Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Andrea Brini

Combinatoria e Topologia. Alcune considerazioni generali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.3, p. 531–563.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_3_531_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Dicembre 2003, 531-563

Combinatoria e Topologia. Alcune considerazioni generali.

A. Brini (*)

Sommario. – *Si descrive un metodo generale mediante il quale associare in modo naturale spazi topologici ad insiemi parzialmente ordinati e funzioni continue a funzioni monotone tra di essi; questa associazione è chiaramente la chiave di volta per fondare l'utilizzo di metodi topologici nella teoria combinatoria degli insiemi parzialmente ordinati. Si discutono quindi alcuni criteri di contraibilità e si presenta una breve introduzione alla teoria dei «poset Cohen-Macaulay». Il lavoro si conclude con una sezione di carattere elementare, nella quale il Lettore che eventualmente non abbia familiarità con i concetti e risultati basici della Topologia Poliedrale potrà trovare, ci auguriamo, tutti gli elementi atti a rendere agevole la comprensione del testo.*

Indice

(*) Dedicato a Italo Scardovi.

1. – Introduzione.

Le vicende della Topologia e della Combinatoria sono profondamente intrecciate fin dalle origini, come risulta ad esempio dalle prime straordinarie intuizioni di Eulero (L. Euler, 1707-83).

È comunque durante gli anni '30 del secolo appena trascorso che l'interazione tra pensiero topologico e pensiero combinatorio raggiunge la sua massima fecondità. I fondazionali contributi alla topologia geometrica ed algebrica di Matematici quali Aleksandrov [3, 4], Alexander [2], Seifert e Threlfall [22] e J. H. C. Whitehead [26] sono ispirati ad una visione essenzialmente combinatoria. Gli spazi topologici vengono descritti mediante il metodo dei *complessi simpliciali* («assemblamenti» di punti, segmenti, triangoli, tetraedri e, più in generale, k-simplessi), poi sfociato nell'elaborazione, da parte di Whitehead, della teoria dei *CW-complessi*. Anche la teoria dell'*equivalenza omotopica* viene affrontata con questo spirito: si individuano classi di «operazioni elementari» (*collassamenti* ed *anticollassamenti*) che non alterano il tipo di omotopia e si auspica di poter dimostrare l'equivalenza omotopica di due poliedri esibendo successioni finite di queste operazioni tali da condurre da un poliedro all'altro (teoria dei *tipi di omotopia semplice*, cfr., ad es. [9]).

Per complesse ragioni storiche e culturali, a partire dal secondo dopoguerra, si assiste (seppure con rilevanti eccezioni) ad una progressiva divaricazione tra Topologia e Combinatoria. Nel tempo si diffonde l'opinione secondo la quale Topologia e Combinatoria sono discipline matematiche autonome ed incomunicanti, o, addirittura, antipodali. Va riconosciuto che questa convinzione ha un suo apparente fondamento: la Topologia viene vista come il prodotto estremo della matematica del *continuo*, mentre la Combinatoria tratta essenzialmente di strutture *finite*.

Scopo e spunto di questo lavoro è quello di provare a confutare questo pregiudizio, mostrando che la predisposizione alla «separazione» disciplinare non ha fondamento nella *essenza* delle problematiche e dei concetti trattati, ma è piuttosto generata da una abitudine semplicisticamente classificatoria. Ci auguriamo di convincere il Lettore che spesso un concetto od un risultato non è, *in sè*, di natura topologica o combinatoria. Questa pretesa «essenza disciplinare» è invece da interpretarsi come il prodotto dei punti di vista e delle metodologie che vengono, nel corso del tempo, adottate dai Matematici, nei confini della cultura e della libertà creativa di ciascuno.

Le interazioni tra Topologia e Combinatoria sono, al presente stato dell'arte, innumerevoli. Per ragioni di spazio, in questo lavoro ci limiteremo a discutere solo alcune circoscritte situazioni, principalmente legate alla applicazione di metodi topologici a problemi combinatorici, sebbene esista anche una ampia e profonda letteratura sulle applicazioni nella direzione inversa (vale a dire applicazioni di metodi combinatorici a problemi topologici).

Il lavoro é organizzato come segue.

Nel capitolo 2 si presenta una brevissima introduzione ad alcune delle idee e dei fatti fondamentali della Topologia Combinatoria classica, con particolare riguardo al metodo degli «anticollassamenti/collassamenti» ed alla teoria dei «tipi di omotopia semplice» di Whitehead.

Nel capitolo 3, si descrive il metodo generale mediante il quale associare in modo naturale spazi topologici ad insiemi parzialmente ordinati e funzioni continue a funzioni monotone tra di essi; questa associazione è chiaramente la chiave di volta per fondare l'utilizzo di metodi topologici nella teoria combinatoria degli insiemi parzialmente ordinati.

Dopo avere enunciato una versione adattata del «Lemma del supporto contraibile», si discutono alcuni criteri di contraibilità, criteri che risultano assai utili nelle applicazioni.

Nel capitolo 4 si presenta una breve introduzione alla teoria dei «poset Cohen-Macaulay», teoria che costituisce attualmente uno dei capitoli più affascinanti e meglio sviluppati della Combinatoria Algebrica.

Il lavoro si conclude con una sezione di carattere elementare, nella quale il Lettore che eventualmente non abbia familiarità con i concetti e risultati basici della Topologia Poliedrale potrà trovare, ci auguriamo, tutti gli elementi atti a rendere agevole la comprensione delle sezioni precedenti. Il Lettore familiare con questa materia è, ovviamente, consigliato di ometterne la lettura.

Questo articolo sarà seguito da un secondo lavoro di approfondimento ed applicazione, intitolato «Combinatoria e Topologia. Teorema di Quillen e Funzioni di Möbius», che costituirà, di fatto, il cuore della trattazione.

In questo secondo lavoro si introduce la fondamentale nozione di *connessione di Galois* e se ne descrivono i principali risultati di caratterizzazione; questi risultati aprono la strada alla comprensione del profondo legame che sussiste tra le connessioni di Galois ed il «*Criterio di Omotopia*» di Quillen [20, 21], del quale viene proposta la dimostrazione elementare di Walker [25].

Si presenta quindi la nozione di *funzione di Möbius* di un reticolo finito $\mathcal{L}$, e se ne discute brevemente, tramite un esempio significativo, la cruciale importanza nell'ambito della Combinatoria Enumerativa e della Probabilità Discreta. Si richiama poi il «teorema di Hall-Rota», che permette di interpretare i valori di questa funzione come caratteristiche di Eulero ridotte di opportuni sottoinsiemi parzialmente ordinati, ed apre così la via allo sviluppo di una teoria topologica delle funzioni di Möbius.

Dopodichè, a titolo di esempio e di applicazione di questo punto di vista, si presentano e si dimostrano, in modo assolutamente elementare, le versioni *topologiche* di due classici Teoremi: il «Teorema del Cross-Cut» ed il «Teorema di annullamento per reticoli non fortemente complementati».

Per una descrizione più dettagliata, rimandiamo all'Introduzione di «*Combinatoria e Topologia. Teorema di Quillen e Funzioni di Möbius*».

Al Lettore interessato ad approfondire gli argomenti qui brevemente trattati, ed a conoscerne gli sviluppi più recenti, consigliamo la lettura dell'interessantissimo articolo: A. Björner [7], *Topological Methods*, 1995.

2. – Topologia combinatoria.

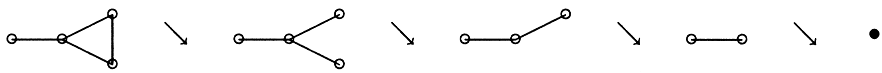
Negli anni '30, uno dei punti vista principali della topologia era il punto di vista *combinatorio*; si ipotizzava che il problema di classificare, a meno di omeomorfismo o di equivalenza omotopica, i poliedri realizzazione geometrica di complessi simpliciali finiti potesse e dovesse essere affrontato (cfr., ad es. [2, 4, 22, 26]) introducendo delle operazioni elementari, o, «movimenti», tali da non alterare il tipo di omotopia del poliedro di partenza; si auspicava di potere dimostare almeno l'equivalenza omotopica di due poliedri K_1 e K_2 esibendo una successione *finita* di operazioni elementari tale da condurre da K_1 a K_2. Non deve perciò sorprendere che J.H.C.Whitehead, nel suo sforzo di comprendere la nozione di equivalenza omotopica, abbia seguito questa visione, a partire dal fondazionale lavoro «*Simplicial spaces, nucleii and m-groups*» del 1939 [26].

