Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elena Bonetti

Risolubilità globale di un modello di Frémond dissipativo per leghe metalliche a memoria di forma

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 231–234.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_231_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 231-234

Risolubilità globale di un modello di Frémond dissipativo per leghe metalliche a memoria di forma.

ELENA BONETTI

1. – Introduzione.

Questa tesi ha come oggetto lo studio dettagliato di un modello matematico che descrive il comportamento termomeccanico dei materiali a memoria di forma, leghe metalliche caratterizzate dal fatto che possono essere deformate in modo permanente a causa di sforzi meccanici e riacquisire la forma originaria tramite sollecitazioni termiche. Questo tipo di comportamento è attribuibile ad una transizione di fase che avviene a livello strutturale tra due diverse configurazioni del reticolo cristallino, una simmetrica e prevalente ad alte temperature (austenite) ed una di configurazione gemellare tipica delle basse temperature (martensite). Il legame sforzo-deformazione è fortemente dipendente dalla temperatura e include cicli di isteresi, in quanto le azioni termomeccaniche modificano la composizione del materiale.

Un modello tridimensionale è stato proposto da Frémond nel 1987 per descrivere questa transizione di fase tipo solido-solido da un punto di vista macroscopico. Nella tesi ho considerato un'estensione di questo modello, che è stata elaborata alla luce di una recente teoria termomeccanica sui movimenti microscopici [5] e che complica il corrispondente problema analitico per l'introduzione di alcune nonlinearità di ordine quadratico.

In questo quadro, mi sono occupata di diversi problemi ai limiti e valori inziali, scritti in un'opportuna formulazione variazionale, riferiti al suddetto modello e ottenuti modificando di volta in volta la legge per il flusso di calore, anche includendo effetti di memoria termica. L'oggetto di tali risultati ha riguardato principalmente lo studio dell'esistenza e unicità delle soluzioni. Tuttavia, in alcuni casi, ho esteso la ricerca considerando problematiche relative alla dipendenza continua dai dati nonché ad un'analisi asintotica del problema al tendere a zero di parametri fisicamente significativi, quest'ultima combinata con opportune stime dell'errore.

2. – Il problema termomeccanico.

Si consideri un corpo di lega metallica a memoria di forma, collocato in un dominio regolare e limitato Ω dello spazio euclideo tridimensionale, e se ne studi l'evoluzione termomeccanica durante un intervallo di tempo finito $[0, T]$. Le leggi di bilancio che costituiscono il modello termomeccanico sono, classicamente, l'equazione di bilancio dell'energia interna ed il principio dei lavori virtuali, scritto nel caso quasi-statico. Quest'ultimo è però generalizzato includendo effetti di forze interne che agiscono a livello microscopico nella transizione di fase (cf. [5]). Le relazioni costitutive per le grandezze fisiche in gioco sono derivate da due funzionali di energia, l'energia libera e lo pseudo-potenziale di dissipazione. Il primo descrive lo stato di equilibrio del sistema e dipende dalle seguenti variabili di stato: la temperatura assoluta θ, il tensore di deformazione $\varepsilon(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u}$ è il vettore dei piccoli spostamenti), il gradiente della deformazione $\nabla \operatorname{tr} \varepsilon$ (cf. teoria del secondo gradiente), le proporzioni volumetriche di due sole varianti di martensite (β_1, β_2) e di austenite β_3 e i loro gradienti $\nabla\beta_i$, $i = 1, 2, 3$. Il funzionale dell'energia libera è dato dalla somma delle energie specifiche delle tre fasi, pesate per le opportune proporzioni volumetriche, e da un'energia di interazione, che somma contributi quadratici di interfaccia per le fasi e la funzione indicatrice di un convesso K di $\mathbf{R}^2$. Tale funzione forza le proporzioni di fase β_i ad assumere valori in $[0, 1]$ e tali che la loro somma sia 1, e corrisponde ad un vincolo meccanico interno che garantisce consistenza fisica al modello. L'evoluzione termomeccanica del sistema è invece descritta dallo pseudo-potenziale di dissipazione, che dipende dalle variabili dissipative fissate, cioè le derivate in tempo delle proporzioni volumetriche delle fasi e dei loro gradienti β_{i_t}, $\nabla\beta_{i_t}$, $i = 1, 2, 3$ (legate a velocita microscopiche) e il gradiente della temperatura $\nabla\theta$ (legato alla legge di flusso del calore). Lo pseudo-potenziale di dissipazione è in generale una funzione convessa rispetto alle variabili dissipative, non negativa e con minimo che vale 0 ed è assunto in assenza di dissipazione. Queste proprietà, insieme alla positività della temperatura, garantiscono che il modello introdotto sia termodinamicamente consistente.

