Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Barbara Bianconi

Semicontinuità inferiore per integrali multipli con crescite non standard

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 223–226.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_223_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 223-226

Semicontinuità inferiore per integrali multipli con crescite non standard.

BARBARA BIANCONI

Consideriamo il seguente funzionale integrale $I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$, è una funzione di Carathéodory, $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e Du rappresenta la matrice Jacobiana di u.

Assegnata $\mathcal{U}$, classe delle funzioni ammissibili, si cerca $v \in \mathcal{U}$ tale che

$$I(v) = \inf\{I(u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

Quando $\mathcal{U} = W^{1,p}$ è naturale assegnare condizioni di crescita del tipo:

$$|z|^p - b(x)|s|^\delta \leq F(x, s, z) \leq c(1 + |z|^p) \qquad \delta < p^*,$$

tuttavia vi sono esempi di integrandi che verificano crescite (p-q) oppure non-standard.

(p-q) $\qquad |z|^p \leq F(x, s, z) \leq c(1 + |z|^q) \qquad p < q$

non standard $\qquad \Phi_1(|z|) \leq F(x, s, z) \leq c(1 + \Phi_2(|z|))$

dove $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sono opportune funzioni convesse.

In questa tesi ci siamo interessati della semicontinuità inferiore e dell'esistenza di minimi, attraverso i procedimenti dei Metodi diretti, di funzionali quasi convessi con crescite non standard o generali.

Diamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1. – $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ *si dice* **quasi convessa** *rispetto alla terza variabile z se* $\forall (x_0, y_0, z_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}$ *si ha*

$$F(x_0, y_0, z_0) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega F(x_0, y_0, z_0 + D\phi(s))\, ds$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

DEFINIZIONE 2. – *Una funzione convessa* $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *si dice N-funzione se soddisfa le seguenti condizioni:*

- $\Phi(0) = 0, \quad \Phi(t) > 0$ *per* $t > 0$,
- $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty.$

Chiameremo **Classe di Orlicz** generata dalla N-funzione Φ l'insieme

$K^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ misurabili t.c. $\int_\Omega \Phi(|u(x)|)\, dx < +\infty\}$, a meno di uguaglianza quasi ovunque.

Si chiama **spazio di Orlicz** generato dalla N-funzione Φ, e si indica con $L^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, il più piccolo spazio vettoriale contenente $K^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Infine indicheremo con $W^{1,\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{u \in L^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m) : Du \in L^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m)\}$, lo **spazio di Orlicz-Sobolev**.

DEFINIZIONE 3. – *Una N-funzione Φ si dice di classe Δ_2 se esistono $m > 1$ e $x_0 \geq 0$ tali che $\Phi(tx) \leq t^m \Phi(x)$ per ogni $t > 1$ e $x \geq x_0$.*

Una N-funzione Φ si dice di classe ∇_2 *se esistono $r > 1$ e $x_1 \geq 0$ tali che $\Phi(tx) \geq t^r \Phi(x)$ per ogni $t > 1$ e $x \geq x_1$.*

In [2] si è provato il seguente teorema di semicontinuità inferiore rispetto alla topologia debole* degli spazi di Orlicz-sobolev.

TEOREMA 1. – *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory, quasi convessa rispetto alla variabile z, che soddisfa:*

$$-c_1 \Phi_1(|z|) - c_2 \Phi_2(|y|) - c_3(x) \leq F(x, y, z) \leq g(x, y)(1 + \Phi(|z|)),$$

dove

- *c_1, c_2 sono costanti positive,*
- *$c_3 \in L^1(\Omega)$, $\Phi \in \Delta_2$*
- *Φ_1* e *Φ_2 sono N-funzioni legate a Φ,*
- *$g : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory*

positiva.

Allora il funzionale

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$$

è semicontinuo inferiormente per successioni rispetto alla convergenza debole di $W^1 L^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Il risultato precedente si applica per ottenere un teorema di esistenza di soluzioni per un problema variazionale di tipo Dirichlet [2].

TEOREMA 2. – *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}_+$ di Carathéodory, quasi convessa rispetto alla variabile z, che soddisfa:*

$$-c_1 \Phi_1(|z|) - b(x)\, \Phi_2(|s|) - c_3(x) \leq F(x, s, z) \leq c_2 \Phi(|z|) + b(x)\, \Phi_2(|s|) + c_3(x),$$

$$F(x, s, z) \geq \widetilde{F}(z) - b(x)\, \Phi_2(|s|) - c_3(x)$$

dove c_1, $c_2 > 0$ $c_3 \in L^1(\Omega)$, $\Phi \in \Delta_2$, Φ_1 e Φ_2 sono N-funzioni legate a Φ, b appartiene ad un opportuno spazio di Orlicz ed $\widetilde{F}$ una particolare funzione continua, *allora il problema variazionale*

$$\inf\{I(u): u \in V_0 = u_0 + W_0^1 E^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^m)\}$$

ha soluzione.

