Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Vincenzo Micale

Anelli locali di dimensione uno analiticamente non ramificati e loro semigruppi di valori associati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 299–302.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_299_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 299-302

Anelli locali di dimensione uno analiticamente non ramificati e loro semigruppi di valori associati.

VINCENZO MICALE

Uno dei concetti fondamentali presenti nella mia tesi è quello di semigruppo numerico, cioè di sottosemigruppo di $\mathbb{N}$ con complementare finito rispetto a $\mathbb{N}$.

Lo studio dei semigruppi numerici ha motivazioni algebriche e geometriche.

Per quanto riguarda le motivazioni algebriche, se consideriamo un dominio locale Noetheriano unidimensionale $(R, \mathfrak{m})$, analiticamente irriducibile (cioè la chiusura integrale $(\overline{R}, \mathfrak{n})$ nel suo campo quoziente è un anello di valutazione discreta (DVR) e un R-modulo finito) e tale che $R/\mathfrak{m} \cong \overline{R}/\mathfrak{n}$, allora l'immagine della restrizione a R della valutazione $v : \overline{R} \to \mathbb{N}$ è un semigruppo numerico S. L'anello R è strettamente legato a S, poiché esistono relazioni tra i caratteri algebrici di S e quelli di R. Per esempio si ha che $\lambda_R(\overline{R}/R) = |[0, g(S)] \cap (\mathbb{N} \setminus S)|$ e $\lambda_R(R/(R : \overline{R})) = |[0, g(S)] \cap S|$, dove $g(S) = \max\{x \in \mathbb{N} \setminus S\}$. Possiamo anche associare a S altri invarianti oltre a $g(S)$, come il tipo $(t(S))$, la molteplicità $(e(S))$ e la dimensione di immersione $(\mathrm{embd}(S))$. Tutti questi invarianti sono legati ai corrispettivi invarianti dell'anello. Infatti $t(R) \leqslant t(S)$, $e(R) = e(S)$ e $\mathrm{embd}(R) \leqslant \mathrm{embd}(S)$.

È quindi facile convincersi di come sia conveniente studiare questa classe di anelli (che denotiamo con $\mathcal{R}$) usando i semigruppi numerici associati.

Riguardo le motivazioni geometriche, gli anelli nella classe $\mathcal{R}$ sono interessanti in geometria algebrica. Infatti è possibile associare ad ogni ramo di una curva algebrica affine irriducibile in un suo punto (singolare) un anello $R \in \mathcal{R}$. Il semigruppo $v(R)$ è chiamato *il semigruppo numerico associato al ramo nel punto* e il suo studio da molte informazioni sulla singolarità della curva nel punto.

In particolare, nel caso di curve monomiali, l'anello delle funzioni regolari è della forma $K[t^{g_1}, \ldots, t^{g_\nu}]$ (K campo) e come completamento della localizzazione nell'origine si ha un anello appartenente a $\mathcal{R}$. Il semigruppo numerico associato è generato da $g_1, \ldots, g_\nu$ (cioè ogni suo elemento è del tipo $\sum_{i=1}^{\nu} g_i x_i$ con $x_i \in \mathbb{N}$) e, in questo caso particolare, le relazioni scritte sopra (tra gli invarianti del semigruppo e quelli del corrispondente anello) sono tutte uguaglianze.

I semigruppi numerici vengono usati anche per lo studio dello schema di Hilbert per singolarità di curve irriducibili (cf. e.g. [8]). In questo contesto lo studio dei semigruppi numerici monomiali è particolarmente interessante e utile.

Infine, in algebra commutativa e in geometria algebrica è importante determinare se e quando, per un anello locale, l'anello graduato associato rispetto all'ideale massimale è Cohen-Macaulay. In [3] e [7] gli autori mostrano come l'uso del semigruppo numerico dia, in molti casi particolari, un significativo aiuto nel caso di anelli $R \in \mathcal{R}$.

A partire dagli anni 80 lo studio dei semigruppi numerici è stato generalizzato a quello dei sottosemigruppi di $\mathbb{N}^d$. Questi sono legati ad anelli locali di curve algebriche nei loro punti singolari con d rami.

