrho \in E^3(V)$ nel seguente modo:

$$\varrho^c(x) = \varrho(x, x, x),$$

$$\varrho^q(x, y) = \varrho_A(x, y, y),$$

$$\varrho^f = \varrho \in E^3(V),$$

se $x, y \in V$ e se ϱ_A ha il significato messo in evidenza all'inizio del n. 1, essendo A il gruppo alterno su tre lettere.

Si verifica allora che $\varrho^\varepsilon = (\varrho^c, \varrho^q, \varrho^f)$ è una 3-forma che risulta regolare poiché, per ogni $x \in V$, si ha:

$$\varrho^q(x,\, x) = \varrho_A(x,\, x,\, x) = \sum_{\alpha \in A} \varrho\alpha(x) = 3\varrho(x,\, x,\, x) = 3\varrho^c(x).$$

Dopo ciò, consideriamo l'applicazione

$$J : L^3(V) \to T^*(V)$$

definita da $\varrho \to \varrho^\varepsilon$, se $\varrho \in L^3(V)$; J è un'applicazione lineare e, se riusciamo a provare che

$$J : L^3(V) \to T(V)$$

è applicazione surgettiva, il risultato segue perché allora, ovviamente, si ha $T(V) = T^*(V)$.

Accorgiamoci, ora, che $J : L^3(V) \to T(V)$ è suriettiva se riusciamo a provare che $\operatorname{Ker} P_3 \leqslant L^3(V)\, J$; infatti, se questo è il caso, ricordando che l'applicazione $JP_3\colon L^3(V) \to R^3(V)$ è surgettiva (cf. n. 2) e che, per la c) del Lemma 1, $T(V)\, P_3 \subseteq R^3(V)$, si ottiene $T(V)\, P_3 = R^3(V) = L^3(V)\, JP_3$, quindi $T(V)/\operatorname{Ker} P_3 = L^3(V)\, J/\operatorname{Ker} P_3$, cioè $T(V) = L^3(V)\, J$. Verifichiamo allora che $\operatorname{Ker} P_3 \leqslant L^3(V)\, J$.

Ferme le considerazioni e le notazioni sviluppate nell'*Applicazione* del n. 1, siano:

$$U = \{h^x \mid x \in C_1 \cup C_2\},$$

$$UJ = \{(h^x)^\varepsilon \mid h^x \in U\},$$

ove $(h^x)^\varepsilon$ è la 3-forma definita all'inizio della dimostrazione del teorema, a partire da un elemento $h^x \in L^3(V)$.

Con un semplice calcolo ci si accorge che $(h^x)_S = 2(h^x)_A$ se $h^x \in U$ e se S ed A sono il gruppo simmetrico e alternante, rispettivamente, su $\{1, 2, 3\}$; ne deriva che $UJ \leqslant \operatorname{Ker} P_3$.

Poiché P_2, per la e) del lemma 2, è iniettiva, $(UJ)\, P_2$ è linearmente indipendente in $E^2(V)$, così UJ genera un sottospazio n^2-dimensionale di $\operatorname{Ker} P_3$, se $n = \dim_F V$. D'altra parte, ancora per la e) del lemma 2, $\operatorname{Ker} P_3$ è isomorfo al sottospazio $(\operatorname{Ker} P_3)\, P_2$ dello spazio di tutte le forme sesquilineari di $V \times V$ in F rispetto all'endomorfismo $\alpha \to \alpha^2$ e, quindi, la dimensione di $\operatorname{Ker} P_3$ è al più uguale a n^2.

Ne deriva $\operatorname{Ker} P_3 = \langle UJ \rangle$ e, risultando $\langle UJ \rangle \leqslant L^3(V)\, J$, il teorema è completamente dimostrato.

3. – Esempi.

