Wenchang Chu, Valentina Vicenti

Funzione generatrice e polinomi incompleti di Fibonacci e Lucas

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-B** (2003), n.2, p. 289–308.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6B_2_289_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
(8) **6**-B (2003), 289-308

Funzione generatrice e polinomi incompleti di Fibonacci e Lucas.

CHU WENCHANG - VALENTINA VICENTI

Sunto. – *I numeri incompleti di Fibonacci e di Lucas, introdotti da Filipponi (1996), sono entrambi generalizzati in forma di polinomi. Le loro funzioni generatrici ridondanti, naturali e condizionate sono stabilite attraverso serie formali di potenze. Le funzioni generatrici relative alle sequenze di numeri dovute a Pinter e Srivastava (1999) sono contenute come casi particolari.*

Summary. – *The incomplete numbers of Fibonacci and Lucas, introduced by Filipponi (1996) are generalized respectively to polynomials. Their redundant, natural and conditional generating functions are established by means of formal power series method. The generating functions for the corresponding number sequences due to Pinter and Srivastava (1999) are contained as particular cases.*

Questo articolo presenta i polinomi incompleti di Fibonacci e di Lucas che sono generalizzazioni dei numeri classici corrispondenti dovuti a Filipponi (1996). Confinando gli indici delle doppie somme, le loro funzioni generatrici bivariate, denominate *ridondanti*, *naturali* e *condizionate*, sono stabilite attraverso serie formale di potenze. I teoremi principali ottenuti contengono le funzioni generatrici di Pinter e Srivastava (1999) come casi molto particolari.

A. – Numeri e polinomi di Fibonacci e Lucas.

È noto che i *numeri classici di Fibonacci* sono definiti in maniera equivalente da una delle seguenti affermazioni:

- Relazione ricorrente:

(A1) $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n > 0$$

(A2) $$F_0 = F_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad F_2 = 2$$

- Funzione generatrice:

(A3) $$\frac{1}{1-y-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n y^n$$

- Formula esplicita in somma binomiale:

$$F_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n-k}{k}. \tag{A4}$$

I *numeri di Lucas* si esprimono tramite i numeri di Fibonacci come segue

$$L_n = F_n + F_{n-2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{A5}$$

e possono essere definiti in modo simile a quanto fatto per i numeri di Fibonacci.

- Relazioni ricorrente:

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \qquad n > 0 \tag{A6}$$

$$L_0 = L_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad L_2 = 3 \tag{A7}$$

- Funzione generatrice:

$$\frac{1+y^2}{1-y-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n y^n \tag{A8}$$

- Formula esplicita in somma binomiale:

$$L_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

Introducendo una variabile λ, possiamo definire i *polinomi di Fibonacci* $\{F_n(\lambda)\}$, come una generalizzazione dei numeri di Fibonacci, tramite il seguente

LEMMA A1 (Polinomi di Fibonacci). – *Le affermazioni che seguono sono equivalenti:*

(a): *Relazione ricorrente:*

$$F_{n+1}(\lambda) = F_n(\lambda) + \lambda F_{n-1}(\lambda), \qquad n > 0 \tag{A10}$$

$$F_0(\lambda) = F_1(\lambda) = 1 \qquad \text{e} \qquad F_2(\lambda) = 1 + \lambda \tag{A11}$$

(b): *Funzione generatrice:*

$$\frac{1}{1-y-\lambda y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\lambda)\, y^n \tag{A12}$$

(c) *Formula esplicita:*

(A13) $$F_n(\lambda) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n-k}{k} \lambda^k.$$

DIMOSTRAZIONE. – Dimostriamo le affermazioni (a) $\rightarrow$ (b) $\rightarrow$ (c) $\rightarrow$ (a) in modo ciclico.

(a) $\rightarrow$ (b): Secondo la definizione, la funzione generatrice si può scrivere come segue:

$$f(y) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\lambda)\, y^n = 1 + y + \sum_{k=1}^{\infty} F_{1+k}(\lambda)\, y^{k+1}.$$

Ricordando la (A10), si ottiene:

$$\begin{aligned} f(y) &= 1 + y + \sum_{k=1}^{\infty} \{F_k(\lambda) + \lambda F_{k-1}(\lambda)\}\, y^{k+1} \\ &= 1 + y + y\{f(y) - 1\} + \lambda y^2 f(y) \end{aligned}$$

da cui si ricava subito la (A12).

(b) $\rightarrow$ (c): Per una serie formale di potenze in y, indichiamo con $[y^n]\, f(y)$ il coefficiente del monomio y^n nello sviluppo di $f(y)$ in serie di Maclaurin. Notando la serie geometrica

$$\frac{1}{1 - y - \lambda y^2} = \sum_{i,k=0}^{\infty} \binom{i+k}{k} \lambda^k y^{i+2k}$$

si deduce la formula esplicita:

$$F_m(\lambda) = [y^m]\, f(y) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m/2} \binom{m-k}{k} \lambda^k.$$

(c) $\rightarrow$ (a): Segue immediatamente dalla relazione binomiale:

(A14) $$\binom{1+n-k}{k} = \binom{n-k}{k} + \binom{(n-1)-(k-1)}{k-1}.$$

Così la dimostrazione è completa.