In questo paragrafo, cercheremo di descrivere brevemente alcune delle nozioni introdotte da Whitehead ed alcuni dei principali risultati ottenuti per questa via.

2.1. *Collassamenti, anticollassamenti, tipo di omotopia semplice.*

Sia K un complesso simpliciale, e supponiamo che $\sigma \in K$ sia un simplesso di K contenuto propriamente in *uno ed un solo* simplesso $\tau \in K$. Se rimuoviamo da K i due simplessi σ e τ, risulta che $K - \{\sigma, \tau\}$ è ancora un complesso simpliciale, la cui realizzazione geometrica si verifica facilmente essere omotopicamente equivalente a quella di K. L'operazione di passaggio per questa via da K a $K - \{\sigma, \tau\}$ si dice *collassamento elementare*. Dati due complessi K_1 e K_2, diremo che K_1 *collassa* a K_2 se esiste una sequenza finita di collassamenti elementari che conduce da K_1 a K_2, e denoteremo questa situazione col simbolo $K_1 \searrow K_2$. Per quanto appena detto, se $K_1 \searrow K_2$, allora le realizzazioni geometriche di K_1 e K_2 sono omotopicamente equivalenti.

ESEMPIO 1. – *Nel seguente esempio, riconosceremo che il poliedro descritto da un triangolo (2-simplesso) con un segmento (1-simplesso) uscente da un vertice risulta collassabile ad un punto • e quindi, a fortiori, è contraibile. Infatti:*



NB. In questo esempio e nei successivi, i triangoli non contenenti il simbolo ∅ vanno intesi come triangoli «pieni», cioè 2-simplessi.

L'operazione inversa del collassamento elementare si dice *anticollassamento elementare*. Dati due complessi K_1 e K_2, diremo che K_1 *anticollassa* a K_2 se esiste una sequenza finita di anticollassamenti elementari che conduce da K_1 a K_2, e denoteremo questa situazione col simbolo $K_1 \nearrow K_2$. Per quanto appena detto, se $K_1 \nearrow K_2$, allora le realizzazioni geometriche di K_1 e K_2 sono omotopicamente equivalenti.

Infine, dati due complessi simpliciali K_1 e K_2, diremo hanno lo stesso tipo di *omotopia semplice* (o, con lieve abuso di terminologia, che sono *semplicemente omotopi*) se esiste una sequenza finita di anticollassamenti e collassamenti elementari che conduce da K_1 a K_2. Ovviamente, se K_1 e K_2 hanno lo stesso tipo di omotopia semplice, allora K_1 e K_2 sono omotopicamente equivalenti.

2.2. *Alcune osservazioni.*

Una domanda sorge a questo punto naturale: fino a quale punto la teoria dei *tipi di omotopia semplice* (metodo degli anticollassamenti/collassamenti) è applicabile alla teoria generale della *equivalenza omotopica* tra poliedri, nel senso generale? La risposta non è nè semplice nè univoca. In questa sede, ci limiteremo a menzionare due fatti (non banali!) che tuttavia risultano assai utili e, speriamo, illuminanti (cfr., ad es. [9]).

1) Dati due complessi simpliciali K_1 e K_2 aventi realizzazioni geometriche omotopicamente equivalenti è, in generale, *FALSO* che K_1 e K_2 abbiano lo stesso tipo di omotopia semplice.

2) Un poliedro K si dice *collassabile* se collassa ad un punto, in simboli $K \searrow \bullet$. Si ha:

$$\textit{COLLASSABILE} \Rightarrow \textit{CONTRAIBILE} \text{ ma } \textit{CONTRAIBILE} \not\Rightarrow \textit{COLLASSABILE}.$$

I legami tra le nozioni di collassabilità, omotopia semplice ed equivalenza omotopica sono ben esemplificati dallo studio di un celebre poliedro, noto in letteratura come **casa con due stanze** o, **Bing Room** (cfr., ad es. [9]); questo poliedro risulta contraibile, addirittura semplicemente omotopo ad un punto, ma *non* collassabile.

Sotto opportune condizioni sul *gruppo fondamentale*, la implicazione menzionata in 1) risulta vera. Ad esempio, sussiste il seguente risultato, dovuto essenzialmente a Whitehead. Siano K_1 e K_2 due complessi simpliciali aventi per realizzazioni geometriche due poliedri *semplicemente connessi*; se i poliedri sono omotopicamente equivalenti, allora K_1 e K_2 hanno lo stesso tipo di omotopia semplice.

3. – Insiemi parzialmente ordinati e spazi topologici.

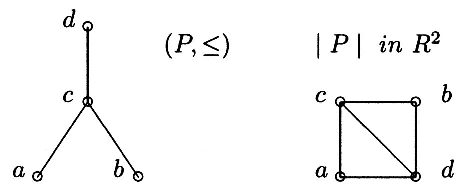
3.1. *Realizzazioni geometriche.*

Sia $(P, \leqslant)$ un *insieme parzialmente ordinato* (o, per brevità, *poset*), vale a dire un insieme P munito di una relazione di ordine parziale $\leqslant$. Nel seguito, per semplicità di esposizione, ci limiteremo a considerare solo poset *finiti*, sebbene molti dei concetti e dei risultati discussi nel seguito sussistano in situazioni assai più generali.

Un sottoinsieme non vuoto $\sigma \subseteq P$ si dice *catena* se, rispetto all'ordine indotto, risulta un insieme *totalmente ordinato*. Chiaramente, ogni sottoinsieme non vuoto di una catena è ancora una catena, e quindi l'insieme $\Delta(P)$ di tutte le catene di $(P, \leqslant)$ è un *complesso simpliciale astratto*, detto «complesso delle catene» di P. Il complesso astratto $\Delta(P)$ ammette *realizzazioni geometriche* in spazi euclidei R^m di opportuna dimensione, ottenute considerando il poliedro associato ad un qualsiasi complesso simpliciale in R^m il cui *schema dei vertici* sia isomorfo a $\Delta(P)$. È fondamentale ricordare che due qualsiasi realizzazioni geometriche di un complesso astratto risultano *simplicialmente omeomorfe*; di conseguenza, è consistente parlare, nell'ambito della topologia simpliciale, di *realizzazione geometrica* del poset P ed usare il simbolo $|P|$ per intendere una *qualsiasi* realizzazione geometrica del complesso delle catene $\Delta(P)$.

In sintesi, la costruzione appena descritta ci permette di associare ad un poset finito $(P, \leqslant)$ un poliedro $|P|$ in uno spazio euclideo R^m, *canonicamente a meno di omeomorfismi simpliciali*, e quindi di attribuire proprietà topologiche ai poset finiti.

ESEMPIO 2. – *Graficamente, descriviamo un poset* $(P, \leqslant)$ *mediante il suo diagramma di Hasse ed una sua realizzazione geometrica come poliedro in* R^2:



Si noti che $|P|$ *è un cono (sia sul vertice c che sul vertice d), quindi,* $|P|$ *è contraibile.*

Si consideri una applicazione monotona da $(P, \leqslant)$ a $(Q; \leqslant)$, vale a dire una applicazione

$$f : P \to Q$$

tale che

$$p \leqslant p' \Rightarrow f(p) \leqslant f(p'), \quad per\ ogni\ p, p' \in P\,.$$

L'applicazione f induce una *applicazione simpliciale formale* dal complesso astratto $\Delta(P)$ al complesso astratto $\Delta(Q)$, la quale induce, a sua volta, una mappa simpliciale

$$|f| : |P| \to |Q|$$

dal poliedro $|P|$ al poliedro $|Q|$. La funzione continua $|f|$ è detta *realizzazione geometrica* della applicazione monotona f.

Le realizzazioni geometriche di posets ed applicazioni monotone godono di utili proprietà «funtoriali».

i) Sia $P' \subseteq P$; allora $|f|[\,|P'|\,] \subseteq |f[P']\,|$.

ii) Date due applicazioni monotone

$$f : P \to Q \quad e \quad g : Q \to T,$$

considerati i poliedri $|P|$, $|Q|$, $|T|$ e le mappe simpliciali $|f|$, $|g|$, risulta

$$|g \circ f| = |g| \circ |f|.$$

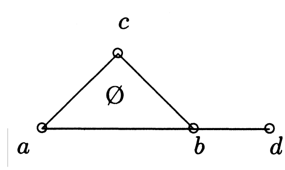
3.2. *Suddivisione baricentrica.*

Sia $\varDelta$ un complesso simpliciale astratto su un insieme finito S e denotiamo con $\overline{\varDelta}$ il complesso $\varDelta$ riguardato come poset, rispetto all'ordine di inclusione $\subseteq$ (di fatto, $\overline{\varDelta}$ è un *ideale d'ordine* della algebra di Boole $P(S)$, privata del minimo $\emptyset$).

