BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

STEFANO CAPPARELLI

Calcolo della funzione di partizione di Kostant

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-B** (2003), n.1, p. 89–110.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6B_1_89_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
(8) **6**-B (2003), 89-110

Calcolo della funzione di partizione di Kostant.

STEFANO CAPPARELLI

Alla memoria di mio padre Alfredo Capparelli

Sunto. – *Forniamo un calcolo esplicito della funzione di partizione di Kostant per algebre di Lie complesse di rango* 2. *La tecnica principale consiste nella riduzione a casi più semplici ed all'uso di funzioni generatrici.*

Summary. – *We give an explicit computation of the Kostant partition function for simple rank* 2 *Lie algebras over the complex numbers. The main technique is the reduction to simpler cases and the use of generating functions.*

1. – Preliminari.

Nello studio delle rappresentazioni di algebre di Lie è importante avere a disposizione una maniera di calcolare le molteplicità di una rappresentazione, ossia calcolare la dimensione di ciascuno spazio peso. Una formula per tali molteplicità, equivalente alla formula di H. Weyl, si deve a B. Kostant. Un ruolo fondamentale in questa formula è svolto dalla funzione $P(\mu)$ che conta il numero di modi di esprimere il peso μ come somma di radici positive. Questa funzione $P(\mu)$ è detta funzione di partizione di Kostant. Il presente articolo è nato dalla necessità di avere una formula esplicita per questa in alcuni casi specifici e precisamente nel caso delle algebre di Lie semplici di rango 2 sui complessi.

Il lavoro cui abbiamo fatto riferimento è un articolo di J. Tarski [T] che però si limita a fornire una tabella con molti risultati necessari appena accennati oppure anche solo parzialmente enunciati.

Per ottenere i risultati in alcuni casi abbiamo sfruttato la tecnica delle funzioni generatrici. Il metodo sembra senz'altro generalizzabile ed alcuni risultati si sarebbero potuti enunciare in maniera più generale.

Un ringraziamento va all'anonimo referee i cui suggerimenti hanno notevolmente migliorato la presentazione di questo lavoro.

Sia $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali (incluso lo zero). Sia F una s-pla di vettori non nulli di $\boldsymbol{N}^k$ e indichiamo con la stessa lettera F la matrice con k righe e s colonne, che ha per colonne i vettori dell'insieme F e, per $\alpha \in \boldsymbol{N}^k$, sia $\mathcal{P}_F(\alpha)$ l'insieme delle soluzioni intere non negative del sistema lineare

$$\alpha = m_1 \beta_1 + \ldots + m_s \beta_s, \tag{1}$$

dove β_i sono le colonne di F. Indichiamo infine con $F \backslash \beta_i$ la matrice ottenuta togliendo il vettore β_i dall'insieme F. Sia $P_F(\alpha) = \# \mathcal{P}_F(\alpha)$, il numero di elementi di $\mathcal{P}_F(\alpha)$.

Vogliamo determinare delle formule esplicite per tale funzione. Faremo ciò riducendo il problema a casi via via più semplici che infine calcoleremo. Il caso più semplice della definizione è quello per $k = 1$. In tal caso allora la matrice F è una matrice con una sola riga, $\alpha = n$ è semplicemente un numero reale e $P_F(n)$ rappresenta il numero delle soluzioni (intere non negative) di un'equazione diofantea. Calcoleremo tale funzione esplicitamente e poi ricondurremo ad essa il calcolo della funzione P_F in dimensione maggiore. La limitazione al caso delle algebre di Lie semplici di rango al più 2 comporta la limitazione al caso $k \leqslant 2$.

Supponiamo dunque dapprima che $k = 1$ e sia $F = (i_1, \ldots, i_s)$. Abbiamo una prima proposizione:

PROPOSIZIONE 1.1. – *Qualunque siano gli interi non negativi* $n, i_1, \ldots i_s$ *avremo*

$$P_F(n) = \sum_{j=0}^{[n/i_s]} P_{F \backslash i_s}(n - j i_s). \tag{2}$$

DIMOSTRAZIONE. – Se $(m_1, \ldots, m_s) \in \mathcal{P}_F(n)$ allora $n = i_1 m_1 + \ldots + i_s m_s$ e quindi $n - i_s m_s = i_1 m_1 + \ldots + i_{s-1} m_{s-1}$ ciò mostra che esiste una biiezione tra $\mathcal{P}_F(n)$ e l'unione (disgiunta) di $\mathcal{P}_{F \backslash i_s}(n - j i_s)$ per j che varia in $\{0, 1, \ldots, [n/i_s]\}$. ■

Calcoliamo subito questa funzione quando $F = (1, 1, \ldots, 1) \in \boldsymbol{R}^s$. In tal caso semplifichiamo la notazione scrivendo

$$P_F(n) = P_s(n). \tag{3}$$

Conviene enunciare un utile immediato corollario della Proposizione 1.1.

COROLLARIO 1.2. – *Se* $i_s = 1$ *allora*

$$P_F(n) - P_F(n-1) = P_{F \backslash i_s}(n)$$

o più in particolare, con le notazioni precedenti abbiamo

$$P_{s+1}(n) - P_{s+1}(n-1) = P_s(n). \tag{4}$$

DIMOSTRAZIONE. – Applicando Proposizione 1.1 a $P_F(n)$ e a $P_F(n-1)$ otteniamo il risultato. ∎

Ricordiamo un utile e semplice lemma di tipo generale

LEMMA 1.3. – *Qualunque siano gli interi positivi k e n si ha*

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{k+n}{k}=\binom{k+n+1}{k+1}. \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE. – Si tratta della somma di $n+1$ numeri a partire da $1=\binom{k}{k}$ lungo una «diagonale» del triangolo di Tartaglia. Quindi per esempio

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+2}{k+1}$$

e dunque

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}=\binom{k+2}{k+1}+\binom{k+2}{k}=\binom{k+3}{k+1}$$

quindi una dimostrazione per induzione permette di concludere. ∎

Data una successione $\{a_n\}$ diremo che la serie di potenze $f(q)=\sum_{n\geq 0} a_n q^n$ è la funzione generatrice della successione. Consideriamo queste serie di potenze come serie formali senza preoccuparci dunque di problemi di convergenza, (cf. [B], [S]).