TEOREMA A2. – *Per i polinomi di Fibonacci, valgono le seguenti formule chiuse:*

(A15) $$\sum_{k \geqslant n} F_k(\lambda)\, y^k = y^n \frac{F_n(\lambda) + \lambda y F_{n-1}(\lambda)}{1 - y - \lambda y^2}$$

(A16) $$\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}(\lambda)\, y^{2k} = \frac{1 - \lambda y^2}{(1 - \lambda y^2)^2 - y^2}$$

(A17) $$\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k+1}(\lambda)\, y^{2k+1} = \frac{y}{(1 - \lambda y^2)^2 - y^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Quando $\lambda = 1$, questo teorema fornisce le funzioni generatrici concernenti i numeri di Fibonacci classici.

La prima riguarda la coda della nostra serie. Per dimostrarla, basta moltiplicare la somma della sinistra per il denominatore della destra, manipolando:

$$\{1 - y - \lambda y^2\} \sum_{k \geqslant n} F_k(\lambda)\, y^k = y^n F_n(\lambda) + y^{1+n} F_{n+1}(\lambda) - y^{1+n} F_n(\lambda)$$
$$+ \sum_{k \geqslant n} \{F_{2+k}(\lambda) - F_{1+k}(\lambda) - \lambda F_k(\lambda)\} y^{k+2}$$

che si riduce al numeratore della (A15) grazie alla relazione ricorrente (A10).

La seconda e la terza formula chiusa riguardano, invece, le somme degli indici pari e dispari, rispettivamente. La loro dimostrazione segue immediatamente da una semplice osservazione:

$$f(y) := \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\lambda)\, y^k \rightleftharpoons f(-y) := \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\lambda)(-y)^k.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
\frac{f(y) + f(-y)}{2} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1 - y - \lambda y^2} + \frac{1}{1 + y - \lambda y^2}\right\} \\
&= \frac{1 + \lambda y^2}{(1 - \lambda y^2)^2 - y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}(\lambda)\, y^{2k} \\
\frac{f(y) - f(-y)}{2} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1 - y - \lambda y^2} - \frac{1}{1 + y - \lambda y^2}\right\} \\
&= \frac{y}{(1 - \lambda y^2)^2 - y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_{1+2k}(\lambda)\, y^{2k+1}
\end{aligned}$$

che corrispondono, rispettivamente, alle (A16) e (A17). ■

Ricordando la relazione fra i numeri di Fibonacci e Lucas, possiamo definire i *polinomi di Lucas* $\{L_n(\lambda)\}$ tramite i polinomi di Fibonacci nel seguente modo:

$$L_n(\lambda) = F_n(\lambda) + \lambda F_{n-2}(\lambda). \tag{A18}$$

A questo punto, è facile verificare che essi sono caratterizzati dal seguente:

LEMMA A3 (Polinomi di Lucas). – *Le affermazioni che seguono sono equivalenti:*

(a): *Relazione ricorrente:*

$$L_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda) + \lambda L_{n-1}(\lambda), \qquad n > 0 \tag{A19}$$

$$L_0(\lambda) = L_1(\lambda) = 1 \quad e \quad L_2(\lambda) = 1 + 2\lambda \tag{A20}$$

(b): *Funzione generatrice:*

$$\frac{1 + \lambda y^2}{1 - y - \lambda y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda)\, y^n \tag{A21}$$

(c): *Formula esplicita:*

$$L_n(\lambda) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \lambda^k. \tag{A22}$$

DIMOSTRAZIONE. – Verifichiamo che ciascuna affermazione del lemma è equivalente alla relazione (A18).

(a): È evidente grazie alla relazione ricorrente (A10).

(b): In questo caso, ricordando la funzione generatrice (A12), si vede che:

$$g(y) := \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda)\, y^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\lambda)\, y^n + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}(\lambda)\, y^n$$

$$= f(y) + \lambda y^2 f(y) = \frac{1 + \lambda y^2}{1 - y - \lambda y^2}\,.$$

(c): Considerando la relazione binomiale

$$\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-1-k}{k-1} \tag{A23}$$

segue immediatamente la tesi.

TEOREMA A4. – *Per i polinomi di Lucas, valgono le seguenti formule chiuse:*

$$\sum_{k \geqslant n} L_k(\lambda)\, y^k = y^n \frac{L_n(\lambda) + \lambda y L_{n-1}(\lambda)}{1 - y - \lambda y^2} \tag{A24}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{2k}(\lambda)\, y^{2k} = \frac{1 - \lambda^2 y^4}{(1 - \lambda y^2)^2 - y^2} \tag{A25}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{2k+1}(\lambda)\, y^{2k+1} = \frac{y(1 + \lambda y^2)}{(1 - \lambda y^2)^2 - y^2}\,. \tag{A26}$$

DIMOSTRAZIONE. – Le formule elencate nel teorema si riducono, per $\lambda = 1$, alle funzioni generatrici riguardanti i numeri di Lucas classici.