A) Sia K un'estensione di Galois, cubica e ciclica, del campo F e sia $<\varrho>$ $=$ Gal (K/F). Allora, $\varepsilon = (c,\, q, f)$ è una 3-forma di K su F se si assume:

I) $c = n_{K/F}$, ove $n_{K/F}$ è la *norma* di K su F;

II) se $x, y \in K$, $q(x, y) = tr_{K/F}(x(y\varrho)(y\varrho^2))$, ove $tr_{K/F}$ è la *traccia* di K su F;

III) se $x, y, z \in K$, $f(x, y, z) = tr_{K/F}(x(y\varrho)(z\varrho^2) + x(z\varrho)(y\varrho^2))$.

La verifica si omette per brevità.

Si osservi che per ogni x non nullo in K è $c(x) = n_{K/F}(x) \neq 0$. Quest'ultima è una circostanza che merita una riflessione più generale nel senso che:

se $\varepsilon = (c, q, f)$ *è una 3-forma su lo F-spazio* V,

se W *è sottospazio di* V *tale che per ogni* $u \in W$, $u \neq 0$ *risulta* $c(u) \neq 0$, *allora:*

1) *se* F *è algebricamente chiuso si ha* $\dim_F(W) \leqslant 1$;

2) *se* F *è un campo finito allora* $\dim_F(W) \leqslant 3$.

Infatti, se il polinomio cubico c non possiede zeri in $W - \{0\}$, allora con x e y F-linearmente indipendenti in W, si ha, per ogni $z \in F$:

$$c(zx + y) = z^3 c(x) + z^2 q(y, x) + zq(x, y) + c(y) \neq 0 .$$

Tale circostanza è in contraddizione con l'ipotesi che F è un campo algebricamente chiuso, come supposto in 1). Se il campo F è finito di caratteristica $p > 0$ e se $n = \dim_F(W)$, quindi $W \approx F^n$, allora, se $3 = gr(c) < n$, il numero degli zeri del polinomio cubico c in F^n è, per un teorema di Chevalley-Warning ([1]), un multiplo di p. Ne deriva che c in F^n ammette almeno due zeri, quindi c ammette almeno uno zero in $F^n - \{0\}$. Ciò implica $\dim_F(W) \leqslant gr(c) = 3$, come asserito in 2).

B) Sia Y una base ordinata dello F-spazio V e sia f una forma trilineare simmetrica su V che verifica $f(x, x, y) = 0$ per tutti gli $x, y \in Y$. Allora $\varepsilon = (c, q, f)$ è una 3-forma se si assume

$$q\Big(u, \sum_{y \in Y} a_y y\Big) = \sum_{y < z} a_y a_z f(u, y, z),$$

$$c\Big(\sum_{y \in Y} a_y y\Big) = \sum_{y < z < t} a_y a_z a_t(y, z, t)$$

ove $u \in V$ e a_y, a_z, a_t sono elementi di F.

([1]) Il teorema di C-W afferma che se F è un campo finito di car $p > 0$ e se $f_\alpha \in F[x_1, \ldots, x_n]$ con $grf_\alpha < n$, allora, detto X l'insieme degli zeri comuni agli f_α in F^n, risulta $|X| \equiv 0 \pmod p$.

Per la dimostrazione si veda Serre, J. P. «A course in arithmetic», Springer-Verlag, New York, 1973.

Di più, ε è univocamente determinata dalla condizione $c(y) = q(u, y) = 0$ per ogni $u \in V$ e per ogni $y \in Y$.

Una specializzazione importante (3-forma del Dickson).

Sia V lo spazio vettoriale 27-dimensionale sul campo F con base $B = \{x_i, y_j, z_{ij}: 1 \leqslant i, j \leqslant 6, i < j\}$ e, se $i < j$, si abbia $z_{ij} = -z_{ji}$.

Sia f la forma trilineare simmetrica su V i cui monomi non nulli nella base B (cfr. n. 1) sono:

$$x_i, y_j, z_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant 6, \, i < j\,,$$
$$z_{1t,\,2t} \quad z_{3t,\,4t} \quad z_{5t,\,6t}, \qquad t \in G\,,$$

ove G è un insieme di rappresentanti di $(A_6)_P$ in A_6, essendo A_6 il gruppo alterno su $\{1, 2, \ldots, 6\}$ e $(A_6)_P$ lo stabilizzatore in A_6 della partizione $P = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$ di $\{1, \ldots, 6\}$.

