
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ALESSANDRO ANDRETTA

I teoremi di absolutezza in teoria degli insiemi: seconda parte

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 6-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2003), n.3, p. 489–507.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_3_489_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_3_489_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

I teoremi di absolutezza in teoria degli insiemi: seconda parte

ALESSANDRO ANDRETTA

Sommario. – *Questa è la seconda parte dell'articolo espositivo [A]. Qui vedremo come sia possibile utilizzare il forcing e gli assiomi forti dell'infinito per dimostrare nuovi teoremi sui numeri reali.*

Nella parte I del presente articolo [A] abbiamo visto come la teoria Zermelo-Fraenkel con l'assioma di scelta, **ZFC**, descrive l'universo degli insiemi V . Abbiamo visto molte questioni provenienti da varie parti della matematica che non sono decidibili sulla base degli assiomi di **ZFC**. Le tecniche usate per dimostrare i risultati di indipendenza sono sostanzialmente due: l'universo L dei costruibili (e le sue generalizzazioni) e il *forcing*. Lo studio di queste tecniche ci permette di dimostrare nuovi risultati sui numeri naturali. Infatti abbiamo visto che se σ è un enunciato aritmetico (cioè che parla solo di numeri naturali) e se φ è un qualunque enunciato la cui coerenza può essere stabilita mediante la costruibilità o il *forcing* e se **ZFC** + φ dimostra σ , allora σ è già dimostrabile in **ZFC**. In questa seconda parte vedremo come sia possibile, sotto opportune ipotesi, generalizzare questi argomenti ad enunciati σ che parlano di numeri reali.

Benché la parte I e la parte II possano essere lette indipendentemente, esse formano un unico articolo. Per questo motivo abbiamo deciso di usare, in questa seconda parte, una enumerazione delle sezioni, formule e teoremi, che prosegue quella della parte I.

6. – Insiemi Boreliani e proiettivi.

In analisi, la maggior parte degli argomenti richiede la possibilità di approssimare un oggetto mediante successioni e l'esistenza di

una metrica completa che ci garantisca che le approssimazioni (cioè le successioni di Cauchy) convergano ad un limite. È naturale quindi restringere l'attenzione agli spazi separabili metrici completi — questi sono noti come *spazi Polacchi*. Per esempio $\mathbb{R}^n$, gli spazi di Banach separabili, lo spazio di Baire ${}^\omega\omega$, lo spazio di Cantor ${}^\omega 2$ sono Polacchi. La teoria descrittiva degli insiemi è lo studio dei sottoinsiemi «definibili» di uno spazio Polacco. «Definibile» in questo contesto significa ragionevolmente semplice, per esempio, aperto, chiuso, Boreliano, proiettivo, etc., ma vedremo tra poco che questa terminologia è consistente col nostro uso precedente nell'equazione (4) nella parte I. Ricordiamo che la famiglia $\mathbf{B}(X)$ dei *Boreliani* di uno spazio Polacco X è la più piccola σ -algebra contenente gli aperti di X . Gli insiemi *proiettivi* si ottengono dai Boreliani prendendo ripetute immagini continue e complementi. I più semplici insiemi proiettivi sono gli insiemi *analitici* cioè le immagini continue degli spazi Polacchi: se X è Polacco

$$\Sigma_1^1(X) := \{f(Y) \mid f: Y \rightarrow X \text{ continua e } Y \text{ Polacco}\}$$

è la famiglia dei sottoinsiemi analitici di X . Il complementare di un analitico si dice *coanalitico* e

$$\Pi_1^1(X) := \{X \setminus A \mid A \in \Sigma_1^1(X)\}$$

è la famiglia dei coanalitici di X . In generale,

$$(9) \quad \begin{aligned} \Sigma_{n+1}^1(X) &:= \{f(A) \mid f: Y \rightarrow X \text{ continua, } Y \text{ Polacco e } A \in \Pi_n^1(X)\} \\ \Pi_{n+1}^1(X) &:= \{X \setminus A \mid A \in \Sigma_{n+1}^1(X)\}. \end{aligned}$$

È immediato verificare che $\mathbf{B}(X) \subseteq \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X)$ e per il teorema di Souslin [Ke, Teorema 14.11] vale l'uguaglianza. Inoltre $\Sigma_n^1(X) \cup \Pi_n^1(X) \subseteq \Sigma_{n+1}^1(X) \cap \Pi_{n+1}^1(X)$ e se X è più che numerabile le inclusioni sono strette. I sottoinsiemi *proiettivi* di X sono gli elementi di $\bigcup_n \Sigma_n^1(X) = \bigcup_n \Pi_n^1(X)$. L'indice n nel simbolo Σ_n^1 indica che si deve applicare n volte l'operazione di immagine continua, mentre l'indice 1 è usato per distinguere la gerarchia proiettiva da quella Boreliana dei $\Sigma_n^0(X)$ e $\Pi_n^0(X)$, dove $\Sigma_1^0(X)$ sono gli aperti di X , $\Pi_1^0(X)$ i chiusi, $\Sigma_2^0(X)$ gli F_σ , $\Pi_2^0(X)$ i G_δ , etc. La maggior parte degli insiemi dell'analisi sono proiettivi — diamo qualche esempio di sottoinsieme

proiettivo dello spazio Polacco $C([0, 1])$ delle funzioni continue con la metrica del sup, rimandando il lettore a [Ke] per una trattazione esaustiva:

- $\{f \in C([0, 1]) \mid \exists g \in C([0, 1]) \ f = g \circ g\}$ è Σ_1^1 .
- $\{f \mid \forall x \in [0, 1] \ f'(x) \text{ esiste}\}$ è Π_1^1 , mentre $C^1([0, 1])$ è Borel.