Sia R un anello locale Noetheriano unidimensionale completo ridotto e denotiamo con $\mathfrak{p}_i$, $i = 1, \dots, d$, i suoi ideali primi minimali. Se $\overline{R/\mathfrak{p}_i}$ denota la chiusura integrale di $R/\mathfrak{p}_i$ nel suo campo quoziente $Q(R/\mathfrak{p}_i)$, allora si ha che $R \subseteq R/\mathfrak{p}_1 \times \dots \times R/\mathfrak{p}_d$, $\overline{R} \cong \overline{R/\mathfrak{p}_1} \times \dots \times \overline{R/\mathfrak{p}_d}$ e $Q(R) \cong Q(R/\mathfrak{p}_1) \times \dots \times Q(R/\mathfrak{p}_d)$.

Poiché R è completo, $V_i = \overline{(R/\mathfrak{p}_i)}$ è un DVR di $Q(R/\mathfrak{p}_i)$ e denotiamo ogni suo parametro uniformizzante con t_i.

È possibile associare a R un sottosemigruppo di $\mathbb{N}^d$. Sia v_i: $Q(R/\mathfrak{p}_i) \to \mathbb{Z} \cup \infty$ la valutazione associata a V_i e sia $Z(R)$ l'insieme dei divisori dello zero di R. Ricordando che $Q(R) \simeq Q(R/\mathfrak{p}_1) \times \dots \times Q(R/\mathfrak{p}_d)$, per ogni $r \in Q(R)$, definiamo $v(r) = (v_1(r_1), \dots, v_d(r_d))$ e poniamo $v(R) := \{v(r) \mid r \in R,\ r \notin Z(R)\}$.

La mia tesi si inserisce nel contesto dello studio di anelli ridotti di dimensione uno (o solo di domini di dimensione uno) per mezzo dei loro semigruppi associati. Nella prima parte (capitoli $1-4$) considero domini locali Noetheriani di dimensione uno $(R, \mathfrak{m})$, analiticamente irriducibili e tali che $R/\mathfrak{m} \cong \overline{R}/\mathfrak{n}$ (cioè $R \in \mathcal{R}$). Nella seconda parte (capitoli $5-7$) considero principalmente anelli locali Noetheriani di dimensione uno ridotti e analiticamente non ramificati $(R, \mathfrak{m})$ con R residuamente razionale (cioè $R/\mathfrak{m} \simeq \overline{(R/\mathfrak{p}_i)}/(t_i)$ per ogni $i = 1, \dots, d$) e tali che $R \neq \overline{R}$ e $|R/\mathfrak{m}| \geqslant d$.

Nel primo capitolo richiamo alcuni concetti e risultati riguardanti i semigruppi numerici e i domini locali di dimensione uno analiticamente irriducibili che userò in seguito.

Nel secondo capitolo introduco la nozione di semigruppo numerico monomiale e correggo un risultato presente in un articolo del 1992 di Pfister e Steenbrink [8, Theorem 3.10] (che caratterizza questo genere di semigruppi numerici) fornendo una più trasparente caratterizzazione teorica dei semigruppi numerici monomiali. Inoltre introduco due nuovi invarianti $P(S)$ e $\operatorname{crit}(S)$ per un semigruppo numerico S e mostro che $P(S) \leqslant \operatorname{crit}(S)$ (cf. Theorem 2.2.18). L'interesse in $P(S)$ viene dal fatto che $P(S) = 0$ se e solo se S è un semigruppo numerico monomiale. Inoltre $P(S)$ è in genere difficile da determinare mentre $\operatorname{crit}(S)$ si determina facilmente. Infine classifico concretamente i semigruppi numerici con $\operatorname{crit}(S) = 1$ (cf. Example 2.3.3) e do un esempio di semigruppo numerico con $P(S) = 1$ e $\operatorname{crit}(S) > 1$. Molti dei risultati nel Capitolo 2 sono presi da [5].

Nel terzo capitolo do un criterio affinché l'ideale massimale M di un semigruppo numerico S sia normale e uso ciò per caratterizzare la normalità di un generico ideale di S. Rispondo anche alla domanda se M_ν, l'ideale massimale in $S_\nu = \langle g_1, \dots, g_\nu \rangle$, può essere normale quando M_i non è normale per qualche $i < \nu$ (dove M_i denota l'ideale masimale di $S_i = \langle g_1, \dots, g_i \rangle$). In particolare considero il caso di semigruppi numerici con tre generatori e caratterizzo concretamente i semigruppi numerici che hanno l'ideale massimale normale. Quindi do un criterio affinche l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di un anello $R \in \mathcal{R}$ sia normale e studo la connessione tra la normalità di $\mathfrak{m}$ e la normalità di M, dove M è l'ideale massimale di $S = v(R)$. Inoltre provo, in un caso particolare, che $G(\mathfrak{m})$ è Cohen-Macaulay se e solo se $\mathfrak{m}$ è normale, dove $G(\mathfrak{m})$ è l'anello graduato associato di R rispetto a $\mathfrak{m}$. Molti dei risultati presenti nel Capitolo 3 sono presi da [4].

