Filomena Cianciaruso

Il metodo di Newton-Kantorovich ed alcune sue applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 243–246.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_243_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 243-246

Il metodo di Newton-Kantorovich ed alcune sue applicazioni.

FILOMENA CIANCIARUSO

Obiettivo principale di questa tesi è l'approssimazione di zeri di operatori non lineari tra spazi di Banach. Nella prima parte di questo lavoro di tesi, abbiamo ottenuto alcuni risultati di convergenza locale per le approssimazioni di Newton-Kantorovich al variare di condizioni di regolarità sulla derivata dell'operatore considerato. Nella seconda parte, abbiamo applicato il metodo di Newton-Kantorovich ad una classe di equazioni integro-differenziali di tipo misto ed ad una classe di equazioni integrali singolari con shift.

1. – Risultati di convergenza locale.

Il metodo iterativo, definito a partire da un punto fissato x_0 tramite la successione

$$x_n = x_{n-1} - F'(x_{n-1})^{-1} F(x_{n-1}), \qquad n \in N,$$

è stato introdotto da Newton nel 1669 e, indipendentemente, da Raphson nel 1690, allo scopo di approssimare le radici di un'equazione algebrica di grado arbitrario ed è noto come *metodo di Newton* o *di Newton-Raphson*.

Nel 1948, Kantorovich estende il metodo, poi ribattezzato *di Newton-Kantorovich*, agli operatori non lineari tra spazi di Banach e dimostra un teorema di convergenza del metodo per operatori con derivata seconda limitata o, equivalentemente, con derivata prima lipschtziana.

A questo fondamentale teorema, fanno seguito svariati risultati che assicurano la convergenza del metodo di Newton-Kantorovich o di sue varianti sotto diverse condizioni di regolarità sulla derivata dell'operatore.

I risultati di convergenza esistenti in letteratura si possono classificare in risultati di convergenza locale e semilocale.

Nell'ambito della teoria dei metodi iterativi, un teorema si dice *di convergenza locale* se, supposto che la soluzione x_* esista e che l'approssimazione iniziale x_0 sia sufficientemente vicina a x_*, garantisce la convergenza del metodo.

Un teorema si dice invece *di convergenza semilocale* se non si suppone a priori che la soluzione esista e le ipotesi coinvolgono solo l'approssimazione iniziale x_0.

In questa tesi abbiamo stabilito, in collaborazione con E. De Pascale e P.P. Zabreiko [2], alcuni risultati di convergenza locale. Supposta, infatti, l'esistenza di una soluzione x_* dell'equazione $F(x) = 0$, abbiamo ottenuto interessanti stime sulla convergenza delle approssimazioni di Newton-Kantorovich e del raggio della *palla di attrazione*.

La palla di attrazione di una soluzione x_* è la più grande palla aperta B_a di centro x_* tale che, comunque si scelga l'approssimazione iniziale x_0 in B_a, le approssimazioni di Newton-Kantorovich convergono ad x_*.

Esponiamo brevemente il problema considerato.

Supponiamo che l'operatore F sia definito in una palla chiusa di centro x_* e raggio R e Fréchet differenziabile nei punti interni della palla.

È noto che, se la derivata dell'operatore F soddisfa un'ipotesi di lipschtzianità in un intorno di x_*, la convergenza delle approssimazioni di Newton-Kantorovich è quadratica. Tuttavia, se non è soddisfatta quest'ipotesi di regolarità, la convergenza della successione può avere un andamento del tutto arbitrario.

Infatti non è difficile provare che, se x_n è una successione decrescente e convergente a 0 con un andamento qualsiasi, esistono infinite funzioni F, non identicamente nulle, le cui approssimazioni di Newton-Kantorovich coincidono con x_n.

Posto allora:

$$\theta(r) = \sup_{\|x - x_*\| \leq r} \|x - x_* - F'(x)^{-1}(F(x) - F(x_*))\| .$$

è evidente che:

$$\|x_n - x_*\| \leq \theta(\|x_{n-1} - x_*\|), \qquad n \in N,$$

da cui si evince che l'analisi del comportamento della successione delle approssimazioni successive di $r_n = \theta(r_{n-1})$ può risultare molto utile ai fini dello studio della convergenza della successione x_n.

La funzione θ è fortemente legata anche al raggio r_a della palla di attrazione B_a; infatti, il numero positivo:

$$r_\theta = \sup\{r : 0 < r \leq R,\ \theta(r) < r\},$$

dà una stima inferiore di r_a sufficientemente accurata.

Determinare, però, l'espressione esplicita della funzione θ non è un problema di facile risoluzione; in [2], a seconda di alcune proprietà di regolarità sulla derivata dell'operatore considerato, abbiamo quindi stimato la funzione θ mediante funzioni più facilmente determinabili.

2. – Applicazioni del metodo di Newton-Kantorovich.

Il metodo di Newton-Kantorovich risulta essere ancora oggi uno tra i più efficaci metodi di approssimazione per soluzioni di equazioni in spazi di Banach. In questa tesi, ne diamo due esempi applicando il metodo ad una classe di equazioni integro-differenziali di tipo misto ed ad una classe di equazioni integrali singolari con shift.

