Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Michele D'Amico

Aspetti computazionali delle Funzioni di Taglia

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 247–249.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_247_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 247-249

Aspetti computazionali delle Funzioni di Taglia.

MICHELE D'AMICO

In questa tesi si sono analizzati due aspetti importanti relativi alle Funzioni di Taglia: il calcolo esplicito e l'analisi delle metriche usate per il loro confronto. Le Funzioni di Taglia sono uno strumento topologico-geometrico usato per confrontare le forme [1]; in ambito applicativo (solitamente per affrontare problemi di shape-matching [4]) vengono definite a partire da un Grafo di Taglia (G, φ) composto da un grafo G e una funzione reale $\varphi : V(G) \to \mathbb{R}$ detta funzione misurante. La Funzione di Taglia $l_{(G, \varphi)}$ del Grafo di Taglia (G, φ), che è definita sul piano reale e assume valori naturali, può essere anche rappresentata mediante una successione di punti in $\mathbb{R}^2$ quozientata rispetto alle permutazioni [2].

1. – Calcolo della Funzione di Taglia.

Dal punto di vista puramente applicativo la complessità asintotica del calcolo delle Funzioni di Taglia riveste sicuramente un ruolo molto importante. In quest'ottica sono stati realizzati due nuovi algoritmi efficienti che, dato un Grafo di Taglia, calcolano i punti della successione relativi alla Funzione di Taglia detti *punti angolari*. In particolare, è stato introdotto lo strumento della Δ^*-riduzione che permette di semplificare il Grafo di Taglia, riducendone il numero di nodi e archi, lasciando invariata la Funzione di Taglia; grazie ad una nuova linea dimostrativa è stato possibile utilizzare la nota soluzione ottima del problema di union-find proposta da Tarjan. Da questo approccio si sono ottenuti due algoritmi (di cui uno ottimizzato nelle strutture dati per casi particolari molto frequenti) che permettono di eseguire il calcolo dei punti angolari della Funzione di Taglia con una complessità computazionale di

$$O(n \log n + m\alpha(2m + n, n))$$

con n numero dei nodi di G, m numero degli archi di G e α inversa della funzione di Ackermann (considerata nella pratica un termine costante in quanto al più 4 per tutte le dimensioni di problemi affrontabili); si tratta di un risultato asintotico migliore di quelli noti in letteratura (si veda ad esempio [3]) in quanto le soluzioni proposte in precedenza hanno ordini di grandezza $O(n^3)$. Inoltre, sempre in questa parte, sono state ampiamente studiate le proprietà della Δ^*-riduzione introdotta:

1. esistenza;
2. unicità a meno di isomorfismi;
3. caratterizzazione dei Grafi di Taglia totalmente Δ^*-ridotti.

2. – Metriche e Funzioni di Taglia.

Un altro aspetto decisamente importante nell'applicazione delle Funzioni di Taglia a problemi di shape-matching è la costruzione e l'analisi delle metriche utilizzate per confrontarle. Il primo passo è stato quello di costruire uno strumento flessibile per definire pseudo-(quasi)metriche estese su insiemi molto generici in maniera intuitiva. Successivamente ci si è preoccupati di introdurre definizioni per la valutazione qualitativa di queste metriche. Infine si sono studiate le proprietà delle metriche più utilizzate nelle applicazioni.