PROPOSIZIONE 1.4. – *Per ogni $n\in \boldsymbol{N}$ risulta*

$$P_{s+1}(n)=\binom{n+s}{s}. \tag{6}$$

DIMOSTRAZIONE. – Cominciamo con l'osservare che $\mathcal{P}_{s+1}(n)$ consiste nelle soluzioni intere *non negative* dell'equazione

$$n=x_1+x_2+\ldots+x_{s+1}$$

nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$, e queste sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle soluzioni intere *positive* di

$$n+s+1=x_1+x_2+\ldots+x_{s+1}.$$

Ora le soluzioni intere positive di tali equazioni hanno per funzione generatrice

$$(q + q^2 + q^3 + \dots)^{s+1}.$$

Infatti sviluppando questo prodotto in serie di potenze nella variabile q abbiamo

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i$$

dove a_i conta precisamente il numero delle soluzioni intere positive di

$$i = x_1 + x_2 + \dots + x_{s+1}$$

perché è per ognuna di queste soluzioni che si ottiene un contributo di una unità al coefficiente di q^i. Dunque per calcolare $P_{s+1}(n)$ occorre calcolare il coefficiente di q^{n+s+1} nella data funzione generatrice. A tale scopo riscriviamo tale funzione utilizzando una versione formale del teorema dello sviluppo binomiale di Newton:

$$q^{s+1}(1 + q + q^2 + \dots)^{s+1} = \frac{q^{s+1}}{(1-q)^{s+1}} =$$

$$q^{s+1} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-(s+1)}{r} (-1)^r q^r$$

dove il coefficiente binomiale generalizzato è definito per ogni $n \in \boldsymbol{R}$ e $k \in \boldsymbol{N}$ da

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Osserviamo adesso che questo coefficiente binomiale soddisfa la seguente identità:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Infatti

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} =$$

$$\frac{(-1)^r n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Dunque la funzione generatrice è anche uguale a

$$q^{s+1}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{s+r}{r}(-1)^r q^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{s+r}{r}q^{r+s+1}$$

e ponendo $n = r+s+1$ abbiamo

$$\sum_{n=s+1}^{\infty}\binom{n-1}{n-s-1}q^n.$$

Sfruttiamo infine il fatto che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ per scrivere

$$\sum_{n=s+1}^{\infty}\binom{n-1}{s}q^n$$

ed infine sfruttiamo il fatto che $\binom{n-1}{s} = 0$ se $n-1$ è un intero minore di s, per riscrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-1}{s}q^n.$$

In tal modo possiamo allora vedere che il coefficiente di q^{n+s+1} che volevamo calcolare è effettivamente $\binom{n+s}{s}$ come desiderato. ■

La proposizione seguente ci permette di scalare una dimensione:

PROPOSIZIONE 1.5. – *Supponiamo che F sia una matrice $2\times(s+1)$ e che F abbia tra le sue colonne la colonna $\beta_0 = (1, 0)$, e siano le altre colonne $\beta_i = (a_i, b_i)$, $a_i, b_i > 0$ allora per ogni coppia $(x, y)\in \boldsymbol{N}^2$*

$$P_F(x, y) = P_{R_2}(y) \tag{7}$$

dove R_2 è la seconda riga di F, purché i rapporti $\frac{a_i}{b_i}$ risultino tutti minori o uguali a $\frac{x}{y}$, cioè

$$\frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{x}{y}. \tag{8}$$

DIMOSTRAZIONE. – Supponiamo che $(m_0, \ldots, m_s)\in \mathcal{P}_F(x, y)$. Per le ipotesi fatte dovrà essere

$$x = m_0 + \sum_{i=1}^{s} m_i a_i \tag{9}$$

e

$$y = \sum_{i=1}^{s} m_i b_i . \tag{10}$$

Se supponiamo che $y = \sum_{i=1}^{s} m_i b_i$ sia soddisfatta con $m_i \geqslant 0$ dobbiamo verificare che $\sum_{i=1}^{s} m_i a_i \leqslant x$ perché in tal caso abbiamo la conclusione prendendo come m_0 semplicemente la differenza.

Ma poiché per ipotesi $a_i \leqslant \frac{x}{y} b_i$ avremo in effetti:

$$\sum_{i=1}^{s} m_i a_i \leqslant \sum_{i=1}^{s} m_i \frac{x}{y} b_i \leqslant \frac{x}{y} \sum_{i=1}^{s} m_i b_i \leqslant \frac{x}{y} y = x \tag{11}$$

come si desiderava. ■

Scambiando il ruolo di a e b nella proposizione precedente, ovvero, scambiando il ruolo della prima e della seconda riga di F, abbiamo un risultato del tutto analogo che enunciamo:

PROPOSIZIONE 1.5 bis. – *Supponiamo che F abbia come colonna $\beta_0 = (0, 1)$ e siano le altre colonne $\beta_i = (a_i, b_i)$ allora*

$$P_F(x, y) = P_{R_1}(x) \tag{12}$$

dove R_1 è la prima riga di F, purché i rapporti $\frac{b_i}{a_i}$ risultino tutti minori o uguali a $\frac{y}{x}$, cioè

$$\frac{b_i}{a_i} \leqslant \frac{y}{x} . \tag{13}$$

Uno dei lemmi cruciali per il prosieguo è il seguente

LEMMA 1.6. – *Qualunque sia $\alpha \in \boldsymbol{N}^k$, sia $\overline{n}$ un fissato indice, F una matrice con colonne $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ allora*

$$P_F(\alpha) = P_F(\alpha - \beta_{\overline{n}}) + P_{F \setminus \beta_{\overline{n}}}(\alpha) . \tag{14}$$

DIMOSTRAZIONE. – Gli elementi di $\mathcal{P}_F(\alpha)$ possono essere divisi tra quelli che hanno il coefficiente $m_{\overline{n}} > 0$ e quelli con $m_{\overline{n}} = 0$. I primi sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathcal{P}_F(\alpha - \beta_{\overline{n}})$ (basta prendere $m_{\overline{n}} - 1$) gli altri sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathcal{P}_{F \setminus \beta_{\overline{n}}}(\alpha)$. ■

2. – Funzione di partizione P per l'algebra A_2.