Come abbiamo visto in precedenza, la prima riguarda la coda della serie. Per dimostrarla, basta moltiplicare la somma per il denominatore a secondo membro, ottenendo:

$$\begin{aligned}(1-y-\lambda y^2) \sum_{k \geqslant n} L_k(\lambda)\, y^k = y^n L_n(\lambda) + y^{1+n} L_{n+1}(\lambda) - y^{1+n} L_n(\lambda)\\ + \sum_{k \geqslant n} \{L_{2+k}(\lambda) - L_{1+k}(\lambda) - \lambda L_k(\lambda)\}\, y^{k+2}.\end{aligned}$$

Quest'ultima, utilizzando la relazione ricorrente (A19), diventa proprio il numeratore della destra.

Ricordando che:

$$g(y) = (1+\lambda y^2)\, f(y)$$

le formule (A25) e (A26) discendono rispettivamente dalle seguenti

$$\frac{g(y)+g(-y)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} L_{2k}(\lambda)\, y^{2k} = (1+\lambda y^2)\frac{f(y)+f(-y)}{2}$$
$$\frac{g(y)-g(-y)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} L_{1+2k}(\lambda)\, y^{2k+1} = (1+\lambda y^2)\frac{f(y)-f(-y)}{2}$$

secondo la dimostrazione delle (A16) e (A17). ■

Inoltre, ci sono due formule esplicite che generalizzano le formule classiche riguardanti i numeri di Fibonacci e Lucas.

PROPOSIZIONE A5. – (Due formule esplicite).

(A27) $$F_n(\lambda) \xlongequal{\lambda := \gamma(1+\gamma)} \frac{(1+\gamma)^{n+1} - (-\gamma)^{1+n}}{1+2\gamma}$$

(A28) $$L_n(\lambda) \xlongequal{\lambda := \gamma(1+\gamma)} (1+\gamma)^n + (-\gamma)^n, \qquad n > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. – Scomponendo le funzioni generatrici in frazioni parziali

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-y-\gamma(1+\gamma)y^2} &= \frac{1}{(1+\gamma y)\{1-y(1+\gamma)\}} \\
&= \frac{1}{1+2\gamma}\left\{\frac{1+\gamma}{1-y(1+\gamma)}+\frac{\gamma}{1+y\gamma}\right\} \\
\frac{1+\gamma(1+\gamma)\,y^2}{1-y-\gamma(1+\gamma)y^2} &= -1+\frac{2-y}{(1+\gamma y)\{1-y(1+\gamma)\}} \\
&= -1+\frac{1}{1-y(1+\gamma)}+\frac{1}{1+y\gamma}
\end{aligned}$$

otteniamo immediatamente le formule esplicite secondo le espansioni delle serie geometriche. ■

Quando $\lambda = 1$, è facile vedere che $\gamma := (\sqrt{5}-1)/2$, e quindi:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\} \tag{A29}$$

$$L_n = \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}, \qquad n > 0 \tag{A30}$$

che sono proprio le note formule esplicite dei numeri classici di Fibonacci e Lucas.

B. – Polinomi incompleti di Fibonacci.

Limitando superiormente le somme binomiali nelle definizioni dei numeri di Fibonacci e Lucas, Filipponi [5] definisce le corrispondenti classi di numeri incompleti. Introducendo un nuovo parametro λ, possiamo generalizzare i numeri incompleti di Fibonacci definendo i *polinomi incompleti di Fibonacci* come segue:

$$F_{m,n}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{k} \lambda^k, \qquad 0 \leqslant m \leqslant n/2. \tag{B1}$$

Nel caso in cui $\lambda = 1$ si ottengono i numeri incompleti di Fibonacci; se si pone successivamente $m = [n/2]$, la parte intera della frazione $n/2$, si ritorna ai numeri di Fibonacci classici.

Per calcolare la funzione generatrice di $F_{m,n}(\lambda)$, richiamiamo il metodo della serie formale di potenze ridondanti introdotto in [1]. Supponiamo per il momento di eliminare la condizione $0 \leqslant m \leqslant n/2$ su m. La funzione generatrice

$$\Phi(x, y) := \sum_{m, n=0}^{\infty} F_{m,n}(\lambda)\, x^m y^n$$

che otterremo in questo caso conterrà, quindi, dei termini in più rispetto a quella che otterremmo se non togliessimo la suddetta condizione su m. Per questo motivo chiameremo *ridondante* questa funzione generatrice, per la quale vale il seguente:

TEOREMA B1. – (Funzione generatrice ridondante).

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y-\lambda x y^2)}. \tag{B2}$$

DIMOSTRAZIONE. – Per mezzo della serie formale di potenze (vedi [3] e [9]), possiamo procedere come segue:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{k} \lambda^k x^m y^n \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant m < \infty} \lambda^k x^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} y^n.\end{aligned}$$

Operando la trasformazione $n = 2k + i$ nella seconda sommatoria si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} y^n = y^{2k} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{k} y^i = \frac{y^{2k}}{(1-y)^{k+1}}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato l'espansione binomiale. Continuando, quindi, si ha che:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant m < \infty} \frac{\lambda^k x^m y^{2k}}{(1-y)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k y^{2k}}{(1-y)^{k+1}} \sum_{m=k}^{\infty} x^m \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-y)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda x y^2}{1-y} \right\}^k \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-y)\{1-\lambda x y^2/(1-y)\}}\end{aligned}$$

cioè la funzione generatrice desiderata. ■

Sviluppando prima solo rispetto alla variabile x e poi solo rispetto alla y, otteniamo rispettivamente la *funzione generatrice orizzontale* e la *funzione generatrice verticale*. Per esse valgono le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE B2. – (Funzione generatrice orizzontale).