Nell'ambito della teoria delle equazioni integro-differenziali di tipo misto, l'attenzione degli studiosi è spesso rivolta a dimostrare l'esistenza di una soluzione massimale e minimale attraverso tecniche di monotonia che, però, richiedono già in partenza l'esistenza di una supersoluzione e di una subsoluzione.

Proprio questo aspetto ci ha motivato ad applicare il metodo di Newton-Kantorovich a questo tipo di equazioni.

Infatti, esistono in letteratura molti risultati di convergenza semilocale che, oltre a garantire la convergenza del metodo, stabiliscono l'esistenza della soluzione.

L'equazione studiata con E. De Pascale in [3] è un'equazione integro-differenziale di tipo misto:

$$u' = f(t, u, Tu, Su), \qquad t \in [0, 1]$$

dove u è una funzione da $I := [0, 1]$ in $\mathcal{R}$, $f : \mathfrak{I} \times \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$, T e S sono operatori da $\mathcal{C}(I)$ in se stesso definiti da:

$$Tu(t) := \int_0^t K(t, s)\, u(s)\, ds, \qquad Su(t) := \int_0^1 M(t, s)\, u(s)\, ds,$$

con K e M funzioni continue.

I problemi considerati sono di due tipi: un problema di Cauchy ed un problema di valori al bordo.

In modo naturale, abbiamo associato all'equazione considerata l'operatore:

$$u \to F(u)(t) = u'(t) - f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t)), \qquad u \in D(F)$$

dove il dominio di F tiene conto di volta in volta del tipo di problema considerato (di Cauchy o di valori al bordo).

Dopo aver determinato condizioni sui coefficienti dell'equazione affinchè la derivata dell'operatore soddisfi un'ipotesi di Hölder locale del tipo

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq k(r) \|u - v\|^\theta, \qquad 0 < \theta \leq 1$$

con k una funzione positiva e crescente, abbiamo studiato il problema dell'invertibilità di $F'(u_0)$, dove u_0 è un punto fissato del dominio di F. Tale problema è stato trasformato in un problema di punto fisso. Sia per il problema di Cauchy che per quello di valori al bordo, abbiamo utilizzato una generalizzazione del teorema 2 in [4] nel caso in cui la derivata dell'operatore sia localmente hölderiana.

Nell'ultima parte della tesi, abbiamo applicato il metodo di Newton-Kantorovich ad una classe di equazioni integrali singolari con shift [1].

L'equazione, studiata in uno spazio di Hölder generalizzato $H_\varphi(\Gamma)$, è della forma:

$$C(u)(t) := F(t, u(t)) + G(\alpha(t), u(\alpha(t)) - \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{H(\tau, u(\tau))}{\tau - t} + \frac{M(\tau, u(\tau))}{\tau - \alpha(t)} \right) d\tau = 0$$

$\forall\, t \in \Gamma$, dove Γ è una curva di Lyapunov di lunghezza Λ nel piano complesso $\mathcal{C}$, F, G, H, e M sono funzioni definite su $\Gamma \times \mathcal{C}$ ed a valori in $\mathcal{C}$ e α è uno shift che conserva l'orientazione su Γ.

Dopo aver determinato alcune condizioni sui cofficienti dell'equazione affinchè la derivata dell'operatore risultasse localmente lipschtziana, abbiamo affrontato il problema dell'invertibilità di $C'(u_0)$ (u_0 fissato).

Questo problema che in letteratura viene di solito trasformato in un problema di valori al bordo di Riemann-Hilbert, è stato risolto in [1] tramite strumenti generali di teoria di operatori lineari. Infine, applicando il teorema 1 in [5], abbiamo ottenuto un risultato di convergenza delle approssimazioni di Newton-Kantorovich all'unica soluzione dell'equazione considerata.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Cianciaruso, *The Newton-Kantorovich Approximations for the Nonlinear Singular Integral Equations with Shift*, The Journal of Integral Equations and Applications, **14**, No. 2 (2002), 199-200.

[2] F. Cianciaruso, E. De Pascale e P.P. Zabreiko, *Some Remarks on the Newton-Kantorovic Approximations*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **48**, No. 1 (2000), 207-215.

[3] F. Cianciaruso e E. De Pascale, *The Newton-Kantorovich Approximations for the Nonlinear Integro-Differential Equations of Mixed Type,* accettato per la pubblicazione su *Ricerche di Matematica.*

[4] E. De Pascale e P.P. Zabreiko, *Convergence of the Newton-Kantorovich Method under Vertgeim Conditions: a New Improvement*, Z. Anal. Anwend., **17**, No. 2 (1998), 271-280.

[5] P.P. Zabreiko e D.F. Nguen, *The Majorant Method in the Theory of Newton-Kantorovich Approximations and the Pták Error Estimates*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **9**, No. 5 e 6 (1987), 671-684.

Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
e-mail: cianciaruso@unical.it
Dottorato di Matematica Applicata ed informatica
(sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Espedito De Pascale, Università della Calabria