Studieremo la funzione P separatamente nei due settori $A = \{(x, y)\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$ e $B = \{(x, y)\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$ nei quali la funzione di partizione P ha espressioni diverse. In generale ricaveremo l'espressione della funzione di partizione P dalla Proposizione 1.5 oppure 1.5 bis; in alcuni casi occorre scrivere prima una funzione differenza.

TEOREMA 2.1. – *Siano* $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$, $\alpha + \beta = (1, 1)$, *le radici positive dell'algebra* A_2. *Nel settore* A *in cui*

$$x \leqslant y \tag{15}$$

avremo $P_F(x, y) = x + 1$. *Analogamente nel settore* B *in cui*

$$y \leqslant x \tag{16}$$

avremo $P_F(x, y) = y + 1$.

DIMOSTRAZIONE. – Infatti usando la Proposizione 1.5 bis, con

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

affinché le ipotesi della proposizione siano verificate occorre che $\dfrac{y}{x} \geqslant 1$ il che accade appunto nel settore A. Otterremo allora:

$$P_F(x, y) = P_{(1,1)}(x) = P_2(x) = \binom{x+1}{1} = x + 1\,. \tag{18}$$

Nel settore B in cui

$$y \leqslant x \tag{19}$$

possiamo ragionare in maniera del tutto analoga scambiando il ruolo di α e β ed utilizzando la Proposizione 1.5, abbiamo l'analogo risultato e cioè:

$$P_F(x, y) = P_{(1,1)}(y) = P_2(y) = \binom{y+1}{1} = y + 1\,. \qquad \blacksquare \tag{20}$$

3. – Funzione di partizione P per l'algebra B_2.

Nel caso dell'algebra B_2 dobbiamo considerare tre settori: settore $A = \{(x, y): x \leqslant y\}$, settore $B = \{(x, y): y \leqslant x \leqslant 2y\}$, settore $C = \{(x, y): 2y \leqslant x\}$. Per due di essi, A e C, come vedremo, il calcolo è completamente analogo a quanto fatto sopra per l'algebra A_2. Per il terzo, B, abbiamo una difficoltà in più.

Le radici positive di B_2 possono essere identificate come segue: $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$, $\alpha + \beta = (1, 1)$, $2\alpha + \beta = (2, 1)$.

Un'applicazione immediata della Proposizione 1.5 bis, con

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

ci permette una prima semplificazione:

PROPOSIZIONE 3.1.

$$P_F(x, y) = P_{(2,1,1)}(x). \tag{22}$$

TEOREMA 3.2. – *Nel settore A abbiamo*

$$P_F(x, y) = \left(\left[\frac{x+1}{2}\right] + 1\right)\left(x + 1 - \left[\frac{x+1}{2}\right]\right) \tag{23}$$

ovvero anche

$$P_F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x+2)^2 \\ \dfrac{1}{4}(x+1)(x+3) \end{cases} \tag{24}$$

rispettivamente nel caso x pari oppure x dispari. Inoltre, nel settore C abbiamo

$$P_F(x, y) = P_3(y) = \binom{y+2}{2} = \frac{1}{2}(y+1)(y+2). \tag{25}$$

DIMOSTRAZIONE. – Consideriamo dapprima il settore A. Per calcolare la funzione $P_{(2,1,1)}(x)$ possiamo usare delle funzioni generatrici. Con ragionamenti analoghi a quelli della dimostrazione della Proposizione 1.4 possiamo affermare che $P_{(2,1,1)}(x)$ coincide con il coefficiente di q^{x+2} della funzione generatrice

$$\frac{1}{1-q^2} \cdot \frac{q^2}{(1-q)^2}. \tag{26}$$

Allora se sviluppiamo questa in serie di potenze abbiamo

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{2i} \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)\, q^{j} = \sum_{i,j}^{\infty} (j-1)\, q^{2i+j}. \tag{27}$$

Posto allora $n = 2i + j$ risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+2} \left(\sum_{i=0}^{[\frac{n+1}{2}]} n + 1 - 2i \right). \tag{28}$$

Possiamo dunque concludere che

$$P_{(2,1,1)}(n) = \sum_{i=0}^{[\frac{n+1}{2}]} n + 1 - 2i \tag{29}$$

che risulta essere uguale a

$$\left(\left[\frac{n+1}{2} \right] + 1 \right) \left(n + 1 - \left[\frac{n+1}{2} \right] \right). \tag{30}$$

Infine per quanto riguarda il settore C: la condizione per applicare la Proposizione 1.5 è $\max \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right\} \leqslant \frac{x}{y}$ che risulta senz'altro verificata nel settore in questione in quanto $2y \leqslant x$. ■

Il calcolo è leggermente più complicato nel caso del settore B cioè quando $y \leqslant x \leqslant 2y$. Per trovare la funzione P si considera prima una funzione differenza. Sfrutteremo il Lemma 1.6. Sia $0 \leqslant k \leqslant y$. Allora il Lemma 1.6, con $\alpha = (2y - k, y)$, $\beta_{\overline{n}} = (1, 0)$, ci garantisce che la funzione differenza

$$P_F(2y - k, y) - P_F[(2y - k, y) - (1, 0)] \tag{31}$$

coincide con la funzione relativa a $F' = F \setminus \{(1, 0)\}$:

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

cioè

$$P_{F'}(2y - k, y). \tag{33}$$

Risulta inoltre che $P_{F'}(2y - k, y) = P_{F'}(k, y)$ come si verifica facilmente osservando che scambiando m_0 con m_2 si ottiene una corrispondenza biunivoca tra gli elementi $(m_0, m_1, m_2) \in \mathcal{P}_{F'}(2y - k, y)$ e $(m_2, m_1, m_0) \in \mathcal{P}_{F'}(k, y)$.