Di conseguenza, possiamo considerare il *complesso di catene* $\varDelta(\overline{\varDelta})$; il complesso $\varDelta(\overline{\varDelta})$ si dice *suddivisione baricentrica* di $\varDelta$.

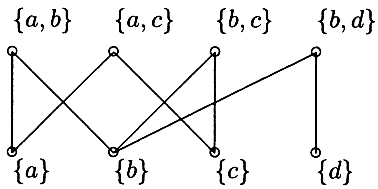
SCHOLION: le realizzazioni geometriche di $|\varDelta|$ e $|\varDelta(\overline{\varDelta})\,|$ sono *omemorfe*, tramite la *applicazione identica.*

ESEMPIO 3. – *Si consideri il poliedro π in R^2:*

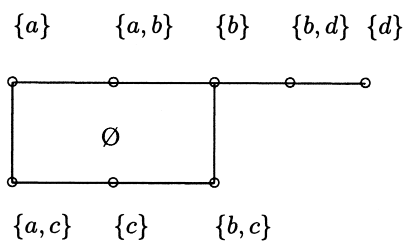


Sia $\varDelta(\pi)$ il complesso simpliciale astratto dato dallo schema dei vertici di π, e sia $(\overline{\varDelta(\pi)}, \subseteq)$ il complesso simpliciale $\varDelta(\pi)$ riguarda-

to come poset e rappresentato mediante il seguente diagramma di Hasse:



La realizzazione geometrica $|\overline{\Delta(\pi)}|$ *può essere rappresentata (in* R^2*) dal poliedro*



che è chiaramente omeomorfo a π.

OSSERVAZIONE 1. – *La precedente descrizione della suddivisione baricentrica di un complesso simpliciale rende manifesto che ogni poliedro può essere riguardato come realizzazione geometrica di un poset, e viceversa.*

OSSERVAZIONE 2. – *Più in generale, dato uno spazio topologico descritto mediante un «complesso di celle regolare» (o, CW-complesso regolare finito) K, considerando il poset delle «celle chiuse» di K, ordinate per inclusione, il suo complesso di catene è un complesso simpliciale avente realizzazione geometrica omeomorfa a quella del complesso K. Dal punto di vista combinatorio, questo significa che ogni CW-complesso regolare finito può essere riguardato come poset senza alcuna perdita di informazione topologica (cfr., ad es.* [7]).

3.3. *Smantellabilità, collassabilità e contraibilità.*

Nell'ambito della teoria dei poset, la nozione di *collassabilità* ammette una versione più «intrinseca», e, sotto certi aspetti, più efficace dal punto di vista algoritmico: la nozione di *smantellabilità.*

Dato un poset P, un elemento $x \in P$ si dice *irriducibile* se il sottoposet $P_{<x} = \{p \in P;\, p < x\}$ ammette massimo, ovvero se il sottoposet $P_{>x} = \{p \in P;\, p > x\}$ ammette minimo. Se $x \in P$ è un irriducibile, l'operazione di passaggio da P a $P - \{x\}$, cioè l'operazione di «eliminazione» dell'elemento x, si dice *smantellamento elementare di P rispetto ad x.* È una verifica elementare, seppure leggermente laboriosa, riconoscere che il complesso di catene $\Delta(P - \{x\})$ è ottenibile tramite una sequenza finita di collassamenti elementari dal complesso di catene $\Delta(P)$ e, quindi, che $|P|$ e $|P - \{x\}|$ hanno lo stesso tipo di omotopia semplice.

In generale, diremo che un poset P è *smantellabile* se, mediante una sequenza finita di smantellamenti elementari, è possibile ridurre P ad un singolo punto. Da quanto appena detto, se P è smantellabile, allora il suo complesso di catene $\Delta(P)$ è collassabile ad un punto, e, quindi, il poliedro $|P|$ è contraibile. Tuttavia, si deve osservare che, se un poset P ha complesso di catene $\Delta(P)$ collassabile, è in generale *FALSO* che P sia smantellabile.

Notiamo che il poset descritto nell'esempio 2 risulta smantellabile: possiamo infatti eliminare il punto d, quindi il punto a, infine il punto b ottenendo così il poset banale costituito dal solo punto c. Si apprezzi, mediante questo semplicissimo esempio, come sia (quando possibile) più agevole verificare la smantellabiltà di un poset piuttosto che la collassabilità del suo complesso di catene.

OSSERVAZIONE 3. – *Ancora la «casa con due stanze»* (*cfr.* 2.2), *passando alla suddivisione baricentrica, permette anche di riconoscere facilmente che sono, in generale, FALSE le seguenti implicazioni:*

i) dato un poset P, se $|P|$ è contraibile, allora P è smantellabile.

ii) dato un poset P, se $|P|$ è contraibile, allora il complesso delle catene $\Delta(P)$ è collassabile.

3.4. *Sul Lemma del supporto contraibile.*

Descriveremo ora una versione del «Lemma del supporto contraibile» formulata nel linguaggio dei poset, ed alcune sue utili conseguenze.

Siano $(P, \leqslant)$ e $(Q, \leqslant)$ posets. Una funzione C che applica catene di P in sottospazi topologici di $|Q|$ si dirà un *supporto contraibile* da $\Delta(P)$ al poliedro $|Q|$ se:

i) per ogni catena $\sigma \in \Delta(P)$, $C(\sigma)$ è contraibile;

ii) se $\tau, \sigma \in \Delta(P)$ e $\tau \subsetneq \sigma$, allora $C(\tau) \subsetneq C(\sigma)$.

Esempio 4. – *Sia $(P, \leqslant)$ un poset, e sia $p \in P$. Il sottoinsieme*

$$P_{\geqslant p} = \{p' \in P;\ p' \geqslant p\} \quad (P_{\leqslant p} = \{p' \in P;\ p' \leqslant p\})$$

si dice filtro principale generato da p (ideale principale generato da p). La realizzazione geometrica $|P_{\geqslant p}|$ ($|P_{\leqslant p}|$), come sottopoliedro di $|P|$, è un cono sul vertice p, e, quindi, risulta contraibile.

La funzione che applica ogni catena σ di P nel sottopoliedro $|P_{\geqslant \min \sigma}|$ ($|P_{\leqslant \max \sigma}|$) è un supporto contraibile da $\Delta(P)$ a $|P|$.

Siano $(P, \leqslant)$ e $(Q, \leqslant)$ posets. Dato un supporto contraibile C da $\Delta(P)$ a $|Q|$, una funzione continua

$$F : |P| \to |Q|$$

ha supporto C se, per ogni catena σ di P, risulta:

$$F[|\sigma|] \subsetneq C(\sigma).$$

Proposizione 1. – (*Lemma del supporto contraibile*) *Sia C un supporto contraibile da $\Delta(P)$ a $|Q|$. Allora:*

i) esiste una funzione continua $F : |P| \to |Q|$ avente supporto C;

ii) se $F, G : |P| \to |Q|$ sono funzioni continue aventi entrambe supporto C, allora F e G sono omotope.

APPLICAZIONE 1. – *Siano $f, g : P \to Q$ funzioni monotone tali che $f(p) \geqslant g(p)$, per ogni $p \in P$. Allora le realizzazioni geometriche*

$$|f|, \ |g| : |P| \to |Q|$$

sono funzioni continue omotope.

Infatti, considerato il supporto contraibile da $\Delta(P)$ a $|Q|$ così definito:

$$C_g(\sigma) = |Q_{\geqslant \min g(\sigma)}|, \quad \text{per ogni catena } \sigma \text{ di } P,$$

è immediato riconoscere che $|f|$ e $|g|$ hanno entrambe supporto C_g.

APPLICAZIONE 2. – (*Poset conicamente contraibili*).

Un poset P si dice conicamente contraibile su $x_0 \in P$ se esiste un punto $x_0 \in P$ tale che l'estremo superiore $x_0 \vee p$ delle coppie $\{x_0, p\}$ (l'estremo inferiore $x_0 \wedge p$) esista in P, per ogni $p \in P$.

Notiamo che, se P è conicamente contraibile, allora $|P|$ è contraibile. Di fatto è sufficiente osservare che le funzioni

$$f, g : P \to P, \quad f(p) = x_0 \vee p, \quad g(p) = x_0, \ \text{per ogni } p \in P,$$

e la funzione identità 1_P sono funzioni monotone tali che

$$f(p) \geqslant 1_P(p) \ \text{ e } f(p) \geqslant g(p) \ \text{ per ogni } p \in P.$$

Perciò

$$|f| \simeq |1_P| \ \text{ e } \ |f| \simeq |g|,$$

e quindi, per transitività, la funzione identità $|1_P|$ e la funzione costante $|g|$ sono omotope.