Se $\varepsilon = (c, q, f)$ è la 3-forma definita da f, come visto in B), allora tale 3-forma è una presentazione della cosidetta 3-forma, di dimensione 27, del Dickson, cfr. [3].

Il gruppo delle isometrie di f è il gruppo universale di Chevalley $E_6(F)$ su F, ampiamente studiato da M. Aschbacher in [1].

4. – Un teorema di struttura.

Con le notazioni del n. 2 e ricordando l'interpretazione della (*ii*) nella definizione di 3-forma, siano $\varepsilon = (c, q, f)$ una 3-forma regolare su lo F-spazio V ed A un sottospazio di V; dopo ciò definiamo

$$A\varpi = \{x \in V \,|\, q_x(a) = 0 \ \ \forall a \in A\}\,.$$

$A\varpi$ è un sottospazio di V e se $A = \langle x \rangle$, $x \in V$, $\langle x \rangle\, \varpi = x\varpi$ ha codimensione al più uguale ad 1 in V (infatti, $x\varpi$ è il nucleo dell'applicazione lineare $z \to q(z, x)$, $z \in V$, di V in F).

Un sottospazio A di V si dice *singolare* se $A\varpi = V$. Ne deriva che A è singolare se e solo se A è un sottospazio totalmente singolare di V rispetto a ciascuna delle forme quadratiche q_x, $x \in V$.

Siano: $x \in V$, q_x la forma quadratica su V indotta da q, f_x la forma bilineare associata a q_x, $rad(f_x) = \{z \in V | f_x(z, t) = 0 \ \forall t \in V\}$ il radicale di f_x; con tali dati, se A è un sottospazio di V, definiamo

$$A_{(f)} = \bigcap_{a \in A} \operatorname{rad}(f_a). \tag{0}$$

Se $A = V$, $V_{(f)}$ si chiama il *radicale della* 3-*forma* ε e si indicherà con il simbolo $\operatorname{rad}(\varepsilon)$. Quale che sia $A \leqslant V$, $A_{(f)}$ è un sottospazio di V e, se B è un altro sottospazio di V, la relazione $A \leqslant B_{(f)}$ è simmetrica, cioè

$$A \leqslant B_{(f)} \Leftrightarrow B \leqslant A_{(f)}.$$

Ciò dipende dalla simmetria di f; infatti, se $w \in B$ e se $A \leqslant B_{(f)}$, per ogni $a \in A$ risulta:

$$f_a(w, z) = f(a, w, z) = f(w, a, z) = f_w(a, z) = 0 ,$$

se z è un qualsiasi elemento di V.

L'altra implicazione si verifica in modo analogo.

Si osservi che, con la definizione (0), A è singolare se $A \leqslant A_{(f)}$.

Ciò premesso, stabiliamo il seguente

LEMMA 3. – *Se A è un sottospazio di V di dimensione r, generato da vettori singolari* (2), *allora* $\dim_F(V/A\varpi) \leqslant r(r-1)/2$; *se* $= A$ *è un sottopiano di V generato da vettori singolari c_1, c_2, c_3 tali che $f(c_1, c_2, c_3) \neq 0$, allora $V = A \oplus A\varpi$.*

DIMOSTRAZIONE Sia $A = \langle c_1, c_2, \ldots, c_r \rangle$, c_i vettori singolari di V. Se $x \in A\varpi$ allora $q_x(c_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ e $f_x(c_i, c_j) = 0$ se $i, j = 1, 2, \ldots, r$ e $i < j$.