Usando la Proposizione 1.5 bis e la Proposizione 1.1 abbiamo che

$$P_{F'}(k, y) = P_{(2,1)}(k) = P_{(2,1,1)}(k) - P_{(2,1,1)}(k-1)\,. \tag{34}$$

Poniamo

$$b(k) = P_{(2,1,1)}(k)\,. \tag{35}$$

Calcolata in precedenza. Vogliamo usare la relazione (34) per calcolare $P_F(x, y)$ nel caso in cui $y \leqslant x \leqslant 2y$.

TEOREMA 3.3. – *Nel settore B risulta*

$$P_F(2y-k, y) = P_3(y) - b(k-1)\,. \tag{36}$$

DIMOSTRAZIONE. – Procediamo per induzione usando (31) e (34). Sappiamo che per ogni k naturale $P_{F'}(k, y) = b(k) - b(k-1)$ e inoltre $P_{F'}(k, y) = P_F(2y-k, y) - P_F(2y-k-1, y)$. Osserviamo allora che per $k=0$ si ha, usando il risultato nel settore C,

$$P_{F'}(0, y) = P_F(2y, y) - P_F(2y-1, y) = P_3(y) - P_F(2y-1, y) \tag{37}$$

mentre, d'altra parte,

$$P_{F'}(0, y) = b(0) - b(-1) = b(0) \tag{38}$$

e quindi $P_F(2y-1, y) = P_3(y) - P_{F'}(0, y) = P_3(y) - b(0)$. Supposto quindi che $P_F(2y-(k-1), y) = P_3(y) - b(k-2)$ e ricordando che $P_{F'}(k-1, y) = P_F(2y-k+1, y) - P_F(2y-k, y)$ e $P_{F'}(k-1, y) = b(k-1) - b(k-2)$ abbiamo

$$\begin{aligned} P_F(2y-k, y) &= P_F(2y-k+1, y) - P_{F'}(k-1, y) = \\ &\qquad P_3(y) - b(k-2) - b(k-1) + b(k-2) \end{aligned} \tag{39}$$

come desiderato. ■

4. – Calcolo della funzione di partizione P per l'algebra G_2.

Come nel caso dell'algebra B_2 anche qui distinguiamo vari settori del piano: A, B, C, D, E, ed anche qui il calcolo richiede una applicazione diretta della Proposizione 1.5 nei settori «esterni» A ed E; mentre nei settori B e D occorre prima considerare delle «funzioni differenza». Infine il caso del settore C è il più complicato in quanto richiede una «doppia funzione differenza».

Studiamo dunque il settore $A = \{(x, y) : x \leqslant y\}$. In questo caso è direttamente applicabile la Proposizione 1.5 bis con

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{40}$$

ed abbiamo

$$P_F(x, y) = P_{(3,3,2,1,1)}(x). \tag{41}$$

Questa funzione la calcoliamo usando la Proposizione 1.1

$$P_F(x, y) = P_{(3,3,2,1,1)}(x) = \sum_{a=0}^{x} P_{(3,3,2,1)}(x-a) = \tag{42}$$

$$P_{(3,3,2,1)}(x) + P_{(3,3,2,1)}(x-1) + P_{(3,3,2,1)}(x-2) + \ldots + P_{(3,3,2,1)}(0).$$

I singoli addendi di nuovo per la Proposizione 1.1 forniscono:

$$\sum_{a=0}^{x} P_{(3,3,2)}(x-a) + \sum_{a=0}^{x-1} P_{(3,3,2)}(x-1-a) + \tag{43}$$

$$\sum_{a=0}^{x-2} P_{(3,3,2)}(x-2-a) + \ldots + P_{(3,3,2)}(0)$$

che ci dà

$$P_{(3,3,2)}(x) + 2P_{(3,3,2)}(x-1) + 3P_{(3,3,2)}(x-2) + \ldots + (x+1)P_{(3,3,2)}(0). \tag{44}$$

Ci siamo dunque ridotti ad una somma di funzioni P calcolate rispetto a $(3, 3, 2)$.

Otterremo il seguente risultato

PROPOSIZIONE 4.1. – *Per ogni* $n \in \boldsymbol{N}$

$$P_{(3,3,2)}(2n) = ([2n/6] + 1)^2 \tag{45}$$

$$P_{(3,3,2)}(2n+1) = ([(2n-2)/6] + 1)([(2n-2)/6] + 2). \tag{46}$$

DIMOSTRAZIONE. – Applichiamo la Proposizione 1.1

$$P_{(3,3,2)}(n) = \sum_{a=0}^{[n/3]} P_{(3,2)}(n-3a) \tag{47}$$

e applicando una seconda volta Proposizione 1.1 si ha:

$$P_{(3,3,2)}(n) = \sum_{a=0}^{[n/3]} \sum_{b=0}^{[\frac{n-3a}{3}]} P_{(2)}(n-3a-3b) \tag{48}$$

e cioè, indicando con ε il residuo di n modulo 3:

$$
\begin{aligned}
(49) \qquad & P_{(2)}(n) + P_{(2)}(n-3) + P_{(2)}(n-6) + \ldots + P_{(2)}(\varepsilon) + \\
& + P_{(2)}(n-3) + P_{(2)}(n-6) + \ldots + P_{(2)}(\varepsilon) + \\
& + P_{(2)}(n-6) + \ldots + P_{(2)}(\varepsilon) + \\
& + \ldots + P_{(2)}(\varepsilon) = \\
& = P_{(2)}(n) + 2P_{(2)}(n-3) + 3P_{(2)}(n-6) + \ldots + \left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right) P_{(2)}(\varepsilon) .
\end{aligned}
$$