È possibile ottenere una diversa prova del teorema di semicontinuità, utilizzando la teoria delle misure di Young.

DEFINIZIONE 4. – *Una misura di Young è una famiglia* $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ *di misure di probabilità su* $\mathbb{R}^m$, tale che per ogni funzione continua $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, *la funzione* $x \mapsto \langle \phi, \nu_x \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)$ *è misurabile.*

Si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 3. – *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un dominio limitato.*
Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \to [0, +\infty]$ *tale che:*

(1) $F(x, s, \lambda)$ *è una funzione di Carathéodory,*

(2) $\exists$ *una funzione di Carathéodory* $E(s, \lambda)$ *tale che,*

$$0 \leqslant F(x, s, \lambda) \leqslant E(x, s)(1 + \Phi(|\lambda|))$$

per q.o. x e $\cup$ (s, λ), $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$,

(3) $\lambda \mapsto F(x, s, \lambda)$ *è quasi convessa, per q.o.* x *e* $\forall$ s.
Allora $\forall$ *successione* $u^j \in W^{1, \Phi, 1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *tale che*

- $u^j \to u$ *in* $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$,
- $\liminf_j \int_\Omega \Phi(|Du^j(x)|)\, dx < +\infty$,

si ha che:

$$I(u) \leqslant \liminf_j I(u^j).$$

Lo strumento fondamentale della prova è contenuto in una disuguaglianza di tipo Jensen:

TEOREMA 4. – *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *limitato, sia* $u^j \in W^{1, \Phi, 1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, *e sia* Φ *una N-funzione di classe* $\Delta_2 \cap \nabla_2$. *Supponiamo che* $u^j \to u$ *fortemente in* $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, *con* $\liminf_j \int_\Omega \Phi(|Du^j(x)|)\, dx < +\infty$.

Sia poi $F : \Omega \times \mathbb{R}^{mn} \to [-\infty, +\infty]$ *tale che:*

(*a*) $F(x, \lambda)$ *è di Carathéodory,*

(*b*) $\exists$ *una funzione* $E : \Omega \to \mathbb{R}$ *misurabile tale che per q.o.* $x \in \Omega$ *e* $\forall$ λ *vale* $|F(x, \lambda)| \leqslant E(x)(1 + \Phi(|\lambda|))$,

(*c*) $\lambda \mapsto F(x, \lambda)$ *è quasi convessa per q.o.* $x \in \Omega$.

Allora si ha che, per q.o. $x \in \Omega$,

$$F\left(x, \int_{\mathbb{R}^{mn}} \lambda d\nu_x(\lambda)\right) \leqslant \int_{\mathbb{R}^{mn}} F(x, \lambda)\, d\nu_x(\lambda)$$

e

$$Du(x) = \int_{\mathbb{R}^{mn}} \lambda\, d\nu_x(\lambda)$$

dove $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ *è la misura di Young generata da* $\{Du^j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Il teorema 4 utilizza un'approssimazione di tipo Lusin per funzioni dello spazio di Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi}$ con funzioni lipschtziane, (vedi Acerbi-Fusco [1]).

TEOREMA 5. – *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *la palla unitaria e sia* $u \in W^{1,\Phi,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, *dove* Φ *è una N-funzione.*

Allora $\forall\, h > 0$ *esistono una funzione* $u_h \in Lip(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *ed un insieme chiuso* $F_h \subseteq \Omega$ *tali che:*

(*a*) $\|\Phi(|Du_h|)\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)} \leqslant \Phi(h)$,

(*b*) $Du = Du_h$ *quasi ovunque su* F_h,

(*c*) $\lim_{h \to +\infty} |\Omega \backslash F_h| = 0$,

infine

(*d*) *se* Φ *è di classe* $\Delta_2 \cap \nabla_2$, *allora* $\lim_{h \to +\infty} \Phi(h)\, |\Omega \backslash F_h| = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ACERBI e N. FUSCO, *An approximation lemma for* $W^{1,p}$ *functions*, Matherial instabilities in continuum mechanics, Proc. Symp. Edinmburg Scotl. 1984/86, (1988), 1-5.

[2] B. BIANCONI, M. FOCARDI, E. MASCOLO, *Existence of minimizer for a class of quasi-convex functionals with non standard growth*, Annali di Mat. Pura e Appl. (2002), to appear.

[3] M. FOCARDI, *Semicontinuity of vectorial functionals in Orlicz-Sobolev spaces*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **XXIX** (1997), 141-161.

[4] M. FOCARDI and E. MASCOLO, *Lower semicontinuity of quasi-convex functionals with non standard growth*, to appear on Journal of Convex Analysis.

[5] P. MARCELLINI, *Approximation of quasi-convex functions and lower semicontinuity of multiple integrals*, Manus.Math., **51** (1985), 1-28.

Dipartimento di Matematica, Università di Ancona
e-mail: bianconi@dipmat.unian.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Elvira Mascolo, Università di Firenze