Viceversa, se $f_x(c_i, c_j) = 0$ $\forall i, j = 1, \ldots, r$ e $i < j$, allora, essendo i vettori c_i singolari, $q_x(a) = 0$ $\forall a \in A$, cioè $x \in A\varpi$. Consideriamo il sottospazio di V

$$B_{ij} = \{z \in V | f_{c_i}(z, c_j) = 0\}, \qquad i, j = 1, \ldots, r \quad \text{e} \quad i \neq j ;$$

allora, con $x \in A\varpi$, si ha

$$f_{c_i}(z, c_j) = f(c_i, x, c_j) = f(x, c_i, c_j) = f_x(c_i, c_j) = 0 ,$$

se $i, j = 1, 2, \ldots, r$ e $i < j$, cioè

$$x \in \bigcap_{\substack{i, j = 1, \ldots, r \\ i < j}} B_{ij}.$$

Viceversa, se $x \in \bigcap_{\substack{i, j = 1, \ldots, r \\ i < j}} B_{ij}$, allora

$$f_{c_i}(x, c_j) = 0 = f_x(c_i, c_j) \qquad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r\} \quad \text{e} \quad i < j ,$$

(2) Ovviamente un vettore $\neq 0$ si chiamerà singolare se il sottospazio da esso generato è singolare; in tal caso, con linguaggio proiettivo, si parlerà di *punto* singolare. Nel seguito, spesso, adotteremo tale linguaggio, quindi *rette* saranno i sottospazi 2-dimensionali di V, *piani* quelli 3-dimensionali, etc.

cioè $x \in A\varpi$. Ne deriva

$$x \in A\varpi \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\substack{i,\, j = 1,\, \ldots,\, r \\ i < j}} B_{ij}$$

e, poiché B_{ij}, in quanto sottospazio di V, f_{c_i}-ortogonale a c_j, ha codimensione al più uguale ad 1 in V, la prima parte del lemma segue facilmente.

Per provare la seconda parte, si osservi subito che, da quanto già visto, segue codim $(A\varpi) \leq 3$.

Mostriamo allora che, se $g = f_{|A}$, allora

$$A_{(g)} = \bigcap_{t \in A} \mathrm{rad}\,(g_t) = (0)\,.$$

Perciò, sia $z \in A_{(g)}$, cioè $z \in \mathrm{rad}\,(g_t)$ per ogni $t \in A$; ne deriva $g_t(z,\, l) = 0$, quali che siano $t,\, l, \in A$. Posto $z = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3$, α, β, $\gamma \in F$, $t = c_2$, $l = c_3$ risulta:

$$g(\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3,\, c_2,\, c_3) = \alpha g(c_1,\, c_2,\, c_3) + t\beta g(c_2,\, c_2,\, c_3) + \gamma g(c_3,\, c_2,\, c_3) = 0\,.$$

Da $g(c_2,\, c_2,\, c_3) = g_{c_3}(c_2,\, c_2) = \eta(q'_{c_3}(2c_2) - 2q'_{c_3}(c_2))$, con $\eta = 1$ o $1/2$ a seconda che car $F = 2$ o car $F \neq 2$ rispettivamente, e con q'_{c_3} forma quadratica su A associata a g_{c_3}, si ottiene, poiché $\langle c_2 \rangle$ è un punto singolare, $g(c_2,\, c_2,\, c_3) = 0$; analogamente, $g(c_3,\, c_2,\, c_3) = 0$.

Per la scelta fatta sull'azione di f sui generatori c_1, c_2, c_3 di A, è allora $\alpha = 0$. Similmente, si può verificare che $\beta = \gamma = 0$. È quindi $A_{(g)} = (0)$.

Sia $x \in A \cap A\varpi$; quali che siano $t,\, l \in A$ riesce $g_t(x,\, l) = g(t,\, x,\, l) = g(x,\, t,\, l) = g_x(t,\, l) = \eta(q'_x(t + l) - q'_x(t) - q'_x(l))$, ove η e q'_x hanno lo stesso significato di prima.