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{m,n}(\lambda)\, y^n = \frac{1}{1-y-\lambda y^2} - \frac{\{\lambda y^2/(1-y)\}^{m+1}}{1-y-\lambda y^2}\,. \tag{B3}$$

DIMOSTRAZIONE. – Ricordando la dimostrazione del teorema precedente, si può notare che:

$$[x^m]\,\Phi(x, y) = \frac{[x^m]}{1-x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{\lambda^k x^k y^{2k}}{(1-y)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k y^{2k}}{(1-y)^{k+1}} = \frac{1-\left\{\dfrac{\lambda y^2}{1-y}\right\}^{m+1}}{1-y-\lambda y^2}$$

che non è altro che la tesi della proposizione. ■

Analogamente, considerando la variabile y, si ottiene la seguente:

PROPOSIZIONE B3. – (Funzione generatrice verticale).

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_{m,n}(\lambda)\, x^m = \frac{1}{1-x} \sum_{k \geqslant 0} \binom{n-k}{k} (\lambda x)^k. \tag{B4}$$

DIMOSTRAZIONE. – Ricordando che

$$\frac{1}{1-(y+\lambda x y^2)} = \sum_{k \geqslant 0} (y+\lambda x y^2)^k$$

$$= \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} y^i (\lambda x y^2)^j$$

allora si ottiene:

$$[y^n]\,\Phi(x, y) = \frac{[y^n]}{1-x} \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^i y^{2i+j}$$

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{i \geqslant 0} \binom{n-i}{i} \lambda^i x^i$$

dove l'ultima formula si deduce facilmente anche dalla definizione dei polinomi incompleti di Fibonacci. ■

Da questa dimostrazione, possiamo manipolare la serie multipla come segue:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(1-x)\{1-(y+\lambda xy^2)\}}$$

$$= \sum_{k \geq 0} x^k \sum_{i, j \geq 0} \binom{i+j}{i} y^i (\lambda xy^2)^j$$

arrivando alla seguente formula:

(B5)
$$\Phi(x, y) = \sum_{i, j, k=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^{i+k} y^{2i+j}$$

che è la serie formale di potenze.

C. – Polinomi incompleti di Lucas.

In modo analogo a quanto fatto con i polinomi di Fibonacci, possiamo definire i *polinomi incompleti di Lucas* come segue:

(C1)
$$L_{m, n}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \lambda^k, \qquad 0 \leq m \leq n/2.$$

Nel caso in cui $\lambda = 1$ si ottengono i numeri incompleti di Lucas introdotti da Filipponi [5]; se si pone anche $m = [n/2]$, si ritorna ai numeri di Lucas classici.

Il primo passo è trovare una relazione che leghi $F_{m, n}(\lambda)$ e $L_{m, n}(\lambda)$. Osservando la (A23), si deduce immediatamente che:

$$L_{m, n}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{k} \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{n-1-k}{k-1} \lambda^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{k} \lambda^k + \lambda \sum_{l=0}^{m-1} \binom{n-2-l}{l} \lambda^l.$$

Quindi vale la relazione:

(C2)
$$L_{m, n}(\lambda) = F_{m, n}(\lambda) + \lambda F_{m-1, n-2}(\lambda)$$

che conduce facilmente alla seguente equazione funzionale:

(C3)
$$\Psi(x, y) = (1 + \lambda xy^2)\, \Phi(x, y)$$

dove la funzione generatrice ridondante è definita da

$$\Psi(x, y) := \sum_{m, n=0}^{\infty} L_{m,n}(\lambda)\, x^m y^n .$$

Combinando con la (B2), si ha il seguente risultato:

TEOREMA C1. – (Funzione generatrice ridondante).

$$\Psi(x, y) = \frac{1 + \lambda x y^2}{(1-x)(1-y-\lambda x y^2)} . \tag{C4}$$

Anche per i polinomi incompleti di Lucas è possibile studiare le funzioni generatrici orizzontale e verticale. Esse sono determinate dalle seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE C2. – (Funzione generatrice orizzontale).

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{m,n}(\lambda)\, y^n = \frac{1+\lambda x y^2}{1-y-\lambda y^2} - \frac{2-y}{1-y-\lambda y^2} \left\{ \frac{\lambda y^2}{1-y} \right\}^{m+1} . \tag{C5}$$

DIMOSTRAZIONE. – Ricordando la relazione (C3), si ricava subito il coefficiente come segue:

$$\begin{aligned} [x^m]\, \Psi(x, y) &= [x^m]\, \Phi(x, y) + \lambda y^2 [x^{m-1}]\, \Phi(x, y) \\ &= \frac{1+\lambda y^2}{1-y-\lambda y^2} - \frac{2-y}{1-y-\lambda y^2} \left\{ \frac{\lambda y^2}{1-y} \right\}^{m+1} \end{aligned}$$

grazie all'equazione (B3).