- L'insieme delle funzioni che soddisfano il teorema di Rolle è un Σ_1^1 ,

$$\{f \mid \forall a, b \in [0, 1] (a < b \ \& \ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) \ f'(c) = 0)\} \in \Sigma_1^1$$

mentre quelle che soddisfano il teorema del valor medio formano un Π_2^1 ,

$$\left\{f \mid \forall a, b \in [0, 1] \left(a < b \Rightarrow \exists c \in (a, b) \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \right\} \in \Pi_2^1.$$

Quest'ultimo risultato, dovuto a H. Woodin, è abbastanza sorprendente dato che le dimostrazioni dei teoremi di Rolle e del valor medio sono essenzialmente identiche.

Due spazi Polacchi più che numerabili X e Y sono sempre Borel-isomorfi, ovvero c'è una biezione $f: X \rightarrow Y$ che è Borel (cioè $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X)$, per ogni aperto $U \subseteq X$) e tale che $f^{-1}: Y \rightarrow X$ è pure Borel. Nella definizione di Σ_n^1 le funzioni f possono essere prese Boreliane e le varie classi Σ_n^1 e Π_n^1 sono invarianti per isomorfismi Boreliani, cioè se $f: X \rightarrow Y$ è un isomorfismo Boreliano tra spazi Polacchi, $A \in \Sigma_n^1(X) \Leftrightarrow f(A) \in \Sigma_n^1(Y)$. Per questi motivi, in teoria degli insiemi $\mathbb{R}$ denota indistintamente lo spazio di Baire ${}^\omega\omega$, lo spazio di Cantor ${}^\omega 2$ e l'usuale retta Euclidea $(-\infty, +\infty)$ usata in analisi. Benché semplice a definirsi, il concetto di insieme proiettivo genera facilmente enunciati indipendenti. Per esempio, si dimostra in ZFC che ogni Σ_1^1 (e quindi ogni Π_1^1) è misurabile secondo ogni misura Boreliana, ma l'analogo enunciato per Σ_2^1 è indipendente da ZFC: è possibile costruire un modello via *forcing* in cui tutti i Σ_2^1 sono misurabili e d'altra parte L soddisfa «c'è un sottoinsieme Σ_2^1 di $\mathbb{R}$ che non è Lebesgue misurabile.»

Identificando $\mathbb{R}$ con

$$V_{\omega+1} = \wp(V_\omega) \approx \wp(\omega) \approx {}^\omega 2,$$

dove $\approx$ indica la relazione di equipotenza, è possibile dimostrare che gli insiemi proiettivi sono tutti e soli i sottoinsiemi di $V_{\omega+1}$ in $\text{Def}(V_{\omega+1})$: infatti un insieme Σ_n^1 è definibile mediante una formula che comincia con n blocchi alternati di quantificatori dello stesso tipo, il primo dei quali è di tipo esistenziale, seguita da una formula dove tutti i rimanenti quantificatori (se ce ne sono) variano su V_ω . Per esempio $A \subseteq V_{\omega+1}$ è Σ_3^1 se e solo se

$$x \in A \Leftrightarrow$$

$$\exists y_1 \dots y_n \in V_{\omega+1} \forall z_1 \dots z_m \in V_{\omega+1} \exists w_1 \dots w_h \in V_{\omega+1} \varphi(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}, \vec{p})$$

dove $\vec{p} = p_1, \dots, p_j \in V_{\omega+1}$, $\varphi(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}, \vec{p})$ è della forma

$$\mathbf{Q}_1 u_1 \in V_\omega \dots \mathbf{Q}_k u_k \in V_\omega \psi(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}, \vec{p}, \vec{u}),$$

ψ è priva di quantificatori e $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_k$ sono i quantificatori $\exists$ o $\forall$. Poiché è possibile codificare due elementi di $V_{\omega+1}$ con un solo elemento, i quantificatori nei vari blocchi possono essere contratti in un singolo quantificatore e quindi

$$(10) \quad x \in A \Leftrightarrow \Psi(x, p)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \forall z \exists w \mathbf{Q}_1 u_1 \in V_\omega \dots \mathbf{Q}_k u_k \in V_\omega \psi'(x, y, z, w, p, \vec{u}))^{V_{\omega+1}}.$$

(Ovviamente se A fosse Π_3^1 i tre quantificatori « $\exists y \forall z \exists w$ » dovrebbero essere sostituiti con « $\forall y \exists z \forall w$ ».) La formulazione di insieme proiettivo in (10) qui sopra è utile per la teoria degli insiemi, ma scomoda per le applicazioni all'analisi. Ma sfruttando nuovamente il fatto che tutti gli spazi Polacchi più che numerabili sono Borel-isomorfi, un sottoinsieme proiettivo (per esempio Σ_3^1) A di uno spazio Polacco X è della forma

$$(11) \quad x \in A \Leftrightarrow \Psi(x, p)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in Y \forall z \in Z \exists w \in W (x, y, z, w, p) \in B$$

dove Y, Z, W, P sono spazi Polacchi, $p \in P$ e $B \subseteq X \times Y \times Z \times W \times P$ è Borel. Una formula $\Psi(x, p)$ come in (10) o in (11) si dice *proiettiva*

— ogni applicazione in (9) di una funzione continua corrisponde ad una quantificazione esistenziale sui reali in (10) e (11).

La classificazione degli insiemi proiettivi può essere estesa alle *formule proiettive* cioè formule relativizzate a $V_{\omega+1}$ ed in questo caso useremo i caratteri Σ_n^1 e Π_n^1 al posto degli analoghi in grassetto : per esempio la formula $\Psi(x, p)$ in (10) è Σ_3^1 e la definizione di formula Σ_n^1 e Π_n^1 segue lo schema ovvio. Quindi A è Σ_n^1 se e solo se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, p)\}$, con $p \in \mathbb{R}$ e $\varphi(x, p)$ una formula Σ_n^1 . La maggior parte degli enunciati in analisi classica sono proiettivi. Per esempio, se $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ è una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, allora la formula $\varphi(F, x_0, y_0)$ che asserisce l'esistenza di una soluzione locale al problema di Cauchy dato da F e (x_0, y_0) , cioè $\exists \varepsilon > 0 \exists f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} f'(x) = F(x, f(x)) & \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è Σ_1^1 ed il teorema di Cauchy-Peano è un enunciato Π_2^1 . L'Ipotesi di Riemann

$$(12) \quad \forall w \in \mathbb{C} \left(\zeta(w) = 0 \ \& \ 0 < \Re(w) < 1 \Rightarrow \Re(w) = \frac{1}{2} \right),$$

dove $\zeta(w)$ è il prolungamento analitico di $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-w}$, è Π_1^1 . In questo caso siamo stati un po' generosi, dato che ci sono formulazioni equivalenti (in ZFC) di (12) che sono enunciati aritmetici — si veda [D, p. 335].