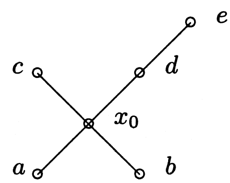
COROLLARIO 1. – *Se P ha massimo* **1** (*ha minimo* **0**), *allora P è conicamente contraibile su* **1** (*su* **0**). *Di conseguenza, $|P|$ è contraibile.*

COROLLARIO 2. – *Sia P un poset. Sia $x_0 \in P$ un suo punto tale che, per ogni $p \in P$, risulti*

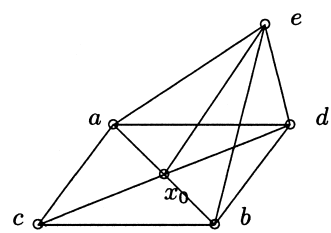
$$p \geqslant x_0 \ \text{ ovvero } \ p \leqslant x_0.$$

Allora P è conicamente contraibile su x_0 e, quindi, $|P|$ è contraibile.

ESEMPIO 5. – *Si consideri il seguente poset P:*

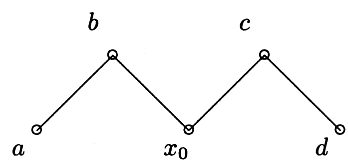


Il complesso di catene $\Delta(P)$ ha dimensione 3, per cui lo spazio euclideo di dimensione minima nel quale sia possibile realizzare geometricamente $\Delta(P)$ è R^3. Ad esempio, il poliedro $|P|$ è rappresentabile in R^3 come segue:

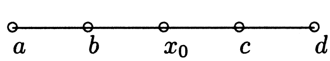


Si noti che, a norma del Corollario 2, il poliedro rappresentato in figura è evidentemente contraibile (di fatto, è un cono sul vertice x_0).

Tuttavia, in generale, se P è un poset conicamente contraibile, la sua realizzazione geometrica $|P|$ non è necessariamente un cono. Ad esempio il seguente poset è conicamente contraibile su x_0:



D'altra parte, la sua realizzazione geometrica, qui rappresentata in R^1,



non è un cono.

4. – La condizione Cohen-Macaulay.

A conclusione di questo primo lavoro, anticipiamo alcune osservazioni (corredate da esempi) il significato delle quali potrà essere pienamente apprezzato durante la lettura del secondo lavoro.

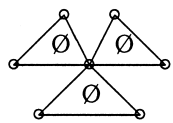
Fondamentalmente, è interessante sapere che ampie classi di poset (assai rilevanti dal punto di vista combinatorio) hanno realizzazione geometrica molto «regolare» e semplicemente classificabile.

A titolo di esempio, descriveremo la classe dei complessi simpliciali *omotopicamente Cohen-Macaulay* (nozione essenzialmente dovuta a D. Quillen, [21]) e vedremo come ampie classi di poset abbiano complesso di catene che risulta omotopicamente Cohen-Macaulay.

4.1. *Bouquet di sfere e poset Cohen-Macaulay.*

Un *p-bouquet di k-sfere* può essere definito come un poliedro costruito mediante p sfere di dimensione k che si «incollano» in uno ed un solo vertice comune.

Ad esempio, la figura seguente rappresenta un 3-*bouquet di* 1-*sfere*:



Notiamo che, considerata la k-sfera S^k, risulta $\chi(S^k)=1+(-1)^k$. Poichè la caratteristica di Eulero è chiaramente additiva sull'unione disgiunta di poliedri, si deduce immediatamente che la caratteristica di Eulero di un p-bouquet di k-sfere vale $1+(-1)^k p$.

Un complesso simpliciale Δ *puro* di dimensione d (cioè tale che tutti i suoi simplessi massimali siano della medesima dimensione d) si dice *omotopicamente Cohen-Macaulay* se la realizzazione geometrica di Δ è omotopicamente equivalente ad un bouquet di d-sfere ed, inoltre, per ogni simplesso $\sigma \in \Delta$ di dimensione k, il complesso simpliciale (detto *link* di σ in Δ)

$$lk_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta;\ \tau \cap \sigma = \emptyset \ \ e \ \ \tau \cup \sigma \in \Delta\}$$

risulta omotopicamente equivalente ad un bouquet di $(d-k-1)$-sfere. Consistentemente, un poset P si dice omotopicamente Cohen-

Macaulay se il suo complesso di catene $\Delta(P)$ è omotopicamente Cohen-Macaulay.

4.2. *Reticoli semimodulari.*

Sia $\mathcal{L}$ un poset che risulti anche un *reticolo* (poset per cui ogni coppia di elementi $\{x, y\}$ ammette sia estremo inferiore $x \wedge y$ che estremo superiore $x \vee y$). Si dice che $\mathcal{L}$ è dotato di *rango* se, per ogni coppia di elementi $x, y \in \mathcal{L}$, $x \leqslant y$, qualsiasi catena massimale avente minimo x e massimo y risulta della medesima cardinalità. Sotto questa ipotesi, possiamo definire *rango* di un elemento $x \in \mathcal{L}$ l'intero

$$r(x) = \sharp\sigma - 1 ,$$

ove σ è una qualsiasi catena massimale avente per minimo il minimo $\mathbf{0}$ di $\mathcal{L}$ e per massimo l'elemento x.

Il reticolo $\mathcal{L}$ si dice *semimodulare* se la condizione «di Grassmann»

$$r(x) + r(y) \geqslant r(x \wedge y) + r(x \vee y)$$

è verificata, per ogni $x, y \in \mathcal{L}$.

I reticoli semimodulari formano una classe amplissima, ed appaiono in modo naturale nei più svariati ambiti della Combinatoria e delle sue applicazioni.

TEOREMA 1 (*Björner, 1980*). – *Sia $\mathcal{L}$ un reticolo semimodulare e denotiamo con $\widehat{\mathcal{L}}$ il poset ottenuto da $\mathcal{L}$ rimuovendo il minimo* $\mathbf{0}$ *ed il massimo* $\mathbf{1}$. *Il poset $\widehat{\mathcal{L}}$ è omotopicamente Cohen-Macaulay.*

ESEMPIO 6. – *Sia V_q^d uno spazio vettoriale di dimensione d sul campo finito $\boldsymbol{F}_q$ a q elementi. Sia $\mathcal{L}(V_q^d)$ il reticolo dei sottospazi di V_q^d, ordinati per inclusione. Allora $\mathcal{L}(V_q^d)$ è ovviamente semimodulare e, quindi, il poset $\widehat{\mathcal{L}}(V_q^d)$ è omotopicamente Cohen-Macaulay. Mediante la teoria delle funzioni di Möbius* (*cfr., ad es.* [1]), *si verifica agevolmente che la caratteristica di Eulero del complesso di catene $\Delta(\widehat{\mathcal{L}}(V_q^d))$ è data dall'intero* $(-1)^d q^{\frac{d(d-1)}{2}} + 1$; *ne conse-*

gue che la realizzazione geometrica $|\widehat{\mathfrak{L}}(V_q^d)|$ *è un poliedro omotopicamente equivalente ad un bouquet di sfere di dimensione* $d-2$, *ed il numero delle sfere di tale bouquet è dato dall'intero* $q^{\frac{d(d-1)}{2}}$.

In conclusione, osserviamo che la proprietà di essere omotopicamente Cohen-Macaulay, a dispetto dell'apparenza, *non* è di natura topologica, bensì di natura combinatoria. Più precisamente, il sussistere o meno di questa proprietà non dipende solo dalla classe di omeomorfismo del poliedro in esame, ma dal particolare complesso simpliciale utilizzato per realizzarlo geometricamente. Un esempio di questa situazione è dato dalla celebre 5-*sfera di Edwards* (cfr., ad es. [10]): questo poliedro realizza geometricamente appunto una 5-sfera, e si ottiene per «doppia sospensione» di un 3-complesso K (detto «sfera di omologia») *non* omotopicamente equivalente ad un bouquet di 3-sfere, ma avente sequenza di omologia isomorfa a quella di una 3-sfera. Questo complesso K compare ovviamente come *link* di un 2-simplesso della sfera di Edwards, contraddicendo perciò la condizione «Cohen-Macaulay omotopica». D'altra parte, la realizzazione geometrica di una k-sfera come bordo di un k-simplesso fornisce sempre, ovviamente, complessi simpliciali omotopicamente Cohen-Macaulay.

