BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

STEFANO GALATOLO

Informazione, complessità e caos debole nei sistemi dinamici; teoria e metodi di misura

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 267–270.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 267-270

Informazione, complessità e caos debole nei sistemi dinamici; teoria e metodi di misura.

STEFANO GALATOLO

L' entropia di Kolmogorov h_μ di un sistema dinamico (X, μ, T) dotato di una misura invariante μ puo essere pensata come una misura della flusso medio (rispetto alla misura) di informazione che è necessaria per descrivere l'evoluzione del sistema. In questo approccio la nozione di quantità di informazione sottostante è quella di Shannon. Nella letteratura ci sono risultati (Ruelle-Pesin, vedi ad es [4]) che forniscono legami quantitativi fra la quantità di informazione definita in questo modo e la sensibilità rispetto al dato iniziale del sistema.

Nel lavoro di Brudno [2] si considerano sistemi dinamici topologici (X, T) (dove X è uno spazio metrico compatto e $T: X \to X$ è continua) e si considera la quantità di informazione necessaria per descrivere la dinamica di una orbita basandosi su un'altra nozione di quantità di informazione: la complessita di Kolmogorov (detta anche contenuto algoritmico di informazione).

In sostanza la complessita di Kolmogorov di una stringa di caratteri provenienti da un alfabeto finito è la lunghezza del minimo programma (binario) che eseguito su un opportuno computer fornisce come output la stringa data. Ad esempio, il contenuto algoritmico di informazione della stringa periodica lunga 1000 caratteri

$$s = 1010\ldots 101010101010$$

è piccolo perche questa stringa si ottiene come output del seguente (corto) programma:

$$\text{ripeti 500 volte } \{\text{scrivi “10"}\}.$$

Se invece consideriamo una stringa «random», ad esempio

$$s = 1110010101010110100011001010 0110\ldots$$

molto probabilmente (anche in un senso formale che qui non preciseremo) non ci sarà un programma breve capace di generarla e quindi il suo contenuto algoritmico di informazione sarà paragonabile alla lunghezza della stringa stessa.

Questa nozione di quantità di informazione è puntuale: permette di definire la quantita di informazione di una singola stringa.

Tramite una opportuna costruzione (simile a quella che si fa classicamente per costruire un modello simbolico del sistema in considerazione, suddividendo lo spazio in un numero finito di regioni ed associando ad una orbita lunga n passi la successione delle n regioni incontrate durante la suddetta orbita) si possono fare corrispondere stringhe di caratteri ad orbite di un sistema dinamico.

A questo, punto si puo considerare l'informazione contenuta nelle stringhe associate ad un' orbita e quindi avere una misura della quantità di informazione necessaria per descrivere n passi di una *singola* orbita a meno di una certa approssimazione (data dalla grandezza delle regioni in cui si suddivide lo spazio).

Non esporremo qui la definizione rigorosa, ma riferendoci al discorso euristico fatto sopra indicheremo con $I(x, n, \varepsilon)$ la quantità di informazione necessaria a descrivere n passi dell'orbita di x a meno di una approssimazione ε.

Brudno sostanzialmente dimostra che se su (X, T) si considera una misura invariante ergodica μ e ε è piccolo allora $I(x, n, \varepsilon) \simeq h_\mu n$ per μ-quasi ogni $x \in X$. Dunque se il sistema è compatto e di entropia positiva per quasi ogni orbita l'informazione cresce linearmente ed è proporzionale all'entropia.

Questo risultato, combinato con i teoremi di Ruelle-Pesin e simili dice che se nel nostro sistema dinamico, orbite che partono vicine si allontanano a velocità esponenziale allora la quantità di informazione (algoritmica) necessaria a descriverle cresce linearmente con il tempo.

Nel caso in cui lo spazio non sia compatto la definizione di Brudno perde significato. In [3] e nella presente tesi si considera una definizione alternativa di contenuto di informazione delle orbite che è equivalente a quella di Brudno nel caso compatto e che estende la definizione in modo significativo al caso non compatto.

Questa definizione fa ricorso della nozione di *Struttura Computabile*. Questa nozione viene introdotta per estendere il concetto di *funzione calcolabile* da insiemi numerabili ad insiemi continui (vedi anche [5]).

Tramite le strutture computabili quindi si introduce il concetto di mappa *costruttiva* (in parole povere una mappa costruttiva è una applicazione continua fra spazi dotati di una struttura computabile la quale puo essere definita utilizzando una quantità finita di informazione).

Il ricorso alle strutture computabili ed al concetto di mappa costruttiva permette di affrontare un altro, piu importante problema: quello del legame fra informazione e sensibilità al dato iniziale nei sistemi di entropia zero.

Lo studio dei sistemi di entropia zero è motivato da numerose connessioni con problemi applicativi: fenomeni di transizione di fase (transizione alla turbolenza), autoorganizzazione, formazione di strutture complesse, diffusione aomala ed altro. Su questo la letteratura (soprattutto quella fisica) è in veloce sviluppo. Per lo studio di questi fenomeni sono stati proposti vari strumenti, fra cui citiamo solo le entropie generalizzate (citiamo solo quella di Tsallis ad esempio). In questo campo comunque i risultati rigorosi sono pochissimi.

La costruzione detta sopra permette di considerare come indicatore del tipo di caos (più o meno sviluppato) presente nel nostro sistema dinamico l'andamento asintotico della quantita'di informazione necessaria per descrivere una certa orbita, cioe si considera l'andamento asintotico di $I(x, n, \varepsilon)$ quando n cresce (e ε è piccolo).