Nella prossima sezione utilizzeremo le formule proiettive per dimostrare risultati di assolutezza.

7. – I teoremi di assolutezza.

Torniamo allo studio dell'assolutezza tra modelli. Supponiamo M ed N siano strutture transitive di (un frammento finito sufficientemente grande di) ZFC e supponiamo M e N abbiano gli stessi reali. Allora $V_{\omega+1}^M = V_{\omega+1}^N$ e quindi M ed N hanno gli stessi sottoinsiemi definibili di $V_{\omega+1}$, cioè gli stessi insiemi proiettivi. Sfruttando il fatto

che il *forcing* $\mathbf{P}_3$ (introdotto nella sezione 5 nella parte I) non aggiunge reali otteniamo il seguente

TEOREMA 3. — *Se σ è un enunciato proiettivo allora*

$$\text{ZFC} + \text{CH} \vdash \sigma \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \sigma.$$

Questo risultato dipende dalla specifica tecnica usata — il *forcing* $\mathbf{P}_3$ — per dimostrare la consistenza relativa di CH: anche l'universo costruibile L prova la consistenza relativa dell'ipotesi del continuo, ma non è detto che V ed L soddisfino gli stessi enunciati proiettivi, come vedremo tra poco.

Il Teorema 3 è stato utilizzato più volte in matematica. Per esempio in [AL] e [CFW] si utilizza un lemma di G. Mokobodzki in teoria della misura (lemma la cui dimostrazione usa CH) per dimostrare dei teoremi di teoria ergodica. Essendo questi teoremi degli enunciati proiettivi, essi sono dimostrabili in ZFC. Tuttavia di questi risultati non è nota alcuna dimostrazione «puramente analitica», cioè che non faccia uso del Teorema 3 o di altri risultati di teoria degli insiemi.

I risultati precedenti ed in particolare il Teorema 3, lasciano aperto il problema dell'assolutezza delle formule proiettive tra strutture transitive arbitrarie. Per esempio:

- (i) È vero che V ed L hanno gli stessi insiemi proiettivi?
- (ii) È vero che V ed L soddisfano gli stessi enunciati proiettivi?

(iii) È possibile dimostrare l'analogo del Teorema 3 se sostituiamo CH con la sua negazione?

Supponiamo $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ così che $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^L$. Allora i singoletti $\{x\}$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^L$ sono dei chiusi (e quindi dei proiettivi) che appartengono a V ma non ad L . Per un teorema di Addison la formula

$$\varphi(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \cap L$$

è Σ_2^1 e quindi $\exists x \in \mathbb{R} (x \notin L)$ è un enunciato Σ_3^1 vero in V e falso in L . Quindi se $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ allora nessuna delle (i), (ii) e (iii) è vera.

L'esempio qui sopra mostra che le formule Σ_3^1 non sono necessa-

riamente assolute tra strutture transitive. Tuttavia vale il seguente fondamentale teorema di assolutezza di Shoenfield — per una dimostrazione si rimanda il lettore a [Ka, Teorema 13.15].

TEOREMA 4 (Shoenfield). — *Supponiamo $M \subseteq N$ strutture transitive che soddisfano un frammento sufficientemente grande di ZF. Sia $\varphi(x)$ una formula Σ_1^1 . Allora per ogni $x \in \mathbb{R} \cap M$*

$$\varphi^M(x) \Leftrightarrow \varphi^N(x).$$

Inoltre se $\aleph_1^N \subseteq M$, allora l'equivalenza vale anche per formule Σ_2^1 .

Il teorema di assolutezza di Shoenfield è uno degli strumenti standard nell'arsenale di ogni insiemista. Come nel caso del Teorema 3, esso può essere usato per dimostrare nuovi risultati o per dare una dimostrazione più sintetica di risultati già noti, a patto che i risultati in questione siano combinazioni booleane di enunciati Σ_2^1 . (Se φ è Π_2^1 allora $\neg \varphi$ è Σ_2^1 e quindi l'assolutezza di $\neg \varphi$ implica l'assolutezza di φ .) Se, per esempio, σ è Σ_2^1 (o combinazione booleana di enunciati Σ_2^1) e $\text{ZFC} + V = L \vdash \sigma$, allora σ è già dimostrabile in ZF: infatti lavorando in ZF possiamo costruire l'universo costruibile L (si veda la sezione 4 nella parte I) e dato che σ^L vale e $L \subseteq V$, concludiamo che σ è vero. In un certo senso, l'utilizzo dei teoremi di assolutezza è analogo all'uso del calcolo dei residui per valutare un integrale definito: come il passaggio da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ci consente di calcolare l'integrale in modo più agevole, così come il passaggio ad un sottomodello o ad un'estensione generica ci consente di stabilire più facilmente nuovi risultati, che quindi devono valere nel modello di partenza per via della loro struttura sintattica. Come esempio vediamo la seguente applicazione del teorema di Shoenfield al paradosso di Banach-Tarski (1924). Sia

