# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Silvia Musumeci


## Gruppi di permutazioni imprimitivi che agiscono con elevata transitività sui blocchi


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 311–314.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_311_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 311-314

# Gruppi di permutazioni imprimitivi che agiscono con elevata transitività sui blocchi.

SILVIA MUSUMECI

Il ruolo-chiave giocato dalla geometria combinatoria nella teoria dei gruppi di permutazioni ha permesso di incrementare l'uso della teoria delle rappresentazioni, ciò ha apportato un notevole contributo alla classificazione dei gruppi semplici finiti. I gruppi sporadici, per esempio, sono stati scoperti in quanto gruppi di automorfismi di particolari strutture combinatorie.

Contrariamente a quanto accade per i gruppi di permutazioni primitivi, ben poco è noto per i gruppi imprimitivi.

Il principale metodo utilizzato per costruire gruppi imprimitivi è basato sui «wreath products» (cfr. [5]) di due gruppi $H$ e $K$. Più precisamente, sia $H$ uno spazio vettoriale e sia $V$ la somma diretta $\bigoplus_{i=1}^{t} H_i$ di $t$ copie di $H$. Considerata l'azione naturale del gruppo simmetrico $\mathbf{S}_t$ sull'insieme $\{H_1, \dots, H_t\}$ di componenti di $V$, siano $K$ un sottogruppo transitivo di $\mathbf{S}_t$ e $\alpha : K_{H_t} \to \mathbf{GL}(H)$ una rappresentazione lineare dello stabilizzante in $K$ della componente $H_t$. Allora, il «crossed wreath product» (cfr. [5]) $G = H \,\mathrm{wr}_\alpha K$ può essere visto come un gruppo di trasformazioni affini che opera imprimitivamente su un'opportuna famiglia di sottospazi affini di $V$.

Infatti, a partire dalla data rappresentazione $\alpha$, si costruisce una rappresentazione $K \to \mathbf{GL}(V)$ $(k \mapsto \tilde{k})$ di $K$ in $V$ e si considera il gruppo di trasformazioni affini $G = \{x \mapsto v + \tilde{k}(x) \colon v \in V,\ k \in K\}$. Il gruppo $G$ agisce transitivamente sull'insieme $\Omega = \bigcup_{i=1}^{t} \{x + V_i \colon x \in V\}$, dove $V_i = \bigoplus_{r \neq i} H_r$, tale azione è imprimitiva ed i blocchi sono i sottoinsiemi $\Delta_i = \{x + V_i \colon x \in V\}$. Il sottogruppo $N$ di $G$ costituito da quelle trasformazioni che sono traslazioni è il sottogruppo normale che lascia ogni blocco stabile (il *sottogruppo inerziale di* $G$). Esso opera regolarmente su ogni blocco e «muove» in modo unico ogni $t$-pla di punti contenuti nei $t$ blocchi distinti in un'altra dello stesso tipo.

Se $W$ è un sottospazio di $V$ stabile sotto l'azione di $K$ e tale che ogni proiezione $W \to H_i$ è surgettiva, allora il sottogruppo $G_W = \{x \mapsto w + \tilde{k}(x) \colon w \in W,\ k \in K\}$ di $G$ è un gruppo imprimitivo avente lo stesso sistema di blocchi, mentre il corrispondente sottogruppo inerziale soddisfa le stesse condizioni di $N$, ma rispetto ad un intero $m < t$ che dipende dalla dimensione di $W$. Se la rappresentazione $\alpha$ è transitiva allora lo stabilizzante in $G_W$ di un blocco agisce su questo 2-transitivamente.

Questo procedimento può essere invertito, in particolare si ha il seguente

TEOREMA 1. – *Sia $G$ un gruppo di permutazioni imprimitivo avente un numero finito di blocchi. Supponiamo che*

*i) lo stabilizzante $G_\Delta$ di un blocco $\Delta$ induce un'azione 2-transitiva su $\Delta$;*

*ii) il sottogruppo inerziale $N$ di $G$ opera regolarmante su ogni blocco;*

*iii) se $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ sono blocchi distinti e $X_i$, $Y_i \in \Delta_i$ per $i = 1, \ldots, m$, allora esiste un unico elemento $g \in N$ tale che $g(X_i) = Y_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.*

*Allora $G$ è finito, $N$ è un $p$-gruppo abeliano elementare, per qualche primo $p$, inoltre esistono una rappresentazione lineare transitiva $\alpha$: $G_\Delta/N \to \mathbf{GL}(n, p)$, per qualche $n > 0$, ed un'immersione*

$$\iota : G \hookrightarrow \widetilde{G} = GF(p)^n \operatorname{wr}_\alpha G/N$$

*di gruppi di permutazioni tale che $W = \iota(N)$ è un sottogruppo normale di traslazioni di $\widetilde{G}$ avente dimensione $mn$ su $GF(p)$.*

*Infine, $G$ è un'estensione spezzante di $N$ se e solo se $\iota(G) = \widetilde{G}_W$.*

Il nostro obiettivo è quello di classificare i gruppi imprimitivi $G$ che verificano le proprietà *i)*-*iii)* del Teorema 1 e tali che

*iv)* l'azione indotta da $G$ sull'insieme dei blocchi è strettamente $m$-transitiva, per qualche intero $m > 3$.