PROPOSIZIONE C3. – (Funzione generatrice verticale).

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_{m,n}(\lambda)\, x^m = \frac{1}{1-x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (\lambda x)^k . \tag{C6}$$

DIMOSTRAZIONE. – Come nella dimostrazione della proposizione precedente, si deduce che

$$\begin{aligned} [y^n]\, \Psi(x, y) &= [y^n]\, \Phi(x, y) + \lambda x [y^{n-2}]\, \Phi(x, y) \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (\lambda x)^k \end{aligned}$$

viste la Proposizione B3 e la relazione (A23). ■

Analogamente alla relazione (B5), si stabilisce la seguente serie formale di potenze

$$\text{(C7)} \qquad \Psi(x, y) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{2i+j}{i+j} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^{i+k} y^{2i+j}$$

grazie alla (C3).

D. – Funzioni generatrici naturali.

I polinomi incompleti di Fibonacci $\{F_{m,n}(\lambda)\}$ definiti in (B1) hanno dei coefficienti in numeri naturali. Però i coefficienti binomiali

$$\binom{n-m}{m} = (-1)^m \binom{2m-1-n}{m}, \qquad m > n$$

sono alternati. Limitando gli indici m ed n (concernenti rispettivamente le potenze delle variabili x ed y) con la condizione $0 \leqslant m \leqslant n < \infty$, la corrispondente funzione generatrice bivariata viene chiamata *naturale*; essa è data da:

$$\text{(D1a)} \qquad \phi(x, y) := \sum_{0 \leqslant m \leqslant n < \infty} F_{m,n}(\lambda)\, x^m y^n$$

$$\text{(D1b)} \qquad = \sum_{0 \leqslant m \leqslant n < \infty} x^m y^n [x^m y^n]\, \Phi(x, y).$$

Secondo la (B5), si ha che:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^{i+k} y^{2i+j}$$

Trasformando la condizione $0 \leqslant m \leqslant n < \infty$ sugli indici della doppia somma in $i + k \leqslant 2i + j$, cioè $k \leqslant i + j$, si può scrivere che

$$\phi(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^i y^{2i+j} \sum_{k=0}^{i+j} x^k$$

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{i,j=0}^{\infty} \{1 - x^{1+i+j}\} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^i y^{2i+j}$$

$$= \frac{1}{1-x} \left\{ \frac{1}{1 - y - \lambda x y^2} - \frac{x}{1 - xy - \lambda x^2 y^2} \right\}.$$

Effettuando qualche semplificazione di routine, otteniamo il seguente

TEOREMA D1. – (Funzione generatrice naturale).

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(1 - y - \lambda xy^2)(1 - xy - \lambda x^2 y^2)}. \tag{D2}$$

Analogamente si può definire la funzione generatrice naturale bivariata per i polinomi incompleti di Lucas come segue:

$$\psi(x, y) = \sum_{0 \leqslant m < n < \infty} L_{m,n}(\lambda)\, x^m y^n \tag{D3a}$$

$$= \sum_{0 \leqslant m < n < \infty} x^m y^n [x^m y^n]\, \Psi(x, y). \tag{D3b}$$

Bisogna osservare che, in questo caso, la condizione che lega m ed n è una disuguaglianza stretta; questo perchè se fosse $m = n$, l'equazione (C1) perderebbe di significato salvo ulteriori precisazioni.

TEOREMA D2. – Funzione generatrice naturale.

$$\psi(x, y) = \frac{y(1 + 2\lambda xy)}{(1 - y - \lambda xy^2)(1 - xy - \lambda x^2 y^2)}. \tag{D4}$$

DIMOSTRAZIONE. – Secondo la (C7), si ha che:

$$\Psi(x, y) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{2i + j}{i + j} \binom{i + j}{i} \lambda^i x^{i+k} y^{2i+j}.$$

Affinchè sia rispettata la condizione $0 \leqslant m < n < \infty$ sugli indici, deve essere $i + k < 2i + j$, cioè $k < i + j$. Allora

$$\psi(x, y) = \sum_{i+j>0} \frac{2i + j}{i + j} \binom{i + j}{i} \lambda^i x^i y^{2i+j} \sum_{k=0}^{i+j-1} x^k$$

$$= \sum_{i,j \geqslant 0} \frac{2i + j}{i + j} \binom{i + j}{i} \frac{1 - x^{i+j}}{1 - x} \lambda^i x^i y^{2i+j}.$$

Osserviamo che per due variabili U e V, si ha:

$$\frac{1 + U}{1 - U - V} = (1 + U) \sum_{i,j \geqslant 0} \binom{i + j}{i} U^i V^j$$

$$= \sum_{i,j \geqslant 0} \frac{2i + j}{i + j} \binom{i + j}{i} U^i V^j.$$

Quindi, si ottiene

$$\psi(x,\, y) = \frac{1}{1-x}\left\{ \frac{1+\lambda x y^2}{1-y-\lambda x y^2} - \frac{1+\lambda x^2 y^2}{1-xy-\lambda x^2 y^2} \right\}.$$

Semplificando, otteniamo la funzione generatrice naturale del teorema. ■

Il teorema che segue esprime una formula chiusa per la funzione generatrice naturale relativa ai polinomi incompleti di Fibonacci.