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$$

la sfera unitaria piena. Con una partizione di B intenderemo una famiglia finita $\{A_1, \dots, A_n\}$ di insiemi a due a due disgiunti tali che $A_1 \cup \dots \cup A_n = B$. Il teorema di Banach-Tarski (si veda [Wa] per un'eccellente panoramica sull'argomento) asserisce che esiste una

partizione $\{A_1, \dots, A_n\}$ di B ed esistono isometrie $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $\{\sigma_1(A_1), \dots, \sigma_k(A_k)\}$ e $\{\sigma_{k+1}(A_{k+1}), \dots, \sigma_n(A_n)\}$ sono partizioni di B , per un opportuno k , con $1 < k < n$. Una partizione siffatta si dice paradossale. La dimostrazione usa in modo essenziale l'assioma di scelta e gli insiemi A_i non sono Lebesgue misurabili. Infatti non è possibile dimostrare il paradosso di Banach-Tarski in **ZF**, né è possibile dimostrare in **ZFC** che gli A_i sono proiettivi o, in qualche senso, «definibili». Quindi, a priori, sembrerebbe che il teorema di Shoenfield abbia poco da dire su questo problema. Tuttavia R. Dougherty e M. Foreman, sempre usando **AC**, hanno dimostrato (1994) che gli A_i possono essere presi con la proprietà di Baire, cioè esistono aperti U_i tali che gli $A_i \triangle U_i$ sono magri. Più precisamente vale il seguente risultato: C'è una partizione $\{A_1, \dots, A_6\}$ di B , ci sono aperti $U_1, \dots, U_6$ ed isometrie $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ tali che gli $A_i \triangle U_i$ sono magri ($i = 1, \dots, 6$) e $\{\sigma_1(A_1), \sigma_2(A_2), \sigma_3(A_3)\}$ e $\{\sigma_4(A_4), \sigma_5(A_5), \sigma_6(A_6)\}$ sono partizioni di B . Per un risultato del 1954 di R. Robinson, 5 è il minimo numero di pezzi per una partizione paradossale arbitraria di B , mentre Dougherty e Foreman dimostrano che per una partizione paradossale con la proprietà di Baire sono necessari e sufficienti 6 pezzi. Inoltre è facile verificare che gli aperti $U_1, \dots, U_6$ sono disgiunti e che gli insiemi

$$\begin{aligned} &U_1 \cup \dots \cup U_6, \\ &\sigma_1(U_1) \cup \sigma_2(U_2) \cup \sigma_3(U_3), \\ &\sigma_4(U_4) \cup \sigma_5(U_5) \cup \sigma_6(U_6) \end{aligned}$$

sono aperti densi in B . Consideriamo l'enunciato: $\exists U_1, \dots, U_6, \sigma_1, \dots, \sigma_6$ ($U_1, \dots, U_6$ sono aperti disgiunti, $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ sono isometrie di $\mathbb{R}^3$ e gli insiemi $U_1 \cup \dots \cup U_6$, $\sigma_1(U_1) \cup \sigma_2(U_2) \cup \sigma_3(U_3)$ e $\sigma_4(U_4) \cup \sigma_5(U_5) \cup \sigma_6(U_6)$ sono aperti densi in B). Questo è un enunciato sorprendente quasi quanto il paradosso di Banach-Tarski stesso: se da un lato ci accontentiamo della densità invece di richiedere che gli insiemi formino una partizione, d'altro canto imponiamo una condizione di definibilità molto forte sul tipo di insiemi usati. Poiché questo enunciato è una conseguenza del teorema di Dougherty e Foreman esso è dimostrabile in **ZFC**. Ma poiché

è un enunciato Σ_2^1 , per il teorema di Shoenfield esso è dimostrabile in ZF.

Notiamo infine che l'utilizzo dei Teoremi 3 e 4 può portare a situazioni apparentemente paradossali. Supponiamo di aver dimostrato un teorema τ mediante due lemmi σ_1 e σ_2 tali che σ_1 sia proiettivo e σ_2 sia Σ_2^1 . Supponiamo inoltre che σ_1 sia stato dimostrato mediante CH e σ_2 mediante $\neg$ CH. Per i teoremi di absolutezza $\text{ZFC} \vdash \sigma_1 \ \& \ \sigma_2$ e quindi $\text{ZFC} \vdash \tau$, ma la dimostrazione di questo fatto passa attraverso considerazioni non banali di teoria degli insiemi.

Il Teorema 4 può essere opportunamente generalizzato, ma per far questo dobbiamo rafforzare ZFC assumendo degli opportuni generalizzazioni dell'assioma dell'infinito. Queste generalizzazioni sono note come «assiomi di grandi cardinali» e sono l'argomento della prossima sezione.

8. – Assiomi forti dell'infinito.

Il teorema di Cantor, $\kappa < 2^\kappa$, ed il fatto che l'estremo superiore di un insieme di cardinali è un cardinale, ci garantiscono l'esistenza di cardinali arbitrariamente grandi. La funzione $\aleph$ (vedere l'equazione (1) nella parte I) dimostra che i cardinali infiniti sono enumerati dagli ordinali e quindi formano una classe propria. Vedremo ora che i cardinali infiniti vengono classificati in due grandi sottoclassi: quella dei cardinali regolari e quella dei cardinali singolari.

Una funzione crescente $f : \lambda \rightarrow \kappa$ si dice *cofinale* in κ se ogni ordinale in κ è maggiorato da un valore della f , vale a dire $\forall \alpha < \kappa \ \exists \beta < \lambda (\alpha \leq f(\beta))$. La *cofinalità* di un ordinale κ è il più piccolo λ per cui esiste una $f : \lambda \rightarrow \kappa$ cofinale e si indica con $\text{cof}(\kappa)$. Poiché la funzione identica è cofinale, $\text{cof}(\kappa) \leq \kappa$ per tutti i κ . Un ordinale limite κ si dice *regolare* se $\kappa = \text{cof}(\kappa)$, altrimenti si dice *singolare*. Quindi un ordinale è singolare se è approssimabile da un ordinale più piccolo mediante una funzione crescente. Chiaramente $\omega = \aleph_0$ è regolare, ma anche $\aleph_1$ lo è: se $f : \lambda \rightarrow \aleph_1$ è crescente e $\lambda < \aleph_1$, allora

$$\sup \{ f(\alpha) \mid \alpha < \lambda \} = \bigcup_{\alpha < \lambda} f(\alpha)$$