Il risultante sistema di equazioni alle derivate parziali è il seguente (per comodità di notazione pongo $\chi_1 = \beta_1 + \beta_2$ e $\chi_2 = \beta_2 - \beta_1$)

$$
(1)\qquad (c_s - \theta\alpha''(\theta)\operatorname{div}\mathbf{u}\chi_2 + \theta\lambda''(\theta)(1-\chi_1))\,\theta_t + \operatorname{div}\mathbf{q} = \\
r + \theta\alpha'(\theta)\,\chi_2 \operatorname{div}\mathbf{u}_t + \theta\alpha'(\theta)\operatorname{div}\mathbf{u}\chi_{2_t} + \theta\lambda'(\theta)\,\chi_{1_t} + \zeta\sum_{i=1}^{2}|\chi_{i_t}|^2
$$

$$
(2)\qquad \zeta\begin{pmatrix}\chi_{1_t}\\ \chi_{2_t}\end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix}\Delta\chi_{1_t}\\ \Delta\chi_{2_t}\end{pmatrix} - \eta\begin{pmatrix}\Delta\chi_1\\ \Delta\chi_2\end{pmatrix} + \partial I_K(\chi_1, \chi_2) + \begin{pmatrix}\lambda(\theta)\\ \alpha(\theta)\operatorname{div}\mathbf{u}\end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},
$$

$$
(3)\qquad \operatorname{div}(-\nu\Delta\operatorname{div}\mathbf{u}\mathbf{1} + \lambda_L\operatorname{div}\mathbf{u}\mathbf{1} + 2\mu_L\varepsilon(\mathbf{u}) + \alpha(\theta)\,\chi_2\mathbf{1}) + \mathbf{G} = \mathbf{0}\,,
$$

con associate condizioni iniziali e al contorno fisicamente significative. Le funzioni reali λ e α sono legate, rispettivamente, all'energia di transizione di fase e al coefficiente di espansione termica. Le costanti λ_L e μ_L sono le costanti di Lamé, $c_s > 0$ la capacità di calore, ζ, δ, ν costanti positive; r rappresenta una sorgente esterna di calore, h il flusso attraverso il bordo, $\mathbf{G}$ una forza di volume e $\mathbf{g}$ una forza di superficie entrambe applicate dall'esterno sul corpo. In (1) non ho esplicitato il flusso di calore $\mathbf{q}$, in quanto nel seguito considero diverse leggi di flusso. Infine ricordo che ∂I_K denota il sottodifferenziale della funzione indicatrice di K che è definito per $(\chi_1, \chi_2) \in K$ e vale: $\partial I_K(\chi_1, \chi_2) = (0, 0)$ se (χ_1, χ_2) sta all'interno di K, mentre è dato dal cono delle direzioni normali al bordo se (χ_1, χ_2) appartiene al bordo del convesso.

3. – Risultati analitici.

Per dovere di sintesi e di chiarezza, mi limito in questa sessione ad enunciare i risultati principali che ho ottenuto nel lavoro di tesi, trascurando di dettagliarne la natura tecnica e le dimostrazioni. In particolare, ho preferito evitare di dare ipotesi dettagliate sui dati, che sono da intendersi sufficientemente regolari, e sulla regolarità delle soluzioni ottenute. Per questi e per gli enunciati precisi dei teoremi, nonché per la dimostrazione degli stessi, rimando direttamente alla bibliografia.

Per quanto riguarda le ipotesi che ho assunto sui dati mi limito a richiamare alcune proprietà di α e λ legate alla natura termomeccanica del problema. La funzione α è una funzione non negativa, non crescente, che si annulla per temperature $\theta \geq \theta_c$, dove la temperatura di Curie θ_c è strettamente maggiore della temperatura di transizione di fase θ^*. La funzione λ, invece, è una funzione crescente e uniformemente limitata tale che $\lambda(\theta^*) = 0$. Entrambe devono essere assunte sufficientemente regolari e tali che la loro norma sia abbastanza piccola, in relazione alle altre quantità fisiche in gioco. I principali risultati che ho ottenuto sono elencati di seguito in relazione alle diverse scelte per la legge di flusso di calore.