Ora è chiaro che i contributi non nulli (e tutti uguali a 1) sono dati dalla funzione $P_{(2)}$ calcolata su numeri pari. Distinguiamo dunque a seconda della parità di n. Se n è pari otteniamo quindi

$$P_{(2)}(n) + 3P_{(2)}(n-6) + \ldots + \left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right) P_{(2)}(\varepsilon) \tag{50}$$

se $\varepsilon = 0, 2$; mentre otteniamo

$$P_{(2)}(n) + 3P_{(2)}(n-6) + \ldots + \left(\left[\frac{n}{3}\right]\right) P_{(2)}(4) \tag{51}$$

nel caso restante. E quindi rispettivamente abbiamo

$$1 + 3 + \ldots + \left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right) = \left(\frac{1}{2}\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)^2 \tag{52}$$

e

$$1 + 3 + \ldots + \left[\frac{n}{3}\right] = \frac{1}{4}\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)^2 \tag{53}$$

(si verifica facilmente che nel primo caso $\left[\frac{n}{3}\right]$ è pari mentre nel secondo caso è dispari.)

Nel caso in cui invece n è dispari abbiamo

$$2P_{(2)}(n-3) + 4P_{(2)}(n-9) + \ldots + \left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right) P_{(2)}(\varepsilon) \tag{54}$$

se $\varepsilon = 0, 2$; ed abbiamo invece

$$2P_{(2)}(n-3) + 4P_{(2)}(n-9) + \ldots + \left(\left[\frac{n}{3}\right]\right) P_{(2)}(4) \tag{55}$$

nel caso restante. Rispettivamente quindi abbiamo:

$$(56) \qquad 2+4+\ldots+\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)=2\left(1+2+\ldots+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)\right)=$$
$$\left(\frac{1}{2}\left[\frac{n}{3}\right]+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left[\frac{n}{3}\right]+\frac{3}{2}\right)$$

nel primo caso, e

$$(57) \qquad 2+4+\ldots+\left[\frac{n}{3}\right]=2\left(1+2+\ldots+\frac{1}{2}\left[\frac{n}{3}\right]\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{3}\right]\left(\frac{1}{2}\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)$$

nel secondo caso. Si verifica infine facilmente che (52) e (53) sono equivalenti alla (45), mentre (56) e (57) sono equivalenti alla (46). Le formule assumono un aspetto più semplice se distinguiamo i casi a seconda della classe di conguenza di n modulo 6. ■

Abbiamo dunque calcolato la funzione $P_{(3,3,2)}(n)$. Il nostro obiettivo resta quello di calcolare la funzione $P_F(x, y) = P_{(3,3,2,1,1)}(x)$. Ci occorre un altro lemma.

LEMMA 4.2. –

$$(58) \qquad \sum_{a=0}^{6k} P_{(3,3,2)}(6k-a) = 2k^3 + \frac{9}{2}k^2 + \frac{7}{2}k + 1\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Si tratta di un calcolo diretto che usa la Proposizione 4.1 precedente. Raccogliendo infatti gli addendi a seconda della classe di congruenza e utilizzando le formule precedenti abbiamo

$$(59) \qquad (k+1)^2 + 3(k^2+\ldots+9+4+1)+$$
$$3[k(k+1)+\ldots+12+6+2]+2(k+1)\,k$$

queste somme si calcolano usando semplici risultati. Per esempio, la somma tra parentesi quadrate è il doppio della somma dei coefficienti binomiali

$$(60) \qquad \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{k}{2}=\binom{k+1}{3}$$

per il Lemma 1.3. ■

Abbiamo allora il seguente teorema.

TEOREMA 4.3. – *Nel settore A abbiamo*

$$P_{(3,3,2,1,1)}(n) = \frac{1}{432}\begin{cases} (n+6)(n^3+14n^2+54n+72) \\ (n+5)^2(n^2+10n+13) \\ (n+4)(n^3+16n^2+74n+68) \\ (n+3)^2(n+5)(n+9) \\ (n+2)(n+8)(n^2+10n+22) \\ (n+1)(n+5)(n+7)^2 \end{cases} \tag{61}$$

rispettivamente se $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *modulo* 6.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $n = 6k$. Dimostreremo per induzione su k la prima relazione. Per $k = 1$ abbiamo

$$P_{(3,3,2,1,1)}(6) = \sum_{a=0}^{6} P_{(3,3,2,1)}(6-a) = \tag{62}$$

$$= \sum_{a=0}^{6}\sum_{b=0}^{6-a} P_{(3,3,2)}(6-a-b) =$$

$$= P_{(3,3,2)}(6) + 2P_{(3,3,2)}(5) + 3P_{(3,3,2)}(4) +$$

$$+ 4P_{(3,3,2)}(3) + 5P_{(3,3,2)}(2) + 6P_{(3,3,2)}(1) + 7P_{(3,3,2)}(0) = 31$$

e in effetti questo coincide con

$$\frac{1}{432}(12)(6^3 + 14(6^2) + 54(6) + 72) = 31\,. \tag{63}$$

Consideriamo ora la $P_{(3,3,2,1,1)}(6(k+1))$ ed osserviamo che, esprimendo questa come somma risulta evidente che essa comprende anche $P_{(3,3,2,1,1)}(6k)$ e che la differenza è data da

$$P_{(3,3,2,1,1)}(6(k+1)) - P_{(3,3,2,1,1)}(6k) =$$

$$= P(6(k+1)) + 2P(6k+5) + 3P(6k+4) + 4P(6k+3) +$$

$$+ 5P(6k+2) + 6P(6k+1) +$$

$$+ 6[P(6k) + P(6k-1) + \ldots + P(0)]$$

dove abbiamo usato l'abbreviazione $P_{(3,3,2)}(n) = P(n)$; questa espressione, usando il lemma precedente è uguale a

$$21k^2 + 44k + 24 + 6\left(2k^3 + \frac{9}{2}k^2 + \frac{7}{2}k + 1\right) = 12k^3 + 48k^2 + 65k + 30\,. \tag{65}$$