Questo permette di definire quantità puntuali (complessità generalizzate delle orbite) che sono invarianti per isomosfismi topologici. Inoltre utilizzando una costruzione simile a quella della entropia locale di Brin-Katok ([1]) si possono definire indicatori puntuali della sensibilità al dato iniziale.

Sotto l'assunzione che la mappa che descrive la dinamica sia costruttiva si possono dimostrare relazioni puntuali fra questi indicatori di sensibilità e complessità che coinvolgono anche la dimesione di Hausdorff dello spazio sottostante. Le relazioni sono del tipo:

$$dimensione \times indicat.\ di\ sensib.\ minima\ in\ x \leqslant compless.\ dell'\,orbita\ di\ x$$

$$compless.\ dell'\,orbita\ di\ x \leqslant dimensione \times indicat.\ di\ sensib.\ massima\ in\ x$$

queste relazioni danno informazioni non banali sia nel caso di entropia positiva, sia nel caso di entropia zero.

Ad esempio, se il sistema dinamico ha sensibiltà al dato iniziale di tipo "stretched exponential", cioe due orbite che partono vicine si allontanano a velocità subesponenziale di tipo $\Delta x(t) \sim \Delta x(0)\, 2^{t^{\alpha}}$ le nostre relazioni dicono che l'informazione necessaria per descrivere l'orbita crescera'come una legge a potenza: $I(x, t, \varepsilon) \simeq t^{\alpha}$ $(\alpha < 1)$.

Questo è un caso che si presenta effettivamente in una classe di sitemi piuttosto famosi: le mappe di Manneville Pomeau; sistemi del tipo $([0, 1], T)$, dove $T(x) = x + x^{z}$ (mod 1) e $z > 2$. Questi sistemi sono stati introdotti come modelli semplificati di turbolenza intermittente. In seguito sono stati molto studiati nella letteratura fisica e matematica ed usati come modelli di vari fenomeni in cui ci sia un comportamento debolmente caotico intermittente. Nella presente tesi si studia, in modo rigoroso la complessità delle orbite (l'andamento asintotico della qualtità di informazione necessaria a descriverle) di questi sistemi e di altri sistemi di entropia zero quali la mappa logistica all'orlo del caos.

Le relazioni trovate sopra fra i vari indicatori di caos e l'invarianza di queste quantità indicano che la quantità di informazione contenuta in un'orbita é un indicatore importante del tipo di sistema che si considera.

Purtroppo la complessità di Kolmogorov non è calcolabile in pratica: non esiste nessun algoritmo capace di calcolare la complessità di una stringa data.

Per questo le quantita che sono state considerate sopra non possono essere calcolate in pratica, su dati sperimentali. A questo problema si puo parzialmente ovviare mediante gli algoritmi di compressione dati. Consideriamo un algoritmo di compressione reversibile (come gli "zippatori" che sono in ogni computer). Supponiamo di comprimere una stringa. Poiche nella stringa compressa si trova tutta l'informazione necessaria per ricostruire la stringa originale allora possiamo pensare la lunghezza della stringa compressa sia una stima (per eccesso) della quantita di informazione contenuta nella stringa originale. Naturalmente questa stima sarà buona se l'algoritmo scelto è capace di comprimere la stringa in modo efficiente.

Possiamo quindi ripetere la stessa costruzione fatta prima sostituendo alla complessità di Kolmogorov questa nuova misura computabile dell' informazione, costruendo cosi altri indicatori di complessità delle orbite. Anche questi saranno invarianti nella categoria dei sistemi dinamici topologici.

Nei casi di entropia positiva gli algoritmi di compressione piu conosciuti sono gia ottimali, si dimostra che in questi casi si ha un risultato analogo a quello di Brudno, ottenendo che la complessità media delle orbite è uguale all' entropia di Kolmogorov del sistema.

Nei casi di entropia zero per ottenere una stima accurata dell'informazione abbiamo bisogno di algoritmi capaci di comprimere in modo molto efficiente stringhe molto regolari. Nella presente tesi si discutono criteri di ottimalità per questi algoritmi e si dimostra l'esistenza di un tale algoritmo ottimale. Questo algoritmo pero non puo essere usato in pratica a causa della sua alta complessità computazionale.

Abbiamo allora implemantato un altro algoritmo, comunque molto efficiente nel comprimere stringhe regolari, con questo algoritmo sono stati fatti esperimenti simulando vari tipi di sistemi debolmente caotici; i risultati si accordano con le previsioni teoriche nei casi in cui queste sono disponibili.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRIN M., KATOK A., *On local entropy*, Lecture notes in Mathematics, **1007** (1983), 30-38.

[2] BRUDNO A.A., *Entropy and the complexity of the trajectories of a dynamical system*, Trans. Moscow Math. Soc., **2** (1983), 127-151.

[3] GALATOLO, S., ORBIT COMPLEXITY BY COMPUTABLE STRUCTURES, NONLINEARITY, **13** (2000), 1531-1546.

[4] MANE, R., ERGODIC THEORY AND DIFFERENTIABLE DYNAMICS, SPRINGER-VERLAG, BERLIN (1987), 1-317.

[5] POUR-EL M., RICHARDS J., COMPUTABILITY IN ANALYSIS AND PHISICS, Springer, Berlin (1988).

Dipartimento di Matematica, Universita di Pisa
e-mail: galatolo@dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Vieri Benci