Poiché $x \in A \cap A\varpi$ riesce $g_t(x,\, l) = 0$ $\forall t,\, l \in A$, cioè $x \in A_{(g)}$, quindi $A \cap A\varpi = (0)$.

Da $\dim_F V - \dim_F (A\varpi) \leq 3 = \dim A$, segue $V = A \oplus A\varpi$. Il lemma è così provato.

Siano A e B sottospazi di V e si abbia $A \leq B\varpi$ e $B \leq A\varpi$; esprimeremo questa circostanza scrivendo $A\varpi B$ e adotteremo il simbolo $A \oplus_\varpi B$ per indicare che contemporaneamente risulta $A \oplus B$ e $A\varpi B$.

Se $V = A \oplus_\varpi B$, con A e B sottospazi di V, diremo che V è *somma ϖ-ortogonale dei sottospazi* A e B. Tale definizione si estende al caso di un numero finito di sottospazi di V in modo ovvio.

OSSERVAZIONE 1. – Sia $V = A \oplus_\varpi B$, A, B sottospazi di V; allora:

a) $f = f_{|A} + f_{|B}$, con $f_{|A}$ e $f_{|B}$ restrizioni della forma trilineare f ad A e B, rispettivamente;

b) se $v \in V$, posto $v = a + b$, $a \in A$, $b \in B$, è:

$$\mathrm{rad}\,(f_v) = \mathrm{rad}\,(g_a) + \mathrm{rad}\,(h_b)\,,$$

ove $g(h)$ è la restrizione di f ad $A(B)$, rispettivamente;

c) se p_A, p_B sono le proiezioni di V su A e su B, rispettivamente, allora per ogni sottospazio C di V si ha:

$$C_{(f)} = (C_{p_A})_{(g)} + (C_{p_B})_{(h)},$$

essendo $g(h)$ come specificato in b); inoltre,

$$C\varpi = (C_{p_A})\,\varpi + (C_{p_B})\,\varpi\,.$$

Giustifichiamo a), perché b) e c) si possono verificare con considerazioni analoghe.

Sia $\{d_1, \ldots, d_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ F-base di V con $\{d_1, \ldots, d_r\}$ ($\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$) F-base di $A(B)$, rispettivamente. Se $x, y, z \in V$, scritti tali elementi nella F-base indicata e sfruttando la linearità di f nell'esplicitazione di $f(x, y, z)$, si ha che ciascun addendo che compare nello sviluppo di $f(x, y, z)$ è costituito, a meno di uno scalare, da una terna di vettori della base fissata di V, sulla quale agisce f, e, in ogni terna, non formata tutta da vettori di A o di B, due vettori almeno appartengono o ad A oppure a B. Dopo ciò, se ad esempio consideriamo un addendo del tipo $f(d_i, d_j, e_k)$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, $r+1 \leqslant k \leqslant n$, risulta, per la simmetria di f e per l'ipotesi $B \leqslant A\varpi$:

$$\begin{aligned} f(d_i, d_j, e_k) &= f(e_k, d_i, d_j,) = f_{e_k}(d_i, d_j) = \\ &= \eta(q_{e_k}(d_i + d_j) - q_{e_k}(d_i) - q_{e_k}(d_j)) = 0\,, \end{aligned}$$

con η avente il solito significato. Con accorgimenti di questo tipo è, allora, subito visto che $f = f_{|A} + f_{|B}$.

Nel lemma 3 ci siamo accorti che se A è un opportuno sottopiano di V allora A e il sottospazio $A\varpi$ di V, riproducono l'intero spazio V come somma diretta. Il seguente lemma chiarisce che, con convenienti ipotesi, V può pensarsi come somma ϖ-ortogonale dei suoi sottospazi A e $A\varpi$.

LEMMA 4. – *Sia C il sottoinsieme di V costituito da vettori singolari c tali che codim $rad\,(f_c) = 2$. Se $A = \langle c \cap A \rangle$ è un sottopiano di V su cui la forma trilineare f è non banale, e se car $F \neq 2$, si ha $V = A \oplus A\varpi$.*

DIMOSTRAZIONE. – Siano $c_1, c_2, c_3 \in C$ tali che $f(c_1, c_2, c_3) \neq 0$ e poniamo $A = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ e $B = A\varpi$.