è unione numerabile di ordinali numerabili e quindi è numerabile, cioè

$$\sup \{f(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} < \aleph_1,$$

vale a dire f non è cofinale. Analogamente, ogni $\aleph_{\alpha+1}$ è regolare. Infatti ogni ordinale regolare è un cardinale. Ma non tutti i cardinali sono regolari: per esempio la funzione $f: \omega \rightarrow \aleph_\omega$, $n \mapsto \aleph_n$, è cofinale e quindi $\text{cof}(\aleph_\omega) = \omega < \aleph_\omega$. Vale a dire: $\aleph_\omega$ è singolare. Analogamente $n \mapsto \aleph_{\omega+n}$ e $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ mostrano che $\text{cof}(\aleph_{\omega+\omega}) = \omega$ e $\text{cof}(\aleph_{\aleph_1}) = \aleph_1$ e quindi $\aleph_{\omega+\omega}$ e $\aleph_{\aleph_1}$ sono singolari. In generale se λ è limite allora $\text{cof}(\aleph_\lambda) = \text{cof}(\lambda) \leq \lambda \leq \aleph_\lambda$. Un cardinale *debolmente inaccessibile* è un cardinale regolare e limite; quindi, per quanto appena visto deve essere un cardinale della forma $\kappa = \aleph_\kappa$. Un cardinale κ è *inaccessibile* ⁽¹⁾ se è regolare e se $2^\lambda < \kappa$ per ogni $\lambda < \kappa$. (Entrambe le nozioni di inaccessibile e debolmente inaccessibile sono dovute a F. Hausdorff (1908).) È facile verificare che se κ è inaccessibile allora κ è debolmente inaccessibile, e assumendo GCH vale anche il viceversa. Infatti se κ è debolmente inaccessibile allora $(\kappa \text{ è inaccessibile})^L$. Se κ è inaccessibile allora V_κ è un modello per ZFC e $\{\alpha < \kappa \mid V_\alpha \text{ è un modello di ZFC}\}$ ha cardinalità κ . Poiché l'esistenza di un modello di ZFC non è dimostrabile in ZFC, non lo è neppure l'esistenza di cardinali (debolmente) inaccessibili. I cardinali (debolmente) inaccessibili sono il primo passo nella gerarchia dei *grandi cardinali*, una delle aree più importanti ed attive della ricerca contemporanea in teoria degli insiemi.

Il lettore che ci ha seguito fin qui, ma che non è particolarmente interessato alle astrazioni della teoria degli insiemi si chiederà a questo punto: perché studiare degli oggetti tanto remoti dalle strutture che si incontrano quotidianamente in matematica? In fondo i numeri (interi, reali, complessi), gli spazi funzionali, le varietà, le misure, etc. sono elementi dei primi V_α , con α , diciamo, $< \aleph_1$. Perché studiare cardinali tanto grandi la cui esistenza, tra l'altro, non è neppure dimostrabile in ZFC? La risposta è semplice: a prescindere dal

⁽¹⁾ In alcuni testi vengono detti *fortemente* inaccessibili per distinguerli dai debolmente inaccessibili.

fatto che la teoria dei grandi cardinali non è seconda a nessun ramo della matematica per eleganza, sofisticazione e profondità concettuale, abbiamo che:

- (*) I grandi cardinali dimostrano nuovi teoremi aritmetici non dimostrabili altrimenti.

Per inquadrare il problema correttamente è necessario richiamare qualche risultato di logica. Consideriamo una teoria T di $\mathcal{L}$ i cui assiomi siano enumerati in modo esplicito come nel caso di ZF , ZFC , $ZFC + CH$, etc. e che sia sufficientemente potente per cui il Secondo Teorema di Incompletezza può essere applicato a T . $CON(T)$ è l'enunciato aritmetico che codifica l'affermazione « T è consistente», vale a dire $CON(T) \equiv \forall s \in V_\omega \Psi_T(s)$ dove $\Psi_T(s)$ sta per « s non codifica una dimostrazione di una contraddizione a partire dagli assiomi di T .» Questo è un enunciato aritmetico molto semplice, dato che per ogni s la verifica di $\Psi_T(s)$ è di natura puramente algoritmica. In altre parole c'è un programma per computer che, esaminato l'input s , è in grado di stabilire in un numero finito di passi se o meno vale $\Psi_T(s)$; se $\Psi_T(s_0)$ non vale per qualche s_0 , allora s_0 codifica una dimostrazione di inconsistenza di T . Gli enunciati di questo tipo, cioè della forma $\forall s \in V_\omega \varphi(s)$ con $\varphi(s)$ aritmetico e verificabile in modo algoritmico si dicono Π_1^0 ; essi formano una sottoclasse degli enunciati aritmetici. Se T_1 e T_2 sono due teorie come sopra diremo che T_2 è forte almeno quanto T_1 , in simboli $T_1 \leq T_2$, se tutti gli enunciati Π_1^0 dimostrabili in T_1 lo sono anche in T_2 . La relazione $\leq$ è riflessiva e transitiva, ma non antisimmetrica — esistono teorie $T_1 \not\equiv T_2$ tali che $T_1 \leq T_2$ e $T_2 \leq T_1$, per esempio $ZFC + CH$ e $ZFC + \neg CH$. Quindi $\leq$ è un ordine parziale sulle classi di equivalenza di teorie, dove due teorie T_1 e T_2 sono equivalenti se $T_1 \leq T_2$ & $T_2 \leq T_1$. Ma dato che preferiamo essere leggermente imprecisi piuttosto che eccessivamente pedanti, diremo che $\leq$ è un ordinamento sulle teorie (piuttosto che sulle classi di equivalenza di teorie).