È fondamentale ricordare che, a fianco della nozione di complesso omotopicamente Cohen-Macaulay, si ha la nozione di complesso *omologicamente* Cohen-Macaulay, che si ottiene sostituendo alla condizione «omotopicamente equivalente» la condizione «omologicamente equivalente». Già la condizione «Cohen-Macaulay omologica», evidentemente più debole di quella omotopica, risulta assolutamente cruciale nelle applicazioni combinatorie. Di fatto, la condizione «Cohen-Macaulay omologica» fornisce un affascinante esempio di «circuito virtuoso» tra tre apparentemente diverse branche della Matematica: la *Combinatoria*, la *Topologia* e l'*Algebra Commutativa*. Infatti, in virtù di un importante teorema dovuto a G. A. Reisner (1976, [18]), la condizione «Cohen-Macaulay omologica» per un complesso simpliciale Δ è *equivalente* alla classica condizione Cohen-Macaulay (nell'usuale senso dell'algebra commutativa) per il cosiddetto «anello di Reisner-Stanley» del complesso Δ (cfr., ad es. [8]).

Dal punto di vista combinatorio, i complessi ed i poset Cohen-Macaulay godono di una straordinaria ricchezza di proprietà. Storicamente, la evidenza della centralità dei complessi (omologicamente) Cohen-Macaulay si manifestò con la soluzione affermativa (Stanley, 1976 [23]) della celebre «*Upper Bound Conjecture for Spheres*». Attualmente, la «teoria Cohen-Macaulay» costituisce uno dei capitoli più affascinanti e meglio sviluppati della Combinatoria Algebrica (cfr., ad es. [8]).

Infine, ricordiamo che, mentre la condizione Cohen-Macaulay omotopica non è invariante a meno di omeomorfismo, la condizione Cohen-Macaulay omologica lo è; in sintesi, il sussistere o meno della condizione omologica *non* dipende dal particolare complesso simpliciale utilizzato per realizzare geometricamente un poliedro, ma soltanto dalla classe di omeomorfismo del poliedro stesso (cfr., ad es. [7]).

5. – Elementi di Topologia Simpliciale.

In questa sezione di carattere elementare, il Lettore che eventualmente non abbia familiarità con i concetti e risultati basici della Topologia Simpliciale potrà trovare, ci auguriamo, tutti gli elementi atti a rendere agevole la comprensione delle sezioni precedenti. Il Lettore familiare con questa materia è, ovviamente, consigliato di ometterne la lettura. Informalmente, l'idea alla base della topologia simpliciale è quella di descrivere spazi topologici come risultato di un «processo di assemblamento», effettuato secondo ben precise regole, di spazi elementari, detti *simplessi* (punti, segmenti, triangoli, tetraedri, ecc.). Questi assemblamenti sono detti *complessi simpliciali* e gli spazi così rappresentati sono detti *poliedri*.

5.1. *Punti geometricamente indipendenti.*

Un insieme di punti $A=\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ nello spazio vettoriale R^m $(m \geqslant n)$ si dice *geometricamente indipendente* (o, affinemente indipendente) se e solo se i vettori

$$a_1 - a_0,\ a_2 - a_0,\ \ldots,\ a_n - a_0$$

risultano linearmente indipendenti nello spazio vettoriale R^m.

È di fatto immediato riconoscere che sussiste il seguente:

LEMMA 1. – *L'insieme* $A=\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ *è un insieme geometricamente indipendente se e solo se, per ogni scelta degli scalari* t_i, $i=0, 1, \dots, n$, *le condizioni*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad e \quad \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = \underline{0} \in R^m$$

implicano che $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

5.2. *Sottospazi affini generati da punti geometricamente indipendenti.*

Sia $A=\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ un insieme geometricamente indipendente in R^m, $m \geqslant n$.

Notiamo esplicitamente che, in virtù del Lemma 1, questo equivale ad asserire che, per ogni $j=0, 1, \dots, n$, l'insieme della forma

$$\{a_i - a_j;\ i \neq j,\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

risulta linearmente indipendente in R^m.

Grazie a questa osservazione, sia l'*ordine* $a_0, a_1, \dots, a_n$ dei punti di A, sia la conseguente scelta del punto «privilegiato» a_0, risultano *irrilevanti*.

Tuttavia, nel seguito, per semplicità di esposizione, manterremo talvolta la notazione «*ordinata*» $A=\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

Sia $A=\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ un insieme di punti geometricamente indipendenti. L'insieme dei punti $\ll A \gg$ esprimibili nella forma

$$(*) \qquad x = \sum_{i=0}^{n} c_i a_i, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i = 1$$

si dice *sottospazio affine* di R^m *generato dai punti* $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

Si noti che, in virtù del Lemma 1, la rappresentazione $(*)$ di un punto $x \in \ll A \gg$ è evidentemente *unica*. I coefficienti reali c_i, $i = 0, 1, \dots, n$, sono detti *coordinate baricentriche* di x rispetto all'insieme A.

Un punto $x \in R^m$ è esprimibile nella forma $(*)$ se e solo se è esprimibile (evidentemente *in modo unico*) nella forma

$$(*\ *) \qquad x = a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_0), \qquad t_i \in R .$$

Inoltre, si ha

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_0) = \sum_{i=0}^{n} c_i a_i, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i = 1$$

se e solo se

$$t_1 = c_1, \ldots, t_n = c_n, \qquad c_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

5.3. *Trasformazioni pseudoaffini.*

Siano $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset R^m$ e $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_q\} \subset R^p$ due sottoinsiemi geometricamente indipendenti di R^m e R^p, rispettivamente.

Sia $f : A \to B$ una funzione e si consideri l'applicazione lineare F (dal sottospazio vettoriale di R^m generato dai vettori $a_1 - a_0$, $a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ al sottospazio vettoriale di R^p generato dai vettori $b_1 - b_0, b_2 - b_0, \ldots, b_q - b_0$) univocamente determinata dalle condizioni

$$F(a_i - a_0) = f(a_i) - f(a_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Si consideri la applicazione (detta *trasformazione pseudoaffine*)

$$\boldsymbol{A}_f : \ll A \gg \ \to \ \ll B \gg$$

dal sottopospazio affine $\ll A \gg \ \subseteq R^m$ al sottopospazio affine $\ll B \gg \ \subseteq R^p$ così definita:

$$\boldsymbol{A}_f(x) = F(x - a_0) + f(a_0), \qquad x \in \ll A \gg .$$

Di fatto, poichè $x \in \ll A \gg$ può essere scritto, in modo unico, nella forma

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_0)$$

e

$$\boldsymbol{A}_f(x) = F\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_0)\right) + f(a_0) = \sum_{i=1}^{n} t_i(f(a_i) - f(a_0)) + f(a_0),$$

il punto $\boldsymbol{A}_f(x)$ appartiene al sottospazio affine $\ll B \gg$ di R^p generato dai punti $b_0, b_1, \ldots, b_q$.

Essendo $\boldsymbol{A}_f$ composizione di una *applicazione lineare* e di due *traslazioni*, essa è evidentemente una applicazione continua da $\ll A \gg$ a $\ll B \gg$, riguardati come spazi topologici indotti dalle metriche euclidee di R^m e R^p, rispettivamente. Inoltre, $\boldsymbol{A}_f$ risulta un omeomorfismo da $\ll A \gg$ sulla sua immagine se solo se $f : A \to B$ è iniettiva.

Si noti che l'applicazione $\boldsymbol{A}_f$ ammette una elegante rappresentazione, detta *forma chiusa*, in termini di coordinate baricentriche: se

$$x = \sum_{i=0}^{n} c_i a_i, \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i = 1\ ,$$

allora

$$\boldsymbol{A}_f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(a_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i \boldsymbol{A}_f(a_i), \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i = 1\ .$$

In particolare, $\boldsymbol{A}_f$ è l'unica trasformazione pseudoaffine da $\ll A \gg$ a $\ll B \gg$ tale che $\boldsymbol{A}_f(a_i) = f(a_i)$, *per ogni* $i = 0, 1, \ldots, n$.

Ricordiamo che, dalla discussione precedente, risulta chiaro che l'ordine dei punti geometricamente indipendenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$, così come la scelta del punto «privilegiato» a_0, è irrilevante.