Per il lemma 3, si ha $V = A \oplus B$.

Sia t un vettore qualsiasi in V; allora, per la simmetria di f e per la singolarità del vettore c_1, si ha:

$$f_{c_1}(c_1, t) = f(c_1, c_1, t) = f_t(c_1, c_1) = \eta(q_t(2c_1) - 2q_t(c_1)) = 0 ,$$

con η avente il solito significato.

Ne deriva: $\langle c_1 \rangle \leqslant \mathrm{rad}\,(f_{c_1}) \cap A$.

Per provare l'inclusione opposta, siano $z \in A$ e $f_{c_1}(z, t) = 0\ \forall t \in V$; posto $z = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3$, $\alpha, \beta, \gamma \in F$, si ha, per la singolarità dei vettori c_3 e c_1 e per essere $f(c_1, c_2, c_3) \neq 0$, $f(c_1, \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3, c_3) = \beta f(c_1, c_2, c_3) = 0$, quindi $\beta = 0$. Analogamente, $f(c_1, \alpha c_1 + \gamma c_3, c_2) = 0 = \gamma f(c_1, c_2, c_3)$, cioè $\gamma = 0$.

Ne deriva $z = \alpha c_1$, quindi,

$$\langle c_1 \rangle = \mathrm{rad}\,(f_{c_1}) \cap A .$$

Sia, ora, $z \in \mathrm{rad}\,(f_{c_1})$; si ha allora $f_{c_1}(z, t) = 0\ \forall t \in V$. Posto $z = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + l$, $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $l \in A\varpi = B$, si ha, come visto prima, $f_{c_1}(\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + l, c_3) = 0 = f(c_1, \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + l, c_3) = \beta f(c_1, c_2, c_3) + f(c_1, l, c_3)$.

Poiché $f(c_1, l, c_3) = f_l(c_1, c_3) = \eta(q_l((c_1 + c_3) - q_l(c_1) - q_l(c_3)) = 0$ in quanto $l \in A\varpi$, risulta $\beta = 0$. Analogamente, da $f(c_1, \alpha c_1 + \gamma c_3 + l, c_2) = 0 = \gamma f(c_1, c_2, c_3)$ segue $\gamma = 0$. Ne deriva $z = \alpha c_1 + l$ e, quindi,

$$\mathrm{rad}\,(f_{c_1}) \leqslant \langle c_1, B \rangle .$$

L'ipotesi codim $\mathrm{rad}\,(f_{c_1}) = 2$ fornisce poi

$$\mathrm{rad}\,(f_{c_1}) = \langle c_1, B \rangle .$$

Analogamente per $\mathrm{rad}\,(f_{c_2})$ e per $\mathrm{rad}\,(f_{c_3})$, cioè

$$\mathrm{rad}\,(f_{c_i}) = \langle c_i, B \rangle, \qquad i = 1, 2, 3 .$$

Con riferimento al sottospazio di V, $A_{(f)}$, si ottiene allora:

$$A_{(f)} = \bigcap_{a \in A} \mathrm{rad}\,(f_a) \leqslant \bigcap_{i = 1, 2, 3} (c_i, B) = B .$$

Sia $z \in B$; poiché $z \in \bigcap_{i=1,2,3} \mathrm{rad}\,(f_{c_i})$, è $f_{c_i}(z, t) = 0$, $\forall t \in V$, $i = 1, 2, 3$, quindi, $z \in A_{(f)}$ in quanto, posto $a = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3$, $\alpha, \beta, \gamma \in F$, è, per ogni $t \in V$,

$$\begin{aligned} f_{\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3}(z, t) &= f(\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3, z, t) = \\ &= \alpha f_{c_1}(z, t) + \beta f_{c_2}(z, t) + \gamma f_{c_3}(z, t) = 0 . \end{aligned}$$

È allora $A_{(f)} = B = A_\varpi$.