La condizione *iv)* comporta che le uniche possibilità per il gruppo di permutazioni indotto sui blocchi sono le seguenti:

1) il gruppo simmetrico $\mathbf{S}_m$ o $\mathbf{S}_{m+1}$;

2) il gruppo alterno $\mathbf{A}_{m+2}$;

3) il gruppo di Mathieu $\mathbf{M}_{11}$ o $\mathbf{M}_{12}$.

In virtù della classificazione dei gruppi finiti 2-transitivi aventi un sottogruppo normale regolare elementarmente abeliano (cfr. [4]), il Teorema 1 ci permette di escludere il caso in cui $G/N$ sia un gruppo di Mathieu.

Inoltre, utilizzando alcuni risultati di Hering (cfr. [2]), otteniamo che l'ordine di un blocco può essere solamente 2, 3, 4 o 16.

Il seguente teorema mostra le possibilità che possono presentarsi per un gruppo di permutazioni $(G, \Omega)$ soddisfacente le condizioni richieste, nel caso in cui ciascun blocco ha ordine 2. In questo caso $\alpha$ è la rappresentazione banale di $G_\Delta/N$ in una retta vettoriale su $GF(2)$.

TEOREMA 2. – *Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$ una base di uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $m+1$ su $GF(3)$ e denotiamo con $N$ il gruppo di trasformazioni lineari rappresentate, rispetto alla base $\mathcal{B}$, dalle matrici diagonali aventi determinante 1. Allora, se $|\Delta| = 2$, il gruppo di permutazioni $(G, \Omega)$ è isomorfo ad* *uno dei seguenti:*

1. $\Omega = \{e_1, -e_1, \ldots, e_{m+1}, -e_{m+1}\}$, $G = G_1 N \rtimes \mathbf{GL}(V)_{\mathcal{B}}$;
2. $\Omega = \{e_1, -e_1, \ldots, e_{m+1}, -e_{m+1}\}$, $G = G_2 = \{g \in \mathbf{GL}(V)_\Omega : \det g = 1\}$;
3. $\Omega = \{e_1, -e_1, \ldots, e_m, -e_m\}$, $G = G_3 = \mathbf{GL}(V)_\Omega$.

*I precedenti esempi realizzano* 3 *gruppi di permutazioni a due a due non isomorfi.*

Più precisamente, se $m$ è pari allora l'applicazione $g \mapsto (detg)\, g$ definisce un isomorfismo $G_1 \to G_2$ di gruppi astratti. Al contrario, se $m$ è dispari non esiste un complemento di $N$ in $G_2$, quindi il gruppo $G_2$ risulta un'estensione non spezzante di $N$ con $\mathbf{S}_{m+1}$.

Se ogni blocco ha ordine 3 allora la situazione è diversa: in tal caso il gruppo $G$ spezza sempre su $N$. Infatti, tenuto conto che l'unica rappresentazione transitiva di un gruppo simmetrico in una retta vettoriale su $GF(3)$ è la rappresentazione $\tilde{\sigma}(v) = \operatorname{sign}(\sigma)\, v$, abbiamo il seguente

Teorema 3. – *Sia* $|\Delta| = 3$; *allora si ha* $G/N \simeq \mathbf{S}_t$, *dove* $t = m$ *oppure* $t = m+1$, *il gruppo* $G$ *spezza sul sottogruppo inerziale* $N$ *ed il gruppo di permutazioni* $(G, \Omega)$ *può essere realizzato come segue:*

*Sia* $V$ *uno spazio vettoriale di dimensione* $t$ *su* $GF(3)$ *e sia* $\overline{V}_i = \{x + V_i : x \in V\}$, *dove* $V_i$ *denota l'iperpiano dei vettori* $(x_1, \ldots, x_t)$ *con* $x_i = 0$. *Allora poniamo* $\Omega = \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_t$ *e* $G = \{x \mapsto w + \tilde{k}(x) : w \in W,\ k \in K\}$, *dove* $W = V$ *se* $t = m$, $W = \{(x_1, \ldots, x_t) \in V : \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{m(i+1)} x_i = 0\}$ *se* $t = m+1$ *e* $K \simeq \mathbf{S}_t$ *denota il sottogruppo di* $\mathbf{GL}(V)$ *generato dalle applicazioni lineari*

$$(x_1, \ldots, x_t) \mapsto (x_t, x_1, \ldots, x_{t-1}),$$

$$(x_1, \ldots, x_t) \mapsto \big((-1)^t x_t, -x_2, \ldots, -x_{t-1}, (-1)^t x_1\big),$$

*corrispondenti alle permutazioni* $(1, \ldots, t)$ *e* $(1\ t)$, *rispettivamente.*

In virtù dei teoremi precedenti possiamo adesso supporre $|\Delta| > 3$. I seguenti teoremi distinguono i casi $G/N \simeq \mathbf{S}_m$, $\mathbf{S}_{m+1}$, $\mathbf{A}_{m+2}$.