Nel quarto capitolo introduco il concetto di order basis per particolari sottoalgebre di $K[[X]]$ e descrivo un algoritmo per costruire una order basis a partire dai generatori di queste sottoalgebre. Concludo il capitolo fornendo alcune applicazioni. Molti dei risultati presenti nel Capitolo 4 sono presi da [6].

Nel quinto capitolo richiamo alcune nozioni sui semigruppi di $\mathbb{N}^d$ e sugli anelli locali ridotti di dimensione uno e analiticamente non ramificati e introduco uno dei più importanti concetti che usiamo nella tesi, quello di «albero di molteplicità di un anello» (cf. Section 5.5). Molti risultati presenti nel Capitolo 5 sono presi abbastanza fedelmente da [1], dove gli autori trattano il caso più generale di R anello semilocale.

Nel sesto capitolo introduco la disequaglianza (che è stata studiata sotto differenti ipotesi da molti autori) $\lambda_R(\overline{R}/R) \leq t(R)\lambda_R(R/\mathfrak{C})$ (dove $\mathfrak{C} = (R : \overline{R})$ è il conduttore di R), per anelli R come nel Capitolo 5, che sarà il principale oggetto di studio nell'ultimo capitolo. Inoltre definisco $l^*(R) = t(R)\,\lambda_R(R/\mathfrak{C}) - \lambda_R(\overline{R}/R)$ e provo che $l^*(R) \leq (t(R) - 1)(\lambda_R(R/\mathfrak{C}) - 1)$ (cf. Proposition 6.1.5). Infine mostro che se ci restringiamo al caso $R \in \mathcal{R}$, allora per $l^*(R) = t(R)$ e $\lambda_R(R/\mathfrak{C})$ sufficientemente grande tali anelli non possono esistere.

Nel settimo capitolo provo che, fissati tre numeri naturali n, t, l^* tali che $n \geq 1$, $t \geq 1$ e $0 \leq l^* \leq (t-1)(n-1)$, è possibile costruire un anello R come sopra tale che $\lambda_R(R/\mathfrak{C}) = n$, $t(R) = t$ e $l^*(R) = l^*$. Per fare questa costruzione uso l'interconnessione esistente tra R, il suo semigruppo di valori associato e il suo albero di molteplicità. I principali risultati riguardanti l'ultima parte del Capitolo 6 e l'intero Capitolo 7 sono presi da [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] BARUCCI V., D'ANNA M. e FRÖBERG R., *Analytically unramified one-dimensional semilocal rings and their value semigroups*, J. Pure Appl. Algebra, **147** (2000), 215-254.

[2] D'ANNA M. e MICALE V., *Construction of one-dimensional rings with fixed value of $t(R)\,\lambda_R(R/\mathfrak{C}) - \lambda_R(\overline{R}/R)$*, International Journal of Commutative Rings, **2** (2002).

[3] GARCIA A., *Cohen-Macaulayness of the associated graded of a semigroup ring*, Comm. Algebra, **10** (1982), 393-415.

[4] MICALE V., *Normal maximal ideal in one-dimensional local rings*, International Journal of Commutative Rings, **1** (2002).

[5] MICALE V., *On Monomial Semigroups*, Communications in Algebra (to appear)

[6] MICALE V., MOLICA G. e TORRISI B., *Order bases of subalgebras of* $k[[X]]$, International Journal of Commutative Rings, **1** (2002).

[7] MOLINELLI S., PATIL D. P. e TAMONE G., *On the Cohen-Macaulayness of the Associated Graded Ring of Certain Monomial Curves*, Contributions to Algebra and Geometry **39** (1998), 433-446.

[8] PFISTER G. e STEENBRINK J. H. M., *Reduced Hilbert scheme for irreducible curve singularities*, J. Pure Appl. Algebra, **77** (1992), 103-116.

Dipartimento di Matematica, Università di Catania
e-mail: vmicale@dmi.unict.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Catania) - Ciclo XIII
Direttore della ricerca: Prof. R. Strano, Università di Catania