PROPOSIZIONE D3. – (Funzione generatrice univariata).

$$\text{(D5a)} \qquad \sum_{n \geqslant m} F_{m,\,n}(\lambda)\, y^n = \frac{y^m}{1-y-\lambda y^2}\{F_m(\lambda) + \lambda y F_{m-1}(\lambda)\}$$

$$\text{(D5b)} \qquad - \frac{\lambda^{m+1} y^{2m+2}}{(1-y-\lambda y^2)(1-y)^{m+1}}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Riscrivendo $\phi(x,\, y)$ in frazioni parziali e poi richiamando la funzione generatrice (A12), si risulta

$$\begin{aligned}
[x^m]\, \phi(x,\, y) &= \frac{[x^m]}{1-x}\left\{ \frac{1}{1-y-\lambda x y^2} - \frac{x}{1-xy-\lambda x^2 y^2} \right\} \\
&= \frac{[x^m]}{1-x}\left\{ \sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n x^n y^{2n}}{(1-y)^{n+1}} - x \sum_{n \geqslant 0} F_n(\lambda)\, x^n y^n \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{m} \frac{\lambda^n y^{2n}}{(1-y)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{m-1} F_n(\lambda)\, y^n.
\end{aligned}$$

Esaminando a parte la prima somma si vede che:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} \frac{\lambda^n y^{2n}}{(1-y)^{n+1}} &= \frac{1}{1-y} \sum_{n=0}^{m} \left\{ \frac{\lambda y^2}{1-y} \right\}^n = \frac{1 - \left\{ \frac{\lambda y^2}{1-y} \right\}^{m+1}}{1-y-\lambda y^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\lambda)\, y^n - \frac{\lambda^{m+1} y^{2m+2}}{(1-y-\lambda y^2)(1-y)^{m+1}}\,.
\end{aligned}$$

Ricapitolando, quindi:

$$[x^m]\,\phi(x,\,y) = \sum_{n \geqslant m} F_n(\lambda)\,y^n - \frac{\lambda^{m+1}y^{2m+2}}{(1-y)^{m+1}(1-y-\lambda y^2)}\,.$$

Ricordando la (A15), si ha la tesi. ■

Notando che

(D6) $$\psi(x,\,y) = y(1+2\lambda xy)\,\phi(x,\,y)$$

si procede come segue

$$[x^m]\,\psi(x,\,y) = \frac{y^{m+1}}{1-y-\lambda y^2}\{F_m(\lambda)+\lambda yF_{m-1}(\lambda)\} - \frac{y\{\lambda y^2/(1-y)\}^{m+1}}{1-y-\lambda y^2}$$

$$+\frac{2\lambda y^{m+1}}{1-y-\lambda y^2}\{F_{m-1}(\lambda)+\lambda yF_{m-2}(\lambda)\} - \frac{2\lambda y^2\{\lambda y^2/(1-y)\}^m}{1-y-\lambda y^2}\,.$$

Secondo le relazioni ricorrenti (A10) e (A18), si deduce

$$\begin{aligned} L_{1+m}(\lambda) &= F_{1+m}(\lambda) + \lambda F_{m-1}(\lambda) \\ &= F_m(\lambda) + 2\lambda F_{m-1}(\lambda) \end{aligned}$$

che ci porta alla seguente funzione generatrice:

PROPOSIZIONE D4. – (Funzione generatrice univariata).

(D7a) $$\sum_{n>m} L_{m,\,n}(\lambda)\,y^n = \frac{y^{1+m}}{1-y-\lambda y^2}\{L_{m+1}(\lambda)+\lambda yL_m(\lambda)\}$$

(D7b) $$-\frac{2-y}{1-y-\lambda y^2}\{\lambda y^2/(1-y)\}^{m+1}.$$

E. – Funzioni generatrici condizionate.

Per i polinomi incompleti di Fibonacci $\{F_{m,\,n}(\lambda)\}$ definiti in (B1), si ha che

$$F_{[n/2],\,n}(\lambda) = F_{[1+n/2],\,n}(\lambda) = \ldots = F_{n,\,n}(\lambda)$$

perché

$$\binom{n-m}{m} \equiv 0, \qquad [n/2] < m < n.$$

A questo punto, denominiamo *condizionata* la funzione generatrice corrispondente alla condizione $0 \leqslant m \leqslant n/2 < \infty$ sugli indici m ed n. Allora essa è data esplicitamente da:

$$\phi_*(x, y) := \sum_{0 \leqslant m \leqslant n/2 < \infty} F_{m,n}(\lambda)\, x^m y^n \tag{E1a}$$

$$= \sum_{0 \leqslant m \leqslant n/2 < \infty} x^m y^n [x^m y^n]\, \Phi(x, y). \tag{E1b}$$