In termini formali, abbiamo:

(1) Sia $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ un insieme di punti geometricamente indipendenti in R^m. Un punto $x \in R^m$ appartiene al sottospazio affine generato da A se e solo se x può essere espresso (*in modo unico*) nella forma

$$x = \sum_{a \in A} c_a(x)\, a, \qquad \sum_{a \in A} c_a(x) = 1\ .$$

(2) Consistemente, la trasformazione $\boldsymbol{A}_f$ può essere espressa nel modo seguente:

$$\boldsymbol{A}_f(x) = \boldsymbol{A}_f\Big(\sum_{a \in A} c_a(x)\, a\Big) = \sum_{a \in A} c_a(x)\, f(a), \qquad \sum_{a \in A} c_a(x) = 1\,.$$

5.4. *Simplessi e mappe simpliciali*

La nozione di *mappa simpliciale* viene presentata, in letteratura, in modi diversi, a seconda degli sviluppi che si prevede trarne; in questa esposizione, *intenzionalmente*, adotteremo la definizione «rigida» di Munkres [12], al fine di enfatizzare l'apparente dualismo, ma anche, di fatto, la sinergia tra l'approccio *combinatorio* e l'approccio *topologico*.

Sia $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ un insieme di punti geometricamente indipendenti di R^m, $m \geqslant n$.

L'insieme

$$\sigma = \left\{x = \sum_{i=0}^{n} c_i a_i;\ \sum_{i=0}^{n} c_i = 1,\ c_i \geqslant 0,\ i = 0, 1, \ldots, n\right\}$$

si dice *simplesso* di R^m generato da $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Gli elementi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ si dicono *vertici* del simplesso σ. L'insieme dei vertici di σ verrà denotato con $V(\sigma)$; l'intero n si dice *dimensione* del simplesso σ.

Ricordiamo due fatti fondamentali, seppur elementari, relativi ai simplessi.

i) Il simplesso σ è un *compatto convesso* di R^m. Inoltre σ è l'intersezione di tutti i convessi di R^m contenenti i punti $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

ii) Dati due simplessi σ e τ, essi coincidono se e solo se $V(\sigma) = V(\tau)$. In sintesi, l'insieme dei vertici di un simplesso è univocamente determinato dal simplesso stesso, e viceversa.

Ogni simplesso generato da un sottoinsieme non-vuoto di $V(\sigma)$ si dice *faccia* del simplesso σ. Una faccia si dice *propria* se è diversa da σ; l'unione di tutte le facce proprie di σ, denotata con $Bd(\sigma)$, si dice *bordo* di σ. L'insieme $\sigma - Bd(\sigma)$ si dice *interno* del simplesso σ, e si denota col simbolo $Int(\sigma)$.

Siano σ e τ simplessi di R^m ed R^p, rispettivamente.

Posto $V(\sigma) = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, $V(\tau) = \{b_0, b_1, \dots, b_q\}$, sia

$$f : V(\sigma) \to V(\tau)$$

una applicazione.

Sia $\boldsymbol{A}_f$ la trasformazione pseudoaffine dal sottospazio affine generato da $V(\sigma)$ al sottospazio affine generato da $V(\tau)$ tale che

$$\boldsymbol{A}_f(a_i) = f(a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

o, equivalentemente,

$$\boldsymbol{A}_f\left(\sum_{i=0}^{n} c_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(a_i), \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i = 1 .$$

PROPOSIZIONE 2. – *La restrizione di* $\boldsymbol{A}_f$ *a* σ *induce una applicazione continua e suriettiva da* σ *alla faccia di* τ *generata dall'insieme di vertici* $\{f(a_i); i = 0, 1, \dots, n\} \subseteq V(\tau)$. *Tale applicazione risulta iniettiva se e solo se* f *è iniettiva. In particolare,* $\boldsymbol{A}_f$ *risulta essere un omeomorfismo da* σ *a* τ *se e solo se* f è una biiezione.

L'applicazione ristretta $\boldsymbol{A}_f : \sigma \to \tau$ si dice *mappa simpliciale* indotta dalla *mappa sui vertici f.*

5.5. *Complessi simpliciali e poliedri.*

Nel seguito, diremo *complesso simpliciale* K in R^m una collezione finita di simplessi di uno *stesso* spazio euclideo R^m tale che:

i) ogni faccia di un simplesso in K appartiene a K;

ii) dati σ e δ simplessi in K, se $\sigma \cap \delta \neq \phi$, allora $\sigma \cap \delta$ è un simplesso in K e $\sigma \cap \delta$ è faccia sia di σ che di δ.

ESEMPIO 7. – *Se* σ *è un simplesso di* R^m, *allora la collezione* K *di tutte le sue facce è un complesso simpliciale.*

È importante notare che un complesso simpliciale K in R^m *non è uno spazio topologico*; K è semplicemente un insieme i cui elementi sono simplessi. Tuttavia l'insieme dei punti di R^m che giacciono in almeno un simplesso di K, munito della topologia indotta dalla topologia euclidea di R^m, è uno spazio topologico, detto *poliedro* o *realizzazione geometrica* di K e denotato con $|K|$; si noti che, consistentemente con la precedente notazione, $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset R^m$.

Ad esempio, dato un simplesso σ di R^m, σ non è un complesso simpliciale; tuttavia possiamo formare il complesso simpliciale $K(\sigma)$ costituito da σ e da tutte le sue facce e chiaramente risulta $\sigma = |K(\sigma)|$.

5.6. *Sottocomplessi, vertici e sottopoliedri.*

Dato un complesso simpliciale K, un sottoinsieme L dell'insieme dei simplessi di K si dice *sottocomplesso* se è verificata la seguente condizione: se $\sigma \in L$ *e* τ è una faccia di σ, allora $\tau \in L$.

Ogni simplesso 0-dimensionale del complesso K si dice *vertice*: l'insieme dei vertici di K è un sottocomplesso di K e verrà indicato con il simbolo $V(K)$; consistentemente con la precedente notazione , se σ è un simplesso, allora $V(\sigma) = V(K(\sigma))$.

Dato un sottocomplesso L di K, il poliedro $|L|$ si dice *sottopoliedro* di $|K|$; $|L|$ è un sottospazio compatto di $|K|$.

5.7. *Rappresentazione baricentrica di un poliedro.*

Sia K un complesso simpliciale. Dato un punto $x \in |K|$, si dice *simplesso minimo di* x il simplesso di K così definito:

$$\delta_x = \cap \sigma,$$

ove l'intersezione è estesa a tutti i simplessi $\sigma \in K$ tali che $x \in \sigma$.

PROPOSIZIONE 3. – *Sia* $\sigma \in K$, $x \in R^m$ *con* $x \in |K|$.
Allora $\sigma = \delta_x$ *se e solo se*

$$x = \sum_{v \in V(\sigma)} c_v(x)\, v, \qquad \sum_{v \in V(\sigma)} c_v(x) = 1\,,$$

con $c_v(x) > 0$ *per ogni* $v \in V(\sigma)$.

Sia $\sigma \in K$, $x \in R^m$ con $x \in |K|$. La rappresentazione

$$x = \sum_{v \in V(K)} c_v(x)\, v, \qquad \sum_{v \in V(K)} c_v(x) = 1, \quad \text{con } c_v(x) = 0 \text{ se } v \notin V(\delta_x)$$

si dice *rappresentazione baricentrica del punto* x *rispetto al poliedro* $|K|$. Chiaramente, a meno di termini nulli, la rappresentazione baricentrica di x rispetto a K coincide con la rappresentazione baricentrica rispetto al simplesso minimo δ_x ed è quindi unica; i coefficienti $c_v(x)$ si dicono *coordinate baricentriche del punto* x rispetto al poliedro $|K|$.

LEMMA 2. – *Sia X spazio topologico. Una funzione* $f : |K| \to X$ *è continua se e solo se le sue restrizioni* $f_{/\sigma}$ *sono continue, per ogni simplesso* $\sigma \in K$.

DIMOSTRAZIONE. – Una implicazione è ovvia.

Sia ora C un chiuso di X. Poichè

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{\sigma \in K} (f^{-1}(C) \cap \sigma) = \bigcup_{\sigma \in K} (f_{/\sigma})^{-1}(C)$$

e le restrizioni $f_{/\sigma}$ sono continue, allora $f^{-1}(C)$ è unione finita di chiusi e quindi è chiuso. Perciò la funzione f è continua su $|K|$.

5.8. *Schema dei vertici.*

Sia K un complesso simpliciale, $V(K)$ il suo insieme dei vertici. La collezione di sottoinsiemi di $V(K)$ così definita:

$$\vartheta(K) = \{V(\delta);\ \delta \in K\}$$

si dice *schema dei vertici* del complesso K.

In altri termini un sottoinsieme di $V(K)$ è elemento di $\vartheta(K)$ se e solo se genera un simplesso in K.