Se costruiamo $\mathbb{Z}$ in modo che sia un sottoinsieme di V_ω , un tipico esempio di formula Π_1^0 è $\forall z_1, \dots, z_k \in \mathbb{Z} p(z_1, \dots, z_k) \neq 0$, dove $p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_k]$. Infatti per il teorema di Davis-Matijasevič-Putnam-

Robinson [D] sull'equivalenza tra insiemi diofantei e insiemi ricorsivamente enumerabili, ogni formula Π_1^0 è equivalente ad una di questo tipo: se $\varphi(s)$ è algebricamente verificabile, allora è possibile trovare in modo esplicito un polinomio $p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{13}]$ tale che

$$\forall s \in V_\omega \varphi(s) \Leftrightarrow \forall z_1, \dots, z_{13} \in \mathbb{Z} \ p(z_1, \dots, z_{13}) \neq 0.$$

Molti problemi aperti della matematica sono equivalenti ad enunciati Π_1^0 , per esempio l'Ipotesi di Riemann o la congettura di Goldbach, mentre altri problemi di teoria dei numeri — tra questi la congettura dei primi gemelli — non sembrano essere di questa forma — si veda [D, p. 335]. Poiché l'enunciato $\text{CON}(T)$ è Π_1^0 , è possibile riformulare la relazione $\leq$ tra teorie nel seguente modo. Sia $\mathcal{G}(T)$ l'insieme dei polinomi $p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{13}]$ per cui la teoria T dimostra « $\forall z_1, \dots, z_{13} \in \mathbb{Z} \ p(z_1, \dots, z_{13}) \neq 0$ »; allora $T_1 \leq T_2$ se e solo se $\mathcal{G}(T_1) \subseteq \mathcal{G}(T_2)$.

Diremo che T_2 è *più forte* di T_1 se $T_1 \leq T_2$ e T_2 dimostra la consistenza di T_1 , cioè $T_2 \vdash \text{CON}(T_1)$. Per il Secondo Teorema di Incompletezza questo significa che T_2 dimostra un enunciato Π_1^0 indimostrabile in T_1 e quindi $\mathcal{G}(T_1) \subset \mathcal{G}(T_2)$. Benché si possano costruire *ad hoc* teorie incomparabili T_1 e T_2 , vale a dire tali che $T_1 \not\leq T_2$ e $T_2 \not\leq T_1$, tuttavia si è osservato il seguente fenomeno ⁽²⁾ empirico:

L'ordinamento $\leq$ sulle teorie che si
incontrano in pratica è un buon ordine.

Inoltre la teoria «successore» di T è data da $T + \text{CON}(T)$. Le seguenti teorie sono via via più forti:

1. ZFC
2. ZFC + CON(ZFC)
3. ZFC + «Esiste un modello transitivo di ZFC»
4. ZFC + «Esiste α tale che V_α è un modello di ZFC»
5. ZFC + «Esiste un cardinale inaccessibile.»

⁽²⁾ Questo è un dato sperimentale, ma è stato dimostrato per varie classi di teorie via via più ampie.

Due teorie T_1 e T_2 sono *equiconsistenti* se dimostrano gli stessi enunciati Π_1^0 e la consistenza dell'una è equivalente alla consistenza dell'altra. Più precisamente, se $T_1 \leq T_2$, $T_2 \leq T_1$ e l'enunciato

$$\text{CON}(T_1) \Leftrightarrow \text{CON}(T_2)$$

è dimostrabile in una teoria sufficientemente debole, diciamo $\text{ZFC} - \text{Inf}$. Infatti il secondo requisito è automaticamente soddisfatto da tutte le teorie che si incontrano in pratica. Si è cioè osservato che se due teorie «naturali» sono equivalenti, allora esse sono anche equiconsistenti. Mediante gli insiemi costruibili ed il *forcing* si dimostra che le teorie

$$\text{ZF}, \text{ZFC}, \text{ZFC} + \text{GCH}, \text{ZFC} + \neg \text{CH},$$

sono equiconsistenti; analogamente $\text{ZFC} + \text{«Esiste un cardinale debolmente inaccessibile»}$ e $\text{ZFC} + \text{«Esiste un cardinale inaccessibile»}$ sono equiconsistenti.

Quindi i grandi cardinali ci consentono di dimostrare nuovi enunciati aritmetici (infatti: Π_1^0) che non sono dimostrabili in ZFC anche assumendo CH o $\neg \text{CH}$. Si potrebbe obiettare che gli unici esempi di enunciati di questo tipo sono della forma $\text{CON}(T)$ per varie teorie T e quindi sono destinati a suscitare interesse solo tra i logici. Tuttavia H. Friedman [Fr] ha utilizzato i cardinali *subtle* ⁽³⁾ per dimostrare nuovi risultati in teoria di Ramsey, un'area della teoria dei grafi finiti; inoltre ha mostrato che una qualsiasi dimostrazione di questi risultati (che, ribadiamo, parlano di oggetti di V_ω) deve necessariamente coinvolgere nozioni equiconsistenti con questi grandi cardinali. Addirittura è perfettamente plausibile che importanti problemi aperti della matematica che ammettono formulazioni aritmetiche o proiettive (quali l'ipotesi di Riemann, la congettura di Poincaré, etc.) dipendano in maniera essenziale da assiomi forti dell'infinito. Se ciò fosse vero si avrebbe una spiegazione dell'apparente intrattabilità di questi problemi.

⁽³⁾ I cardinali *subtle* sono più grandi degli inaccessibili, ma più piccoli dei misurabili.

Purtroppo a tutt'oggi non ci sono metodi generali per verificare se un enunciato aritmetico dipenda o meno dall'assunzione di grandi cardinali e quindi la tesi (*) è stata corroborata da un numero limitato, sebbene significativo, di esempi. Viceversa l'analoga affermazione per gli enunciati proiettivi:

(**) I grandi cardinali dimostrano nuovi teoremi
proiettivi non dimostrabili altrimenti

è stata verificata in una miriade di casi, tanto da diventare un vero e proprio *leit-motiv* per la teoria degli insiemi contemporanea. Consideriamo, per esempio, il seguente problema: è consistente assumere che tutti gli insiemi proiettivi siano Lebesgue misurabili? La risposta è affermativa, modulo l'esistenza di cardinali inaccessibili, dato che per risultati di R. Solovay (1965) e S. Shelah (1980) le teorie

ZFC + «Esiste un cardinale inaccessibile»