Per provare compiutamente il lemma, si deve ancora mostrare che $A \leqslant B\varpi$.

Sia $z \in A$; poiché $A\varpi = A_{(f)}$, ogni $t \in A\varpi$ è elemento di $\mathrm{rad}\,(f_z)$, quindi $f_z(t, v) = 0\ \forall v \in V$.

Ne deriva che la forma bilineare f_z è una forma alternante su $A\varpi$ e, quindi, essendo car $F \neq 2$, da $q_z(x) = f_z(x, x)$ $\forall x \in V$, segue l'asserto e la dimostrazione del lemma è completata.

Si osservi che se car $F = 2$, ogni $t \in A\varpi$ è, come nella precedente dimostrazione, elemento di rad f_z, ma, se t *non* appartiene al radicale quadratico di q_z (radicale quadratico che può, in caratteristica due, essere contenuto propriamente in rad(f_z)) è $q_z(t) \neq 0$.

Ciò premesso, desideriamo mettere in evidenza un teorema di struttura, valido per opportuni spazi V, dotati di una 3-forma ε; per esplicitare ciò chiariamo prima il significato di quanto ci accingiamo a fare.

Nel caso ordinario di uno spazio V dotato di una forma quadratica q, è noto che V è somma diretta ortogonale di sottospazi irriducibili (di sottospazi, cioè, che non si possono pensare come somma ortogonale di sottospazi propri). Tali sottospazi irriducibili, poi, hanno dimensione uno oppure due.

Per spazi (V, ε), $\varepsilon = 3$-forma, consideriamo come analogo al concetto di «somma diretta ortogonale» quello di «somma diretta ϖ-ortogonale» e diciamo che V è irriducibile se non può scriversi come somma diretta ϖ-ortogonale di sottospazi propri. In generale, nel caso di uno spazio (V, ε), $\varepsilon = 3$-forma, i sommandi diretti irriducibili in una decomposizione di V in somma diretta ϖ-ortogonale non sono dominabili, quanto alla loro dimensione: si possono infatti dare esempi, cfr. [2], di irriducibili di dimensione finita ma arbitrariamente alta.

Il prossimo teorema mostra come, sotto opportune condizioni, si può ripristinare, analogamente al caso classico, una decomposizione di (V, ε) in somma diretta ϖ-ortogonale di irriducibili, ciascuno di dimensione tre; tale circostanza fa ben sperare in una possibile classificazione delle 3-forme almeno in alcuni casi particolari, ma significativi.

Prima qualche ulteriore informazione.

Siano A e B punti singolari distinti di V e poniamo $A = \langle x \rangle$, $B = \langle y \rangle$, $x, y \in V$.

Se $v \in V$ e se $\alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \in F$, è un vettore della retta $A + B$, allora, per (ii) della definizione di 3-forma, si ha:

$$q_v(\alpha x + \beta y) = q(v, \alpha x + \beta y) = q(v, \alpha x) + q(v, \beta y) + f(v, \alpha x, \beta y).$$

Poiché A e B sono singolari, è $q(v, \alpha x) = 0 = q(v, \beta y)$, mentre, si verifica facilmente che $f(v, \alpha x, \beta y) = 0$ se e solo se $A \leqslant B_{(f)}$.

Ne deriva:

Se A e B sono punti singolari distinti di V allora o

a) $A \leqslant B_{(f)}$ e la retta $A + B$ è singolare con tutti i suoi punti singolari, oppure

b) $A \not\leqslant B_{(f)}$; *in tal caso la retta $A + B$ è non singolare e gli unici punti singolari di $A + B$ sono i punti A e B.*

Una retta soddisfacente la condizione b) della affermazione precedente si chiama *iperbolica*.

Una n-pla $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di punti di V si dice *speciale* se:

1) ogni A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, è singolare;
2) se $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, allora $A_i + A_j$ è retta iperbolica,
3) se $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \neq j \neq k$, allora $A_i \nleq (A_j + A_k)\varpi$.