PROPOSIZIONE 4. – *Siano K ed H complessi simpliciali e sia*

$$f : V(K) \to V(H)$$

una funzione tale che

$$f[A] \in \vartheta(H) \ \ per\ \ ogni\ \ A \in \vartheta(K).$$

Allora f si estende canonicamente alla funzione continua

$$\boldsymbol{G}_f\colon\ |K| \to |H|$$

ponendo

$$\boldsymbol{G}_f(x) = \sum_{v \in V(K)} c_v(x)\, f(v),$$

ove

$$x = \sum_{v \in V(K)} c_v(x)\, v$$

è la rappresentazione baricentrica del punto $x \in |K|$.

DIMOSTRAZIONE. – La applicazione $\boldsymbol{G}_f$ è ben definita, per l'unicità della rappresentazione baricentrica.

Sia ora δ un simplesso di K, da cui $f[V(\delta)] \in \vartheta(H)$. Sia τ il simplesso di K generato dai vertici di $f[V(\delta)]$. Per il Lemma 2 la restrizione di $\boldsymbol{G}_f$ a δ agisce come segue:

$$\boldsymbol{G}_f(x) = \sum_{v \in V(\delta)} c_v(x)\, f(v),$$

per ogni $x \in \delta$.

Perciò tale restrizione è una mappa simpliciale (suriettiva) da δ a τ ed, in quanto tale, risulta continua. Dal Lemma 2, $\boldsymbol{G}_f$: $|K| \to |H|$ è continua.

La applicazione $\boldsymbol{G}_f$ è detta *mappa simpliciale* da $|K|$ a $|H|$ indotta da f. È immediato verificare che la composizione di mappe simpliciali è ancora una mappa simpliciale.

Infine si ha:

COROLLARIO 3. – *Siano* K *ed* H *complessi simpliciali. Sia* $f : V(K) \to V(H)$ *una funzione biiettiva tale che*

$$A \in \vartheta(K) \text{ se e solo se } f[A] \in \vartheta(H).$$

Allora la mappa simpliciale $\boldsymbol{G}_f$ *indotta da* f *è un omeomorfismo da* $|K|$ *a* $|H|$.

In questo caso diremo che $\boldsymbol{G}_f$ è un *omeomorfismo simpliciale* e che $|K|$ e $|H|$ *sono simplicialmente omeomorfi.* Chiaramente, la relazione *essere simplicialmente omeomorfi* è una relazione di equivalenza.

5.9. *Complessi astratti e complessi geometrici.*

Sia S un insieme finito. Un *complesso simpliciale astratto* $\Gamma(S)$ su S

è una collezione di sottoinsiemi non-vuoti di S che soddisfa la seguente condizione:

$$se\ A_1 \subseteq A_2 \in \Gamma(S), \quad allora\ A_1 \in \Gamma(S).$$

Ad esempio, lo *schema dei vertici* $\vartheta(K)$ di un complesso simpliciale K in R^m è un complesso simpliciale astratto $\Gamma(V(K))$, detto *astrazione* di K.

Dualmente, dato un complesso simpliciale astratto $\Gamma(S)$, un complesso simpliciale K in R^m si dice *realizzazione* di $\Gamma(S)$, ed il poliedro associato $|K|$ si dice *realizzazione geometrica* di $\Gamma(S)$, se e solo se esiste una biiezione

$$f : S \to V(K)$$

tale che sia verificata la condizione:

$$f[A] \in \vartheta(K)\ se\ e\ solo\ se\ A \in \Gamma(S), \quad per\ ogni\ A \subseteq S.$$

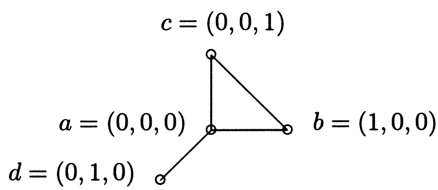
PROPOSIZIONE 5. – *Ogni complesso simpliciale astratto $\Gamma(S)$ con $k+1$ vertici ammette una realizzazione in R^h, $h \geqslant k$. Inoltre, se K_1 e K_2 sono realizzazioni di $\Gamma(S)$, allora esiste un omeomorfismo simpliciale dal poliedro $|K_1|$ al poliedro $|K_2|$.*

ESEMPIO 8. – *Consideriamo il complesso simpliciale astratto*

$\Gamma(\{a, b, c, d\}) =$

$$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\},\{a, d\},\{a, b, c\}\}.$$

Una sua realizzazione geometrica può essere rappresentata in in R^3 come segue:



Due complessi simpliciali astratti $\Gamma(S)$ e $\Gamma(T)$ si dicono *isomorfi* se esiste una biiezione $h : S \rightarrow T$ tale che

$$h[A] \in \Gamma(T) \text{ se e solo se } A \in \Gamma(S), \quad \text{per ogni } A \subseteq S\,.$$

PROPOSIZIONE 6. – *Siano $\Gamma(S)$ e $\Gamma(T)$ complessi simpliciali isomorfi e siano K e H loro realizzazioni. Allora i poliedri $|K|$ e $|H|$ sono simplicialmente omeomorfi.*

Viceversa, dati due complessi simpliciali K e H, se $|K|$, $|H|$ sono simplicialmente omeomorfi, allora i complessi simpliciali astratti $\vartheta(K)$ e $\vartheta(H)$ sono isomorfi.

In generale, dati due complessi simpliciali astratti $\Gamma(S)$ e $\Gamma(T)$ una funzione

$$f : S \rightarrow T$$

si dice *applicazione simpliciale formale* se

$$A \in \Gamma(S) \quad \text{implica} \quad f[A] \in \Gamma(T)\,.$$

Dalla precedente discussione, segue che, date due realizzazioni geometriche $|\Gamma(S)|$ e $|\Gamma(T)|$, l'applicazione simpliciale formale f definisce canonicamente una mappa simpliciale

$$|f| : |\Gamma(S)| \rightarrow |\Gamma(T)|\,.$$

5.10. *Funzioni omotope e spazi omotopicamente equivalenti.*

Dati due spazi topologici X e Y, una applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *omeomorfismo* se e solo se f è biiettiva e sia f che la sua inversa f^{-1} risultano continue. Due spazi X ed Y si dicono *omeomorfi*, e scriveremo $X \cong Y$, se esiste almeno un omeomorfismo da X ad Y; ovviamente, la relazione di omeomorfismo è una relazione di equivalenza su ogni insieme di spazi topologici.

Due funzioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ si dicono *omotope* se esiste una funzione continua

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tale che

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x) \qquad \text{per ogni } x \in X\,.$$

La funzione F si dice *omotopia* e scriveremo $f \simeq g$ per indicare che f e g sono omotope.

PROPOSIZIONE 7. – *Sia X uno spazio topologico. Sia Y un sottospazio topologico di R^m, e siano $f, g : X \to Y$ due funzioni. Se, per ogni $x \in X$, $f(x)$ e $g(x)$ possono essere congiunti da un segmento lineare in Y, allora $f \simeq g$.*

Due spazi X ed Y si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \simeq 1_X$ e $f \circ g \simeq 1_Y$, ove 1_X e 1_Y denotano le funzioni identiche su X ed Y, rispettivamente. La relazione *essere omotopicamente equivalenti* è una relazione di equivalenza su ogni insieme di spazi e la coppia (f, g) si dice «*coppia di omotopia*» tra X e Y. Se X ed Y sono omotopicamente equivalenti, scriveremo $X \simeq Y$. Ovviamente, se $X \cong Y$, allora $X \simeq Y$, ma non viceversa: la condizione di equivalenza omotopica è perciò strettamente più debole della condizione di equivalenza per omeomorfismo.

5.11. *Spazi contraibili e supporti contraibili.*

Uno spazio topologico X si dice *contraibile* se e solo se X è omotopicamente equivalente ad un punto; si riconosce immediatamente che uno spazio X è contraibile se e solo se esiste una *funzione costante* $c : X \to X$ tale che $c \simeq 1_X$.

ESEMPIO 9. – *Ogni simplesso σ di R^m è contraibile. Infatti, scelto un suo vertice $v \in V(\sigma)$ e considerata la funzione costante $c : X \to X$, $c(x) = v$, $x \in X$, la funzione*

$$F : \sigma \times [0, 1] \to \sigma \quad F(x, t) = v + t(x - v), \qquad x \in \sigma,\ t \in [0, 1]$$

è una omotopia tale che

$$F(x, 0) = c(x) = v \quad e \quad F(x, 1) = 1_X(x) = x, \qquad per\ ogni\ x \in X.$$

DEFINIZIONE 1. – *Siano K un complesso simpliciale, X uno spazio topologico. Una funzione C che applica simplessi di K in sottospazi di X si dice un «supporto contraibile» da K ad X se:*

i) per ogni simplesso σ di K, $C(\sigma)$ è un sottospazio contraibile di X;

ii) se τ è una faccia di $\sigma \in K$, allora $C(\tau) \subseteq C(\sigma)$.