Usando ora l'ipotesi induttiva abbiamo

$$P_{(3,3,2,1,1)}(6(k+1)) = \tag{66}$$

$$\frac{1}{432}(6k+6)[(6k)3+14(6k)^2+54\cdot(6k)+72]+12k^3+48k^2+65k+30$$

$$= 3k^4+22k^3+\frac{119}{2}k^2+\frac{141}{2}k+31$$

questo effettivamente coincide con

$$\frac{1}{432}(6k+12)[(6k+6)^3+14(6k+6)^2+54(6k+6)+72]. \tag{67}$$

In maniera analoga si dimostra la formula nei rimanenti casi. ∎

OSSERVAZIONE. – Nel caso che stiamo trattando, il calcolo svolto tramite la funzione generatrice risulta meno utile che nell'analoga situazione del Teorema 3.2. Infatti, si potrebbe osservare che $P_{(3,3,2,1,1)}(x)$ è il coefficiente di q^{x+8} nello sviluppo in serie della funzione

$$\frac{q^6}{(1-q^3)^2}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdot\frac{q^2}{(1-q)^2}. \tag{68}$$

Il che ci porta dunque a considerare la serie di potenze

$$q^8\sum_{h,i,j}{}^{\infty}(j+1)(h+1)\,q^{3j+2i+h} \tag{69}$$

ed il coefficiente desiderato è dunque $\sum_{3j+2i+h=n}(j+1)(h+1)$. Questa forma del coefficiente pur avendo i suoi vantaggi non è immediatamente riconducibile alla forma del Teorema 4.3 se non attraverso una argomentazione essenzialmente equivalente alla dimostrazione stessa del teorema data sopra. Questo è una motivazione sufficiente per dare, a volte, due metodi diversi di calcolo della stessa quantità.

Consideriamo ora l'altro settore esterno dove si può applicare direttamente la Proposizione 1.5: il settore $E=\{(x,y): 3y\leqslant x\}$. Abbiamo quindi che l'ipotesi della proposizione $\max\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{3}{2}\right\}\leqslant 3\leqslant\frac{x}{y}$ è verificata, dunque

$$P_F(x,y)=P_{(2,1,1,1,1)}(y). \tag{70}$$

Calcoliamo ora una esplicita espressione per questa funzione che chiamiamo per comodità

$$h(n)=P_{(2,1,1,1,1)}(n). \tag{71}$$

Abbiamo che $P_{(2,1,1,1,1)}(x)$ è il coefficiente di q^{n+4} nello sviluppo di

$$\frac{1}{1-q^2}\cdot\frac{q^4}{(1-q)^4} \tag{72}$$

il che dà luogo a

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{2i}\sum_{j=4}^{\infty}\binom{j-1}{3}q^j=\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+4}\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n+3-2i}{3} \tag{73}$$

e quindi

$$P_{(2,1,1,1,1)}(n)=\sum_{a=0}^{[n/2]}\binom{n-2a+3}{3}. \tag{74}$$

Per concludere abbiamo bisogno di due semplici lemmi.

LEMMA 4.4. – *Per ogni naturale k vale la seguente relazione*

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{2i+3}{3}=\frac{1}{48}(2k+2)(2k+4)(4k^2+12k+6). \tag{75}$$

DIMOSTRAZIONE. – Per induzione su k. Se $k=0$ abbiamo $\binom{3}{3}=\frac{48}{48}$. Supponiamo dunque che

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2i+3}{3}=\frac{1}{48}(2k)(2k+2)(4(k-1)^2+12(k-1)+6). \tag{76}$$

Possiamo dunque scrivere

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{2i+3}{3}=\frac{1}{48}(2k)(2k+2)(4(k-1)^2+12(k-1)+6)+\binom{2k+3}{3}= \tag{77}$$

$$=\frac{1}{48}(2k)(2k+2)(4(k-1)^2+12(k-1)+6)+\frac{(2k+3)(2k+2)(2k+1)}{6}=$$

$$=\frac{(2k+2)(2k+4)(4k^2+12k+6)}{48}. \qquad \blacksquare$$

LEMMA 4.5. – *Per ogni naturale k abbiamo*

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{2i+4}{3}=\frac{(2k+2)(2k+4)^2(2k+6)}{48}. \tag{78}$$

DIMOSTRAZIONE. – Infatti sappiamo, dal Lemma 1.3, che

$$\sum_{i=0}^{2k+1}\binom{i+3}{3}=\binom{2k+5}{4} \tag{79}$$

e per il Lemma 4.4 possiamo scrivere

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{2i+4}{3}=\binom{2k+5}{4}-\frac{(2k+2)(2k+4)(4k^2+12k+6)}{48}= \tag{80}$$

$$=\frac{(2k+5)(2k+4)(2k+3)(2k+2)}{24}-\frac{(2k+2)(2k+4)(4k^2+12k+6)}{48}=$$

$$=\frac{(2k+2)(2k+4)^2(2k+6)}{48}. \qquad \blacksquare$$

Possiamo allora enunciare il seguente teorema:

TEOREMA 4.6. – *Per ogni intero naturale* n *si ha nel settore* E

$$h(n)=P_{(2,1,1,1,1)}(n)=\frac{1}{48}\begin{cases}(n+2)(n+4)(n^2+6n+6)\\ (n+1)(n+3)^2(n+5)\end{cases} \tag{81}$$

rispettivamente se n *è pari oppure dispari.*

Consideriamo adesso il settore D definito dalla relazione $2y \leqslant x \leqslant 3y$. Poniamo $k=3y-x$ con $0 \leqslant k \leqslant y$. Sappiamo che la differenza

$$P_{F'}(3y-k,\, y)=P_F(3y-k,\, y)-P_F(3y-k-1,\, y) \tag{82}$$

rappresenta la funzione partizione rispetto a

$$F'=\begin{pmatrix}0&1&2&3&3\\1&1&1&1&2\end{pmatrix}. \tag{83}$$

Osserviamo adesso che $P_{F'}(k,\, y)=P_{F'}(3y-k,\, y)$ in quanto esiste una corrispondenza biunivoca tra le 5-ple $(m_0,\, m_1,\, m_2,\, m_3,\, m_4)$ in $\mathcal{P}_{F'}(k,\, y)$ e le 5-ple in $\mathcal{P}_{F'}(3y-k,\, y)$ data da

$$(m_0,\, m_1,\, m_2,\, m_3,\, m_4) \leftrightarrow (m_3,\, m_2,\, m_1,\, m_0,\, m_4). \tag{84}$$

Possiamo allora applicare la Proposizione 1.5 a $P_{F'}(k,\, y)$ che quindi soddisfa le ipotesi in quanto $\max\left\{\frac{k_i}{j_i}\right\}=\max\left\{\frac{1}{1},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3},\, \frac{2}{3}\right\}\leqslant 1 \leqslant \frac{y}{k}$ e quindi concludere

$$P_{F'}(k,\, y)=P_{(3,3,2,1)}(k)= \tag{85}$$

$$P_{(3,3,2,1,1)}(k)-P_{(3,3,2,1,1)}(k-1)=g(k)-g(k-1),$$

ove si è posto per brevità $P_{(3,3,2,1,1)}(k) = g(k)$ per ogni k e cioè la funzione calcolata nel Teorema 4.3. Usando questa relazione, il fatto che

$$P_{F'}(k, y) = P_F(3y - k, y) - P_F(3y - k - 1, y) \tag{86}$$

e ricordando che per $k = 0$ siamo nel settore precedente per cui $P_F(3y, y) = h(y)$ otteniamo il

TEOREMA 4.7. – *Per ogni intero naturale n si ha nel settore D*

$$P_F(3y - k, y) = h(y) - g(k - 1) = h(y) - g(3y - x - 1). \tag{87}$$

DIMOSTRAZIONE. – Per induzione: Per $k = 0$ abbiamo $P_F(3y, y) = h(y)$ perché siamo nel settore esterno ed inoltre $g(-1) = 0$ per definizione, dunque la tesi è vera in questo caso.
Supponiamo che

$$P_F(3y - (k - 1), y) = h(y) - g(k - 2) \tag{88}$$

allora

$$P_{F'}(k - 1, y) = g(k - 1) - g(k - 2) \tag{89}$$

e anche

$$P_{F'}(k - 1, y) = P_F(3y - k + 1, y) - P_F(3y - k, y). \tag{90}$$

Avremo dunque

$$\begin{aligned} P_F(3y - k, y) &= P_F(3y - k + 1, y) - P_{F'}(k - 1, y) = \\ &h(y) - g(k - 2) - g(k - 1) + g(k - 2) = h(y) - g(k - 1) \end{aligned} \tag{91}$$

come richiesto. ■

Consideriamo ora il settore B definito da $y \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}y$. Sia $k = x - y$ cosicché $0 \leqslant k \leqslant \frac{y}{2}$. Prendiamo $P_{F'''}(x, x - k) = P_F(x, x - k) - P_F(x, x - k - 1)$ che per il Lemma 1.6 è la funzione di partizione relativa a

$$F''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Risulta che $P_{F'''}(x, x - k) = P_{F'''}(x, k)$ perché infatti esiste una biiezione

$$(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) \leftrightarrow (m_1, m_0, m_2, m_4, m_3) \tag{93}$$

tra le partizioni contate da $P_{F'''}(x, k)$ e quelle contate da $P_{F'''}(x, x - k)$.

Vogliamo ora applicare la Proposizione 1.5 a $P_{F'''}(x, k)$. Abbiamo infatti

(94) $$\frac{3}{2}y \geqslant x \Leftrightarrow 3y \geqslant 2x \Leftrightarrow 2x - 3y \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 3x - 3y \leqslant x \Leftrightarrow 3k \leqslant x \Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{k} \geqslant 3 \,.$$

Dunque

(95) $$P_{F'''}(x, k) = P_{(2,1,1,1)}(k) =$$
$$P_{(2,1,1,1,1)}(k) - P_{(2,1,1,1,1)}(k-1) = h(k) - h(k-1)$$

e d'altra parte

(96) $$P_{F'''}(x, k) = P_F(x, x-k) - P_F(x, x-k-1)\,.$$

Procedendo per induzione come nei casi precedenti abbiamo

TEOREMA 4.8. – *Nel settore B abbiamo*

(97) $$P_F(x, x-k) = g(x) - h(k-1) = g(x) - h(x-y-1)\,.$$

Rimane infine da considerare il settore C in cui $\frac{3}{2}y \leqslant x \leqslant 2y$. Poniamo $k = 3y - x$. Supponendo che $y \leqslant k \leqslant \frac{3}{2}y$ la coppia (k, y) descrive il settore C.
Poniamo

(98) $$P_F(3y-k, y) - P_F(3y-k-1, y) = P_{F'}(3y-k, y) = P_{F'}(k, y)\,.$$

Inoltre

(99) $$P_{F'}(k, y) - P_{F'}(k-1, y-1) = P_G(k, y)$$

ove

(100) $$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo adesso che $\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} \leqslant \frac{y}{k}$ poiché

(101) $$\frac{y}{k} \geqslant \frac{y}{\frac{3}{2}y} = \frac{2}{3}$$

e quindi possiamo applicare la Proposizione 1.5 bis e la Proposizione 1.1 due volte ottenendo

$$P_G(k,\, y) = P_{(3,\,3,\,2)}(k) = P_{(3,\,3,\,2,\,1)}(k) - P_{(3,\,3,\,2,\,1)}(k-1) = \tag{102}$$

$$P_{(3,\,3,\,2,\,1,\,1)}(k) - 2P_{(3,\,3,\,2,\,1,\,1)}(k-1) + P_{(3,\,3,\,2,\,1,\,1)}(k-2)\,.$$