Teorema 4. – *Sia* $G/N \simeq \mathbf{S}_m$. *Allora* $G$ *è il «crossed wreath product»* $GF(p)^n \operatorname{wr}_\alpha \mathbf{S}_m$, dove $\alpha : \mathbf{S}_{m-1} \to \mathbf{GL}(n, p)$ *è una delle seguenti rappresentazioni di* $\mathbf{S}_{m-1}$:

1. *la rappresentazione fedele di* $\mathbf{S}_3$ *come* $\mathbf{GL}(2, 2)$;
2. *la rappresentazione non fedele di* $\mathbf{S}_4$ *come* $\mathbf{GL}(2, 2)$;
3. *la rappresentazione di* $\mathbf{S}_5$ *su* $GF(2)$ *corrispondente a* $\mathbf{P}\Gamma L(2, 4)$;
4. *la rappresentazione di* $\mathbf{S}_6$ *come* $\mathbf{Sp}(4, 2)$.

*In ogni caso $G$ è un'estensione spezzante di $N$ con $\mathbf{S}_m$.*

TEOREMA 5. – *Sia $G/N \simeq \mathbf{S}_{m+1}$. Allora $m=5$, i blocchi contengono precisamente 16 punti e c'è un'immersione $\iota : G \hookrightarrow GF(2)^4 \mathrm{wr}_\alpha \mathbf{S}_6$, dove $\alpha : \mathbf{S}_5 \to \mathbf{GL}(4,2)$ è la rappresentazione corrispondente a $\mathbf{P}\Gamma L(2,4)$.*

*Inoltre, a meno di isomorfismi, il gruppo $G$ può essere realizzato mediante due possibili estensioni di $N$ con $\mathbf{S}_6$, una spezzante e l'altra no.*

Più precisamente, scriviamo gli elementi di $GF(4)$ come $0, 1, \mathbf{i}, \mathbf{i}^2$ e consideriamo l'applicazione biunivoca $f : GF(4)^2 \to GF(4)^2$ definita da

$$(x, y) \mapsto (\mathbf{i}x + \mathbf{i}y + \mathbf{i}y^2,\ \mathbf{i}^2 x + \mathbf{i}^2 y^2).$$

Allora l'immagine $\iota(N)$ è il gruppo delle traslazioni di $GF(2)^4 \mathrm{wr}_\alpha \mathbf{S}_6$ corrispondente allo spazio vettoriale

$$W = \left\{ (z_1, \ldots, z_6) \in V = (GF(4)^2)^6 : \sum_{i=1}^{6} f^i(z_i) = 0 \right\}.$$

TEOREMA *Sia $G/N \simeq \mathbf{A}_{m+2}$. Allora $4 \leqslant m \leqslant 7$, i blocchi contengono esattamente 16 punti e c'è un'immersione $\iota : G \hookrightarrow GF(2)^4 \mathrm{wr}_\alpha \mathbf{A}_{\mathrm{m}+2}$, dove la rappresentazione $\alpha : \mathbf{A}_{m+1} \to \mathbf{GL}(4,2)$ è una delle seguenti:*

1. *la rappresentazione di $\mathbf{A}_8$ come $\mathbf{GL}(4,2)$;*
2. *la restrizione della precedente rappresentazione ad $\mathbf{A}_7$ oppure ad $\mathbf{A}_6$;*
3. *la rappresentazione di $\mathbf{A}_5$ su $GF(2)$ corrispondente a $\mathbf{SL}(2,4)$.*

*In ogni caso $G$ spezza sul sottogruppo inerziale $N$.*

## BIBLIOGRAFIA

[1] N. BLACKBURN, *The extension theory of the symmetric and alternating groups*, Math. Z., **117** (1970), 191-206.

[2] C. HERING, *Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order*, Geom. Ded., **2** (1974), 425-460.

[3] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1967).

[4] W.M. KANTOR, *Homogeneous designs and geometric lattices*, J. Combin. Theory, **38** (1985), 66-74.

[5] H. KURZWEIL, B. STELLMACHER, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1998).

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo
e-mail: musumeci@math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. C. G. Bartolone, Università di Palermo