DEFINIZIONE 2. – *Diremo che una funzione continua $f\colon |K| \to X$ ha supporto C se, per ogni simplesso σ in K, risulta*

$$f[\sigma] \subseteq C(\sigma)\,.$$

PROPOSIZIONE 8. – (*Lemma del supporto contraibile*)
Sia C un supporto contraibile da K ad X. Allora esiste almeno una funzione continua $f\colon |K| \to X$ avente supporto C. Inoltre, se $f, g\colon |K| \to X$ sono funzioni continue aventi entrambe supporto C, allora f e g sono omotope.

ESEMPIO 10. – *Sia K un complesso simpliciale in R^m e sia $v \in V(K)$ un suo vertice. Diremo che K è un CONO su v se, per ogni simplesso $\sigma \in K$, il simplesso generato dai vertici di σ e da v (denotato, per brevità e con abuso di notazione, con il simbolo $v \cup \sigma$) è ancora un simplesso in K; consistentemente, diremo anche che il poliedro $|K|$ è un CONO sul vertice v.*

Applicando il Lemma del supporto contraibile, verifichiamo che $|K|$ è uno spazio contraibile. Di fatto, è sufficiente osservare che la funzione C che applica ogni simplesso $\sigma \in K$ nel simplesso $v \cup \sigma \subseteq R^m$ è un supporto contraibile da K ad R^m; inoltre, sia la funzione identità $1_{|K|}\colon |K| \to R^m$, sia la funzione costante $c\colon |K| \to R^m$, $c(x) = v$, per ogni $x \in |K|$, sono funzioni continue aventi entrambe supporto contraibile C. Perciò $1_{|K|} \simeq c$ e quindi la realizzazione geometrica $|K|$ del cono K risulta contraibile.

5.12. *La Caratteristica di Eulero.*

Sia $|K|$ un poliedro, realizzazione geometrica del complesso simpliciale K, e sia n la dimensione di K, vale a dire la massima dimensione di un simplesso in K.

Si definisce *caratteristica di Eulero* del poliedro $|K|$ l'intero così definito:

$$\chi(|K|) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_i,$$

ove, per definizione,

$$s_i = \sharp\{\sigma \in K;\ \sigma \text{ simplesso di dimensione } i\}.$$

Inoltre, si definisce *caratteristica di Eulero ridotta* del poliedro $|K|$ l'intero:

$$\chi_0(|K|) = \chi(|K|) - 1 .$$

Ricordiamo che la caratteristica di Eulero è un invariante *topologico*; in termini formali, se $|K_1|$ e $|K_2|$ sono poliedri omeomorfi, allora $\chi(|K_1|) = \chi(|K_2|)$.

Di più, la caratteristica di Eulero è un invariante *omotopico*; in termini formali, se $|K_1|$ e $|K_2|$ sono poliedri omotopicamente equivalenti, allora $\chi(|K_1|) = \chi(|K_2|)$.

ESEMPIO 11. – *Se* $|K|$ *è contraibile, allora* $\chi(|K|)=1$ *e* $\chi_0(|K|)=0$.

Infine, ricordiamo la cosiddetta *Formula di Eulero-Poincarè*:

PROPOSIZIONE 9. – *Sia* $(H_n(|K|))_{n\in N}$ *la successione dei gruppi di omologia del poliedro* $|K|$. *Sussiste l'identità:*

$$\chi(|K|) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \beta_i,$$

ove, per definizione:

$$\beta_i = rank(H_i(|K|)), \quad per\ ogni\ \ i \in N .$$

Gli interi naturali β_i sono detti *numeri di Betti*. Dalla Proposizione 9 segue immediatamente che la caratteristica di Eulero è anche un invariante *omologico*. Ricordiamo inoltre che la condizione $|K_1| \simeq |K_2|$ implica che $H_i(|K_1|) \cong H_i(|K_2|)$ *per ogni* i.

Riepilogando, abbiamo:

$$|K_1| \cong |K_2| \Rightarrow |K_1| \simeq |K_2| \Rightarrow$$
$$H_i(|K_1|) \cong H_i(|K_2|)\ \forall i \Rightarrow \chi(|K_1|) = \chi(|K_2|).$$

Tuttavia, in generale, non sussistono le implicazioni inverse. In simboli:

$$\chi(|K_1|) = \chi(|K_2|) \not\Rightarrow H_i(|K_1|) \cong H_i(|K_2|)\ \forall i \not\Rightarrow$$
$$|K_1| \simeq |K_2| \not\Rightarrow |K_1| \cong |K_2|.$$

OSSERVAZIONE 4. – *Come appena osservato, l'invariante combinatorio/topologico «caratteristica di Eulero» in generale non classifica, nè per equivalenza omotopica nè tantomeno per omeomorfismo, i poliedri.*

Tuttavia, per una classe particolare ma assai rilevante di poliedri, questo fatto è essenzialmente vero: le superficie (*o,* 2-*varietà*) *connesse e compatte* (*cfr., ad as.* [11]). *Per semplicità, ci limitiamo a menzionare il risultato relativo alle superficie senza bordo, sebbene un risultato simile sussista anche nel caso delle* 2-*varietà con bordo* (*cfr., ad es.* [11], *pag.* 108).

TEOREMA 2. – *Siano S_1 ed S_2 superficie connesse, compatte e senza bordo. Allora S_1 ed S_2 sono omeomorfe se e solo se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ ed entrambe orientabili oppure non orientabili.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. AIGNER, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, 1978.

[2] J. W. ALEXANDER, *The combinatorial theory of complexes*, Ann. of Math., **31** (1930), 292-320.

[3] P. S. ALEKSANDROV, *Diskrete Räume*, Mat. Sbornik (N.S.), **2** (1937), 501-518.

[4] P. S. ALEKSANDROV, *Topologia Combinatoria*, Trad. Italiana di L. Lombardo Radice, Einaudi, Torino, 1957.

[5] A. BJÖRNER, *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc., **260** (1980), 150-183.

[6] A. BJÖRNER, *Homotopy types of posets and lattice complementation*, J. Combin. Theory (A), **30** (1981), 90-100.

[7] A. BJÖRNER, *Topological Methods*, *in* Handbook of Combinatorics, vol. II (R. L. Graham, M. Grotschel, L. Lovasz, Eds.), pp. 1821-1872, North-Holland, Amsterdam, 1995.

[8] A. BJÖRNER - A. GARSIA - R. P. STANLEY, *An introduction to Cohen-Macaulay partially ordered sets*, *in* «Ordered Sets» (I. Rival, Ed.) pp. 583-615, Reidel, Dordrecht/Boston, 1982.

[9] M. M. COHEN, *A Course in Simple-Homotopy Theory*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 1973.

[10] R. J. DAVERMANN, *Decomposition of Manifolds*, Academic Press, 1986.

[11] L. C. KINSEY, *Topology of Surfaces*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer, 1993.

[12] J. FOLKMAN, *The homology groups of a lattice*, J. Math. Mech., **15** (1966), 631-636.

[13] H. LAKSER, *The homology of a lattice*, Disc. Math., **1** (1971), 187-192.

[14] J. MATHER, *Invariance of the homology of a lattice*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 1120-1124.

[15] C. R. F. MAUNDER, *Algebraic Topology*, Van Nostrand, 1970.

[16] J. R. MUNKRES, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.

[17] O. ORE, *Galois connections*, Trans. Amer. Math. Soc., **55** (1944), 493-513.

[18] G. A. REISNER, *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Adv. in Math., **21** (1976), 30-49

[19] G.-C. ROTA, *On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Mòbius functions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **2** (1964), 340-368.

[20] D. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory, I*, *in* «Algebraic K-Theory, 1», Lecture Notes in Mathematics, No. 341, pp. 85-147, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[21] D. QUILLEN, *Homotopy properties of posets of non-trivial p-subgroups of a group*, Advances in Math., **28** (1978), 101-128.

[22] H. SEIFERT - W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Liepzig, 1934.

[23] R. P. STANLEY, *The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings*, Studies in Appl. Math., **54** (1975), 135-142.

[24] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics. Volume I*, Wadsworth and Brooks, 1986.

[25] J. W. WALKER, *Homotopy Type and Euler Characteristic of Partially Ordered sets*, Europ. J. Combinatorics, **2** (1981), 373-384.

[26] J. H. C. WHITEHEAD, *Simplicial spaces, nucleii and m-groups*, Proc. Lond. Math. Soc., **42** (1939), 243-327.

A. Brini, University of Bologna, Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna, Italy