- Legge di flusso di calore di Fourier

$$\mathbf{q} = -k_0 \nabla\theta, \qquad k_0 > 0, \tag{4}$$

– Esistono $(\theta, \mathbf{u}, \chi_1, \chi_2)$ soluzioni del problema astratto associato a (1)-(3). Tale teorema di *esistenza* è stato dimostrato tramite un'opportuna discretizzazione in tempo e una tecnica di stime a priori e passaggio al limite [4].

– Nel caso in cui si trascurino, per l'ipotesi delle piccole oscillazioni, i termini dissipativi di ordine quadratico in (1) ($\zeta = 0$ in (1)), la soluzione è *unica* (risultato dimostrato con opportune stime contrattive locali, poi iterate sull'intero intervallo di tempo $(0, T)$) [3].

- Legge di Coleman-Gurtin (si aggiunge il contributo di un termine di memoria)

$$\mathbf{q} = -k_0 \nabla\theta - k * * \nabla\theta\,, \tag{5}$$

dove $*$ denota l'usuale convoluzione su $(0, t)$ e k è un nucleo di memoria sufficientemente regolare. Sotto opportune ipotesi sui dati e k, assumendo di trascurare i termini dissipativi di ordine 2 ($\zeta = 0$ in (1)) e di tralasciare la dissipazione per i gradienti delle fasi ($\delta = 0$ in (2)),

– *Esiste* una soluzione del risultante problema astratto. Nel caso di ipotesi di regolarità ulteriori sui dati iniziali tale soluzione *è unica*.

• Legge di flusso di Gurtin-Pipkin

$$\mathbf{q} = -k * \nabla\theta, \qquad k(0) > 0 \tag{6}$$

da cui si ha l'equazione di bilancio dell'energia *iperbolica*.

– *Linearizzando* intorno alla temperatura di transizione di fase l'equazione di bilancio dell'energia (1), iperbolica per ipotesi su k, e ponendo $\delta = 0$, ho ottenuto un risultato di *esistenza, unicità e dipendenza continua* dai dati della soluzione. Tale risultato è provato assumendo condizioni al bordo per il flusso di calore del terzo tipo applicando il teorema del punto fisso di Banach combinato con stime di tipo contrattivo [1].

• Legge di Cattaneo-Maxwell come caso particolare di Gurtin-Pipkin

$$\tau\mathbf{q}_t + \mathbf{q} = -k_0 \nabla\theta, \qquad \mathbf{q}_\tau(t) = \frac{k_0}{\tau}\exp(-t/\tau) * \nabla\theta. \tag{7}$$

– *Analisi asintotica* del risultante problema iperbolico nella temperatura al tendere a zero del parametro di rilassamento τ e del parametro di diffusione ν (cf. (1), (2)). Le soluzioni di tale problema convergono in norme opportune alle soluzioni del corrispettivo problema parabolico con legge di Fourier e senza diffusione per le fasi (sotto ipotesi opportune sulle velocità di annullamento dei due parametri).

– Si sono provate *stime dell'errore* significative (cf. [2]).

BIBLIOGRAFIA

[1] BONETTI E., *Global solution to a Frémond model for shape memory alloys with thermal memory*, Nonlinear Anal., **46** (2001), 535-565.

[2] BONETTI E., *Asymptotics analysis of a diffusive model for shape memory alloys with Cattaneo-Maxwell heat flux law*, Differential Integral Equations, **15** (2002), 527-566.

[3] BONETTI E., *Global solvability of a dissipative Frémond model for shape memory alloys. Part I: mathematical formulation and uniqueness*, Quart. Appl. Math., to appear.

[4] BONETTI E., *Global solvability of a dissipative Frémond model for shape memory alloys. Part II: existence*, Quart. Appl. Math., to appear.

[5] FRÉMOND M., *Non-smooth thermomechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg (2001).

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
e-mail: bonetti@dimat.unipv.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Colli, Università di Pavia