Per costruire in maniera facile e intuitiva delle metriche anche su insiemi molto particolari (come le successioni di punti del piano quozientate sulle permutazioni, grafi, famiglie di sottoinsiemi di spazi metrici, etc.) si è definita una assiomatica che, data una categoria piccola $\mathbb{A}$ e una funzione $F : \mathrm{Mor}(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ (con opportune proprietà), permette di costruire una pseudo-(quasi)metrica estesa sull'insieme degli oggetti di $\mathbb{A}$. L'idea è quella di pesare i morfismi che mandano un $\mathbb{A}$-oggetto in un altro $\mathbb{A}$-oggetto mediante la funzione F; la distanza tra due $\mathbb{A}$-oggetti A e B viene definita come l'inf sui pesi dei morfismi che mandano A in B. Questo approccio permette di far rientrare nella stessa assiomatica metriche note definite su sottoinsiemi di spazi metrici, come, ad esempio, quella di Hausdorff e quelle di matching; infine, la flessibilità di questo strumento ha permesso di costruire in maniera semplice e naturale diverse metriche nell'insieme delle Funzioni di Taglia rappresentate come successioni di punti quozientate rispetto alle permutazioni.

Gli strumenti qualitativi introdotti per la valutazione delle metriche sull'insieme delle Funzioni di Taglia sono stati i seguenti:

- resistenza al rumore (se si varia di poco il Grafo di Taglia la distanza tra le Funzioni di Taglia varia di poco);
- consistenza (se le Funzioni di Taglia sono poco distanti esiste un Grafo di Taglia che, variando di poco la funzione misurante, genera entrambe le Funzioni di Taglia).

Si tratta, in realtà, di concetti noti che sono stati adattati alle Fuzioni di Taglia e facilmente estendibili alla teoria della Taglia in generale. La resistenza al rumore non è altro che la continuità della metrica, mentre la consistenza verifica se il problema inverso è ben posto. Con queste notazioni si è anche introdotto il concetto di metrica intrinseca alle Funzioni di Taglia definita per essere implicitamente sia resistente al rumore sia consistente; si tratta di una metrica difficilmente calcolabile direttamente in base alla sua definizione ma, come dimostrato successivamente, uguale ad una metrica calcolabile facilmente in maniera diretta.

Nell'ultima parte della tesi vengono verificate le proprietà di alcune metriche tra le più utilizzate per confrontare le Fuzioni di Taglia. In particolare possiamo riassumere i risultati nella maniera seguente:

- la distanza $\mathcal{L}^p$ tra Funzioni di Taglia non è né resistente al rumore né consistente;
- la distanza di Hausdorff tra Funzioni di Taglia è resistente al rumore ma non consistente;
- la distanza di bottleneck-matching tra Funzioni di Taglia (calcolabile con tecniche di geometria computazionale o teoria dei grafi) è resistente al rumore, consistente e uguale alla distanza intrinseca.

In particolare il risultato più difficile da ottenere è stato quello di resistenza al rumore della distanza di bottleneck-matching (con corollario conseguente di resistenza al rumore della distanza di Hausdorff). Infatti, ogni tentativo di dimostrazione diretta non ha portato ad alcun risultato. La linea dimostrativa finale che si è utilizzata è stata quella di vedere la variazione della funzione misurante da φ a ψ in maniera continua nel tempo t in $[0, 1]$ e considerare le funzioni misuranti $\varphi_t(v) = (1-t)\,\varphi(v) + t\psi(v)$ al tempo t. Grazie a questo approccio è stato possibile dimostrare un lemma locale di resistenza al rumore e quindi ottenere semplicemente il teorema nel caso generale utilizzando la compattezza di $[0, 1]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] FROSINI P. e LANDI C., *Size Theory as a Topological Tool for Computer Vision*, Pattern Recognit. Image Anal., **9** (1999), 596-603.

[2] FROSINI P. e LANDI C., *Size Functions and Formal Series*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **12** (2001), 327-349.

[3] FROSINI P. e PITTORE M., *New methods for reducing size grphs*, Int. J. Comput. Math., **70** (1999), 505-517.

[4] VELTKAMP R. e HAGEDOORN M., *State-of-the-art in shape matching*, Technical Report UU-CS-1999-27, Utrecht University, the Netherlands (1999).

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: damico@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica Computazionale (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Massimo Ferri, Università di Bologna
Relatore: Prof. Patrizio Frosini, Università di Bologna