Un sottospazio X di V, generato da una n-pla speciale, si dice un *n-sottospazio speciale* di V.

OSSERVAZIONE 2. – Il piano $A = (C_1, C_2, C_3)$, ove $C_i = \langle c_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$ e che compare nel lemma 4, è un *piano speciale*.

Infatti, per ipotesi, per ogni $i = 1, 2, 3$, C_i è singolare. Se, poi, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e se $i \neq j$ allora $C_i + C_j$ è retta iperbolica in quanto $C_i \nleq (C_j)_{(f)}$. Se no, da $C_i \leqslant (C_j)_{(f)} = \mathrm{rad}(f_{c_j}) = \langle c_j, B \rangle$, ove $B = A\varpi$ (si veda il lemma 4), segue la F-dipendenza lineare dei vettori c_i, c_j: contraddizione.

Inoltre, se $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ e se $i \neq j \neq k$, è

$$C_i \nleq (C_j + C_k)\varpi .$$

Se no,

$$q_{c_i}(c_j + c_k) = 0 = q_{c_i}(c_j) + q_{c_i}(c_k) + \eta' f_{c_i}(c_j, c_k) = \eta' f(c_i, c_j, c_k),$$

con $\eta' = 1$ o 2 a secondo che car $F = 2$ oppure car $F \neq 2$; ciò contraddice la scelta di c_1, c_2, c_3 in A tali che $f(c_1, c_2, c_3) \neq 0$.

Con queste premesse, possiamo enunciare il

TEOREMA. – *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su F, car $F \neq 2$, dotato di una 3-forma ε e sia C l'insieme dei vettori singolari c in V tali che per ogni siffatto vettore c, risulti codim rad$(f_c) = 2$. Se, inoltre, $V = \langle C \rangle$ e se rad $\varepsilon = V_{(f)} = 0$, allora:*

$$V = A_1 \oplus_\varpi A_2 \oplus_\varpi \ldots \oplus_\varpi A_n, \; A_i \textit{ piani speciali}, \; i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$C = (C \cap A_1) \cup \ldots \cup (C \cap A_n);$$

$$\dim V \equiv 0 \,(mod.\ 3).$$

DIMOSTRAZIONE. – Poiché $V = \langle C \rangle$ è possibile scegliere $c_1, c_2, c_3 \in C$ tali che $f(c_1, c_2, c_3) \neq 0$.

Con le stesse notazioni del lemma 4, si ponga

$$A_1 = A = \langle C \cap A \rangle = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle.$$

Sappiamo, allora, per l'osservazione 2, che A_1 è un piano speciale, mentre, dal lemma 4, segue che $V = A_1 \oplus_{\varpi} B$, $B = A_1\,\varpi$. Poiché rad $\varepsilon = V_{(f)} = (0)$ risulta, per l'osservazione 1, $B_{(f)} = (0)$ e, sempre per tale osservazione, si ha:

$$C = (C \cap A_1) \cup (C \cap B).$$

Così operando, abbiamo riprodotto su B e su $C \cap B$ le ipotesi fatte su V e su C, cosicché una semplice induzione sulla dimensione di V permette di concludere la dimostrazione del teorema.

REFERENCES

[1] M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for E_6. I,* Invent. math., **89** (1987), 159-195.

[2] M. Aschbacher, *The geometry of trilinear forms,* Finite Geometries, Buildings, and Related Topics, Oxford University Press, Oxford, (1990), 75-84.

[3] L. E. Dickson, *A class of groups in an arbitrary realm connected with the configuration of the 27 lines on a cubic surface,* Quarterly J. Math., **33** (1901), 145-173.

Dipartimento di Matematica, Università di Palermo, Via Archirafi, 34 - 90123 Palermo
E-mail: bartfed@math.unipa.it

Pervenuta in Redazione
il 25 gennaio 2002