TEOREMA E1. – (Funzione generatrice condizionata).

$$\phi_*(x, y) = \frac{(1-\lambda x y^2)^2}{(1-y-\lambda x y^2)\{(1-\lambda x y^2)^2 - x y^2\}}. \tag{E2}$$

DIMOSTRAZIONE. – Con la formula (B5) si era trovato che:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^{i+k} y^{2i+j}.$$

Ricordando che deve valere la condizione $0 \leqslant m \leqslant n/2 < \infty$, in questo caso essa diventa $i+k \leqslant i+j/2$, cioè $k \leqslant j/2$. Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
\phi_*(x, y) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^i y^{2i+j} \sum_{0 \leqslant k \leqslant j/2} x^k \\
&= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1-x^{1+[j/2]}}{1-x} \binom{i+j}{i} \lambda^i x^i y^{2i+j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1-x^{1+[j/2]}}{1-x} \frac{y^j}{(1-\lambda x y^2)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-y-\lambda x y^2)} \\
&\quad - \frac{x}{1-x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{[j/2]} y^j}{(1-\lambda x y^2)^{j+1}}.
\end{aligned}$$

A questo punto bisogna separare l'ultima somma in due parti, a seconda che l'indice j sia pari o dispari:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{[j/2]} y^j}{(1-\lambda x y^2)^{j+1}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{x^j y^{2j}}{(1-\lambda x y^2)^{1+2j}} + \frac{x^j y^{2j+1}}{(1-\lambda x y^2)^{2+2j}} \right\} \\
&= \frac{1+y-\lambda x y^2}{(1-\lambda x y^2)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j y^{2j}}{(1-\lambda x y^2)^{2j}} \\
&= \frac{1+y-\lambda x y^2}{(1-\lambda x y^2)^2 - x y^2}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\phi_*(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y-\lambda xy^2)}$$

$$-\frac{x(1+y-\lambda xy^2)}{(1-x)\{(1-\lambda xy^2)^2 - xy^2\}}$$

la cui fattorizzazione risulta dalla funzione generatrice del teorema. ■

Lo stesso discorso si può fare per la funzione generatrice condizionata relativa ai polinomi incompleti di Lucas. Denotiamo con

(E3a) $$\psi_*(x, y) := \sum_{0 \leq m \leq n/2 < \infty} L_{m,n}(\lambda)\, x^m y^n$$

(E3b) $$= \sum_{0 \leq m \leq n/2 < \infty} x^m y^n [x^m y^n]\, \Psi(x, y).$$

Notando la relazione (C3), si deduce che

(E4) $$\psi_*(x, y) = (1 + \lambda xy^2)\, \phi(x, y)$$

perchè il fattore $(1+\lambda xy^2)$ non modifica la condizione sull'indice della somma. Il risultato viene evidenziato dal seguente:

TEOREMA E2. – (Funzione generatrice condizionata).

(E5a) $$\psi_*(x, y) = \sum_{0 \leq m \leq n/2 < \infty} L_{m,n}(\lambda)\, x^m y^n$$

(E5b) $$= \frac{(1+\lambda xy^2)(1-\lambda xy^2)^2}{(1-y-\lambda xy^2)\{(1-\lambda xy^2)^2 - xy^2\}}.$$

I prossimi ed ultimi due risultati riguardano le funzioni generatrici condizionate univariate per i polinomi incompleti di Fibonacci e di Lucas, rispettivamente.

PROPOSIZIONE E3. – (Funzione generatrice univariata).

(E6a) $$\sum_{n \geq 2m} F_{m,n}(\lambda)\, y^n = \frac{y^{2m}}{1-y-\lambda y^2} \{F_{2m}(\lambda) + \lambda y F_{2m-1}(\lambda)\}$$

(E6b) $$-\frac{\lambda^{m+1} y^{2m+2}}{(1-y-\lambda y^2)(1-y)^{m+1}}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Ricordando la (E2), non è difficile verificare che l'espressione della funzione generatrice si può scomporre in frazioni parziali anche come segue:

$$\phi_*(x, y) = \frac{1}{1-y-\lambda y^2}\left\{\frac{1-\lambda xy^2+\lambda xy^3}{(1-\lambda xy^2)^2-xy^2} - \frac{\lambda y^2}{1-y-\lambda xy^2}\right\}.$$

Sviluppiamo separatamente i due termini dentro la parentesi. Il primo diventa:

$$\frac{(1-\lambda xy^2)+\lambda xy^3}{(1-\lambda xy^2)^2-xy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}(\lambda)\, x^k y^{2k} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} F_{2k+1}(\lambda)\, x^{k+1} y^{2k+3}$$

tenendo conto delle (A16) e (A17).