ZFC + «Tutti gli insiemi proiettivi sono Lebesgue misurabili»

sono equiconsistenti. Questo non significa che l'esistenza di cardinali inaccessibili *implichi* la Lebesgue misurabilità degli insiemi proiettivi, o vice versa. Stiamo solo asserendo che le due teorie dimostrano gli stessi fatti sui numeri naturali e che le due teorie meritano lo stesso grado di fiducia. Se partiamo da cardinali più grandi possiamo trovare ulteriori teoremi di equiconsistenza. Ricordiamo la definizione di cardinale *misurabile* dovuta a S. Ulam (1930): $\kappa > \omega$ è misurabile se esiste una misura $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \{0, 1\}$ non singolare (cioè $\mu(\{\alpha\}) = 0$ per ogni $\alpha < \kappa$) e $< \kappa$ -additiva (cioè se $\lambda < \kappa$ e $\mu(A_\alpha) = 1$ con $\alpha < \lambda$, allora $\mu(\bigcap_\alpha A_\alpha) = 1$). Ogni κ misurabile è inaccessibile ed è il κ -esimo inaccessibile; infatti $\mu(\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ è un inaccessibile}\}) = 1$. Quindi la teoria ZFC + «Esiste un cardinale misurabile» estende ed è più forte di ZFC + «Esiste un cardinale inaccessibile». L'esistenza di un cardinale misurabile è incompatibile con $V = L$: se κ è misurabile con misura μ , allora $\mu \notin L$ e $|\mathbb{R}^L| = \aleph_0$.

R. Solovay ha dimostrato (1967) che l'esistenza di un cardinale misurabile *implica* la Lebesgue misurabilità dei Σ_2^1 ed è equiconsi-

stente con il ben noto problema di Banach sull'estensione della misura di Lebesgue. Vale a dire le teorie

ZFC + «Esiste un cardinale misurabile»

ZFC + «Esiste una misura $\mu : \wp(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ che estende la misura di Lebesgue»

sono equiconsistenti. I cardinali misurabili non implicano la Lebesgue misurabilità dei Σ_3^1 . Tuttavia cardinali ancora più grandi, isolati da H. Woodin nel 1985, garantiscono la Lebesgue misurabilità dei proiettivi e molto altro ancora:

ZFC $\vdash$ «Esistono infiniti cardinali di Woodin» $\Rightarrow$

$$\forall A \in \bigcup_n \Sigma_n^1 (A \text{ è Lebesgue misurabile}).$$

La definizione di cardinale di Woodin è troppo complessa per essere riportata qui; ci limitiamo ad osservare che se δ è Woodin allora δ è inaccessibile e $\{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ è misurabile}\}$ ha cardinalità δ . I cardinali di Woodin non sono necessariamente misurabili, ma se κ è di Woodin ed è anche misurabile, allora $\{\delta < \kappa \mid \delta \text{ è di Woodin}\}$ ha misura 1.

Segnaliamo infine che in teoria degli insiemi sono stati studiati cardinali ben più grandi dei cardinali di Woodin; questi cardinali emergono naturalmente nello studio di certi problemi relativi ad insiemi «piccoli.» Rimandiamo il lettore a [Ka] per una trattazione esauriente di queste questioni.

9. – Nuovi teoremi di absolutezza.

I cardinali di Woodin menzionati alla fine della sezione 8, sono la nozione cruciale, lo strumento tecnico essenziale, per lo studio degli insiemi proiettivi e loro generalizzazioni. Non solo ci assicurano un quadro ben strutturato e coerente degli insiemi proiettivi, relegando nel limbo degli oggetti non definibili gli insiemi patologici costruiti mediante AC, per esempio gli insiemi non-Lebesgue misurabili, i pezzi della decomposizione di Banach-Tarski della sfera, etc. L'im-

portanza dei cardinali di Woodin risiede nel fatto che la loro presenza rende i modelli molto più assoluti.

TEOREMA 5 (Woodin). — *Supponiamo $M \subseteq N$ strutture transitive che soddisfano un frammento sufficientemente grande di ZFC e supponiamo che $M \cap \text{Ord} = N \cap \text{Ord}$. Sia $\varphi(x)$ una formula Σ^1_{n+2} e supponiamo che*

($\delta_1 < \dots < \delta_n$ sono cardinali di Woodin e $\kappa > \delta_n$ è misurabile) M .

Allora per ogni $x \in \mathbb{R} \cap M$

$$\varphi^M(x) \Leftrightarrow \varphi^N(x).$$

Questa è la corretta generalizzazione del Teorema di Shoenfield — l'ipotesi « $\aleph_1^M \subseteq N$ » del Teorema 4 è qui rimpiazzata dall'esistenza dei cardinali di Woodin e del misurabile. Inoltre questo risultato dimostra come la nozione di absolutezza sia un concetto relativo: quanti più grandi cardinali in M , tanto più M è assoluto rispetto ai modelli che lo contengono.

Ma l'influenza dei cardinali di Woodin si estende ben al di là della gerarchia proiettiva. Una formula $\varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)$ è Σ^2_1 se è della forma

$$\exists Z \in V_{\omega+2} \quad \psi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m, Z)$$

dove ψ è una formula proiettiva (cioè i quantificatori variano su $V_{\omega+1}$ o su V_ω), $x_1, \dots, x_n \in V_{\omega+1}$ e $Y_1, \dots, Y_m \in V_{\omega+2}$. L'indice 2 sta a ricordare che dobbiamo quantificare su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. La negazione di una formula Σ^2_1 è Π^2_1 e le gerarchie delle formule Σ^2_n, Π^2_n sono definite nel modo ovvio. Le formule Σ^2_n e Π^2_n sono enormemente più espressive delle formule proiettive (cioè Σ^1_n e Π^1_n), dato che possiamo quantificare su sottoinsiemi arbitrari di spazi Polacchi. In matematica gli enunciati Σ^2_1 sono sovente della forma: «Esiste una topologia su $\mathbb{R}$ tale che ...» oppure «Esiste una misura su una σ -algebra $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tale che ...» etc., dove l'ellissi ... è una formula proiettiva. Per esempio: l'esistenza di un insieme fortemente di misura nulla più che numerabile ($\neg \text{BC}$) o l'esistenza di una norma su $C([0, 1], \mathbb{C})$

non equivalente alla norma uniforme ($\neg \text{KC}$), sono enunciati Σ_1^2 . L'ipotesi del continuo è anch'esso un enunciato Σ_1^2 in quanto equivalente ad «Esiste un ordine lineare $\triangleleft$ su $\mathbb{R}$ tale che $\{y \mid y \triangleleft x\}$ è numerabile e bene-ordinato da $\triangleleft$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.» Per via del seguente teorema CH è, in un certo senso, il più importante enunciato Σ_1^2 .