Consideriamo adesso il caso $k = y$ (il primo nel nuovo settore). Abbiamo allora

$$P_F(2y,\, y) - P_F(2y-1,\, y) = P_{F'}(2y,\, y) = P_{F'}(y,\, y) \tag{103}$$

quest'ultimo termine si può calcolare con la Proposizione 1.5 ed ottenere infine

$$g(y) - g(y-1)\,. \tag{104}$$

Quindi

$$P_F(2y-1,\, y) = P_F(2y,\, y) - g(y) + g(y-1) = h(y) - g(y)\,. \tag{105}$$

PROPOSIZIONE 4.9. – *Sia*

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{106}$$

Allora

$$P_{F'}(k,\, y) = g(k) - g(k-1) + h(k-y-2) - h(k-y-1) \tag{107}$$

per $y \leqslant k \leqslant \dfrac{3}{2}y$.

DIMOSTRAZIONE. – Useremo l'induzione insieme con il fatto che

$$P_G(k,\, y) = g(k) - 2g(k-1) + g(k-2)\,. \tag{108}$$

Vediamo subito che $P_{F'}(1,\, 0) = 0$ e d'altra parte $g(1) - g(-1) + h(1-2) - h(1-1) = 0$. Supponendo che

$$P_{F'}(k-1,\, y-1) = \tag{109}$$

$$g(k-1) + h(k-1-y+1-2) - h(k-1-y+1-1) - g(k-2)$$

otteniamo

$$P_{F'}(k,\, y) = P_G(k,\, y) + P_{F'}(k-1,\, y-1) = g(k) - 2g(k-1) + g(k-2) + \tag{110}$$

$$+ g(k-1) + h(k-y-2) - h(k-y-1) - g(k-2) =$$

$$= g(k) - g(k-1) + h(k-y-2) - h(k-y-1)\,. \qquad \blacksquare$$

Possiamo infine dimostrare il seguente

Teorema 4.10.

$$P_F(x, y) = h(y) - g(3y - x - 1) + h(2y - x - 2) \tag{111}$$

nel settore C.

Dimostrazione. – Per induzione. Sappiamo che

$$P_F(3y - k, y) - P_F(3y - k - 1, y) = P_{F'}(k, y). \tag{112}$$

Abbiamo già visto il caso $k = y$ per cui

$$P_F(2y, y) = h(y) - g(y - 1) + h(-2) \tag{113}$$

perché questo caso è in comune col settore (d). Supponiamo che

$$P_F(3y - k, y) = h(y) - g(k - 1) + h(k - y - 2). \tag{114}$$

Allora

$$P_F(3y - k, y) - P_F(3y - k - 1, y) = P_{F'}(k, y) \tag{115}$$

fornisce

$$\begin{aligned} P_F(3y - (k+1), y) &= P_F(3y - k, y) - P_{F'}(k, y) = \\ &= h(y) - g(k - 1) + h(k - y - 2) + \\ &- (g(k) - g(k - 1) + h(k - y - 2) - h(k - y - 1)) = \\ &= h(y) - g(k) + h(k - y - 1). \qquad \blacksquare \end{aligned} \tag{116}$$

Raccogliamo infine in una tabella riepilogativa i risultati ottenuti. Per ognuna delle algebre della lista indichiamo il valore della funzione di partizione di Kostant $P(x, y)$ nei vari settori.

Tabella Riepilogativa.

Algebra A_2.

$$x + 1, \quad \text{per } x \leqslant y\,;$$

$$y + 1, \quad \text{per } y \leqslant x\,.$$

Algebra B_2.

$$\left(\left[\frac{x+1}{2}\right] + 1\right)\left(x + 1 - \left[\frac{x+1}{2}\right]\right) := b(x), \quad \text{per } x \leqslant y\,;$$

$$\frac{1}{2}(y+1)(y+2) - b(2y - x - 1), \quad \text{per } y \leqslant x \leqslant 2y\,;$$

$$\frac{1}{2}(y+1)(y+2), \quad \text{per } 2y \leqslant x\,.$$

Algebra G_2.

$$g(x) := \frac{1}{432}\begin{cases} (x+6)(x^3+14x^2+54x+72) \\ (x+5)^2(x^2+10x+13) \\ (x+4)(x^3+16x^2+74x+68) \\ (x+3)^2(x+5)(x+9) \\ (x+2)(x+8)(x^2+10x+22) \\ (x+1)(x+5)(x+7)^2 \end{cases}$$

rispettivamente se $x \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \bmod 6$ per $x \leqslant y$;

$$h(y) := \frac{1}{48}\begin{cases} (y+2)(y+4)(y^2+6y+6) \\ (y+1)(y+3)^2(y+5) \end{cases}$$

rispettivamente se y è pari oppure dispari, per $3y \leqslant x$;

$$g(x) - h(x-y-1), \quad \text{se } y \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}y\,;$$

$$h(y) - g(3y-x-1) + h(2y-x-2), \quad \text{se } \frac{3}{2}\,y \leqslant x \leqslant 2y\,;$$

$$h(y) - g(3y-x-1), \quad \text{se } 2y \leqslant x \leqslant 3y\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[B] E. A. BENDER, *A Lifting Theorem for Formal Power Series*, Proc. Amer. Math. Soc., **42** (1974), 16-22.

[S] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Vol. I, Cambridge, 1997.

[T] J. TARSKI, *Partition Function for Certain Simple Lie Algebras*, J. Math. Phys. 4, 4 (aprile 1963), 569-574.

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici, Università La Sapienza, Roma

Pervenuta in Redazione
il 15 novembre 2001