Il secondo termine si esprime facilmente in serie geometrica

$$\frac{\lambda y^2}{1-y-\lambda xy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1} x^k y^{2k+2}}{(1-y)^{k+1}}.$$

Riassumendo le due espressioni sopra ottenute, si ricava

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 2m} F_{m,n}(\lambda)\, y^n &= [x^m]\, \phi_*(x, y) \\ &= \frac{[x^m]}{1-y-\lambda y^2}\left\{\frac{1-\lambda xy^2+\lambda xy^3}{(1-\lambda xy^2)^2-xy^2} - \frac{\lambda y^2}{1-y-\lambda xy^2}\right\} \\ &= \frac{y^{2m}}{1-y-\lambda y^2}\left\{F_{2m}(\lambda)+\lambda y F_{2m-1}(\lambda) - \frac{\lambda^{m+1} y^2}{(1-y)^{m+1}}\right\}\end{aligned}$$

cioè la formula della proposizione. ■

Analogamente per i polinomi di Lucas vale la seguente:

PROPOSIZIONE E4. – (Funzione generatrice univariata).

(E7a) $$\sum_{n \geqslant 2m} L_{m,n}(\lambda)\, y^n = \frac{y^{2m}}{1-y-\lambda y^2}\{L_{2m}(\lambda)+\lambda y L_{2m-1}(\lambda)\}$$

(E7b) $$-\frac{2-y}{1-y-\lambda y^2}\left\{\frac{\lambda y^2}{1-y}\right\}^{m+1}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Sfruttando la dimostrazione precedente, si riformula la funzione generatrice (E5b), secondo la (E4) come segue:

$$\psi_*(x, y) = \frac{1 + \lambda x y^2}{1 - y - \lambda y^2} \left\{ \frac{1 - \lambda x y^2 + \lambda x y^3}{(1 - \lambda x y^2)^2 - x y^2} - \frac{\lambda y^2}{1 - y - \lambda x y^2} \right\}.$$

Trattiamo separatamente i due termini dentro la parentesi. Il primo diventa:

$$\frac{(1 - \lambda^2 x^2 y^4) + \lambda x y^3 (1 + \lambda x y^2)}{(1 - \lambda x y^2)^2 - x y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} L_{2k}(\lambda)\, x^k y^{2k} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} L_{2k+1}(\lambda)\, x^{k+1} y^{2k+3}$$

grazie alle (A25) e (A26).

Il secondo termine si sviluppa facilmente in serie geometrica

$$\frac{\lambda y^2 (1 + \lambda x y^2)}{1 - y - \lambda x y^2} = (1 + \lambda x y^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1} x^k y^{2k+2}}{(1-y)^{k+1}} = (2 - y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1} x^k y^{2k+2}}{(1-y)^{k+1}}.$$

Mettendo insieme le due espressioni, si ottiene

$$\sum_{n \geqslant 2m} L_{m,n}(\lambda)\, y^n = [x^m]\, \psi_*(x, y)$$
$$= \frac{[x^m](1 + \lambda x y^2)}{1 - y - \lambda y^2} \left\{ \frac{1 - \lambda x y^2 + \lambda x y^3}{(1 - \lambda x y^2)^2 - x y^2} - \frac{\lambda y^2}{1 - y - \lambda x y^2} \right\}$$
$$= \frac{y^{2m}}{1 - y - \lambda y^2} \left\{ L_{2m}(\lambda) + \lambda y L_{2m-1}(\lambda) - \frac{(2 - y)\, \lambda^{m+1} y^2}{(1-y)^{m+1}} \right\}$$

la formula della proposizione. ■

Quando $\lambda = 1$, le ultime due funzioni generatrici (E6) e (E7) conducono alla versione corretta del teorema sulle funzioni generatrici relative ai numeri incompleti di Fibonacci e Lucas, dovuto a un lavoro recente di Pinter e Srivastava [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] W. CHU, *Solutions of certain recurrence relations*, J. Dalian Inst. Tech. (Math. Issue), **25** (1986), 19-22; MR88i:05009 & Zbl.629:05005.

[2] W. CHU, *Binomial convolutions and hypergeometric identities*, Rend. Circolo Mat. Palermo (serie II), **43** (1994), 333-360; MR96e:33010.

[3] W. CHU, *Funzione generatrice e somma binomiale*, «Ricerche di Matematica» (Napoli), **XLIX:2** (2000), 317-326.
[4] L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing company, Dordrecht-Holland, 1974.
[5] P. FILIPPONI, *Incomplete Fibonacci and Lucas numbers*, Rend. Circolo Mat. Palermo (serie II), **45** (1996), 37-56.
[6] H. W. GOULD, *Combinatorial Identities*, Morgantown, 1972.
[7] R. L. GRAHAM - D. E. KNUTH - O. PATASHNIK, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Publ. Company, Reading, Massachusetts, 1989.
[8] A. PINTER - H. M. SRIVASTAVA, *Generating functions of the incomplete Fibonacci and Lucas numbers*, Rend. Circolo Mat. Palermo (serie II), **48** (1999), 591-596.
[9] H. S. WILF, *Generating functionology (second edition)*, Academic Press Inc., London, 1994.

Chu Wenchang: Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Lecce
Prov.le Lecce-Arnesano P.O. Box 193, 73100 Lecce, Italia
E-mail: chu.wenchang@unile.it

Vicenti Valentina: Via Salina Grande 9, 74100 Taranto, Italia.
E-mail: valentina.vicenti@libero.it

Pervenuta in Redazione
il 10 marzo 2001