TEOREMA 6 (Woodin). – *Supponiamo M sia un modello di un frammento sufficientemente grande di $\text{ZFC} + \text{CH}$ e supponiamo M abbia una classe propria di cardinali che siano simultaneamente di Woodin e misurabili. Sia $P \in M$ e sia G generico per P su M tale che $(\text{CH})^{M[G]}$. Allora*

$$\varphi(x)M \Leftrightarrow \varphi(x)^{M[G]}$$

per ogni φ formula Σ_1^2 e reale $x \in \mathbb{R} \cap M$.

Come corollario si ha che, modulo grandi cardinali, se è dimostrabile mediante *forcing* che un enunciato Σ_1^2 è *consistente* con CH, allora questo enunciato deve essere *conseguenza* di CH. Questa è la spiegazione matematicamente rigorosa dell'osservazione empirica che tutte le conseguenze di CH hanno complessità logica al più Σ_1^2 .

Il Teorema 6 è il primo di una serie di spettacolari risultati che Woodin ha dimostrato negli ultimi quindici anni (si veda [Wo]). Questi teoremi, che ci paiono tanto tecnicamente difficili quanto profondi e belli, sono al di là degli scopi di questo articolo.

Dai vari teoremi di absolutezza che abbiamo presentato, ci auguriamo emerga come le idee di *definibilità* ed *absolutezza* siano centrali per la teoria degli insiemi contemporanea. Ulteriori sviluppi in questa direzione non potranno che approfondire la nostra comprensione del problema del continuo e, in ultima analisi, ampliare l'applicabilità della teoria degli insiemi ad altre parti della matematica.

Indice dei simboli.

Riportiamo qui sotto un elenco delle principali notazioni e simboli usati, con a fianco la sezione in cui sono stati introdotti.

Assiomi e congetture:

AC, l'assioma di scelta, sezione 2.
 BC, la congettura di Borel, sezione 3.
 CH, l'ipotesi del continuo, sezione 2.
 GCH, l'ipotesi generalizzata del continuo, sezione 2.
 KC, la congettura di Kaplansky, sezione 3.
 SH, l'ipotesi di Suslin, sezione 3.
 ZF, la teoria Zermelo-Fraenkel, sezione 2.
 ZFC = ZF + AC, la teoria Zermelo-Fraenkel con l'assioma di scelta, sezione 2.

Simboli:

$\aleph_\alpha$: l' α -esimo cardinale infinito, sezione 2.
 $|X|$: la cardinalità di X , sezione 2.
 CON(T): l'enunciato « T è consistente», sezione 8.
 Def(M): l'insieme dei sottinsiemi definibili di M , sezione 4.
 φ^M : la relativizzazione di φ ad M , sezione 4.
 ${}^\lambda \kappa$: l'insieme delle funzioni da λ in κ , sezione 2.
 $\mathcal{L}$: il linguaggio della teoria degli insiemi, sezione 2.
 L_α : l' α -esimo livello della gerarchia costruibile, sezione 4.
 $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$: l'universo costruibile, sezione 4.
 $M[G]$: l'estensione del modello M mediante il generico G , sezione 5.
 N_s : l'aperto di base di ${}^\omega \omega$ individuato da s , sezione 5.
 ω : il primo ordinale limite ovvero l'insieme dei naturali, sezione 2.
 $\wp(X)$: l'insieme delle parti di X , sezione 2.
 Σ_n^1, Π_n^1 : gli insiemi proiettivi di livello n , sezione 6.
 Σ_n^1, Π_n^1 : le formule proiettive di livello n , sezione 6.
 $T \vdash \varphi$: la teoria T dimostra l'enunciato φ , sezione 1.
 V_α : l' α -esimo livello della gerarchia degli insiemi, sezione 2.
 $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$: l'universo degli insiemi, sezione 2.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [A] A. ANDRETTA, *I teoremi di assolutezza in teoria degli insiemi: parte I*.
- [AL] S. ADAMS - R. LYONS, *Amenability, Kazhdan's property and percolation for trees, groups and equivalence relations*, Israel Journal of Mathematics, **75** (1991), 341-370.
- [CFW] A. CONNES - J. FELDMAN - B. WEISS, *An amenable equivalence relation generated by a single transformation*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, **1** (1981), 431-450.
- [D] M. DAVIS - Y. MATIJASEVIČ - J. ROBINSON, *Hilbert's tenth problem: Diophantine equations: positive aspects of a negative solution*, in *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, a cura di F. Browder. American Mathematical Society, Providence, R. I., (1976), xii+628.
- [Fr] H. FRIEDMAN, *Finite functions and the necessary use of large cardinals*, Annals of Mathematics, **148** (1998), 803-893.
- [Ka] A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, Berlin (1994), xxiv+536.
- [Ke] A. S. KECHRIS, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, New York (1995), xviii+402.
- [Wa] S. WAGON, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge (1985), xvi+251.
- [Wo] W. H. WOODIN, *The Continuum Hypothesis*, Notices of the American Mathematical Society, **48** (2001), Part I, 567-576 e Part II, 683-690.

Alessandro Andretta, Dipartimento di Matematica, via Carlo Alberto 10
10123 Torino, Italy. E-mail: andretta@dm.unito.it