Bollettino Unione Matematica Italiana

Jiro Takeuchi

Symétrisations indépendantes du temps pour certains opérateurs du type de Schrödinger. I

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-B** (2002), n.1, p. 1–53.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5B_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
(8) 5-B (2002), 1-53

Symétrisations indépendantes du temps pour certains opérateurs du type de Schrödinger (I)

JIRO TAKEUCHI

Dédié à la Mémoire du Professeur Jean Leray

Summary. – *We give sufficient conditions and necessary conditions for the Cauchy problem for certain operators of Schrödinger type to be well posed in the Sobolev spaces. Operators of which we treat are Schrödinger operators with complex-valued vector potentials, those generalizations to 2-evolution operators in the sense of Petrowsky and certain Leray-Volevich systems of linear partial differential operators. The method that we use in this article is time-independent* L^2*-symmetrization of operators which has been proposed in our Notes* [52] *to* [54].

Sunto. – *Si danno condizioni sufficienti e condizioni necessarie affinché il problema di Cauchy per alcuni operatori di tipo Schrödinger sia ben posto in spazi di Sobolev. Gli operatori qui considerati sono operatori di Schrödinger con potenziali vettoriali complessi, una generalizzazione degli operatori di 2-evoluzione nel senso di Petrowsky, e alcuni sistemi tipo Leray-Volevich di operatori lineari a derivate parziali. Il metodo che usiamo in questo articolo è la simmetrizzazione* L^2 *degli operatori non dipendenti dal tempo, che abbiamo già usato nelle Note* [52]-[54].

En vue de la caractérisation du problème de Cauchy pour certains opérateurs (non auto-adjoints) du type de Schrödinger, nous avons proposé dans [52] à [54] une méthode de «L^2-symétrisation indépendante du temps». Les opérateurs qui concernent sont des opérateurs de Schrödinger avec potentiels vectoriels à valeurs complexes et ses généralisations à 2-évolutions du type de Schrödinger et à certains systèmes de Leray-Volevich du type de Schrödinger. Nous nous proposons de donner la rédaction détaillée de cette théorie. Historiquement, en 1981, Mizohata ([35], [36]) a proposé une «L^2-symétrisation dépendante du temps». Suivant la méthode de Mizohata, nous avons donné des conditions suffisantes et des conditions nécessaires de résolubilité du problème de Cauchy dans L^2 ([42], [55]); nous avons proposé une méthode de «L^2-symétrisation dépendante du temps» un peu différente de celle de Mizohata qui améliore des conditions suffisantes de Mizohata. Le présent article présente des conditions qui permettent une L^2-symétrisation indépendante du temps.

TABLE DES MATIÈRES

1. – Opérateurs du type de Schrödinger avec potentiels vectoriels à valeurs complexes.

1.1. – *Introduction et énoncé des résultats.*

1.1.1. On considère un opérateur différentiel:

$$P(x, D_x, D_t) = D_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (D_j - a_j(x))^2 + c(x), \tag{1.1}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $D_x = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = i^{-1} \partial/\partial x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $D_t = i^{-1} \partial/\partial t$, dont les coefficients $a_j(x)$, $c(x)$ sont des fonctions $\mathcal{B}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs complexes; on dit que $c(x)$ est une fonction $\mathcal{B}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ si $c(x)$ est C^∞ et pour tout multi-indice α, $D_x^\alpha c(x)$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$. On dit que l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ défini par (1.1) est un opérateur du type de Schrödinger avec un potentiel vectoriel à valeurs complexes (et avec un potentiel scalaire à valeurs complexes). Nous allons donner des conditions afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps

$$(*) \qquad \begin{cases} P(x, D_x, D_t)\, u(x, t) = f(x, t) \ \text{sur}\ \mathbb{R}^n \times [-T, T] \quad (T > 0), \\ u(x, 0) = u_0(x) \ \text{dans}\ \mathbb{R}^n \end{cases}$$

soit bien posé dans l'espace de Sobolev $H^l(\mathbb{R}^n)$.

On note

$$a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x)) = a^{\mathrm{R}}(x) + i a^{\mathrm{I}}(x),$$

où

$$a^{\mathrm{R}}(x) = (a_1^{\mathrm{R}}(x), \dots, a_n^{\mathrm{R}}(x)) \text{ et } a^{\mathrm{I}}(x) = (a_1^{\mathrm{I}}(x), \dots, a_n^{\mathrm{I}}(x))$$

sont des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1.1.2. Nos conditions s'expriment comme suit.

La première condition suivante est due à Mizohata ([35], [36]).

CONDITION (A.1). – On a

$$\sup_{(x,\,\omega,\,\varrho)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}\times\mathbb{R}^1} \left| \int_0^{\varrho} a^{\mathrm{I}}(x+s\omega)\cdot\omega\, ds \right| < +\infty\,,$$

où S^{n-1} est la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$.

CONDITION (A.2). – Pour tout multi-indice α ($|\alpha| \geqslant 1$), on a

$$\sup_{(x,\,\omega)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} \int_0^{+\infty} |D_x^{\alpha} a^{\mathrm{I}}(x+s\omega)\cdot\omega|\, ds < +\infty\,.$$

CONDITION (A.3). – Pour tout multi-indice α, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x\rangle\, |D_x^{\alpha} a^{\mathrm{I}}(x)|\} < +\infty \quad \text{où } \langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}.$$

CONDITION (A.4). – Pour tout multi-indice α ($|\alpha| \geqslant 1$), on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x\rangle\, |D_x^{\alpha} a^{\mathrm{R}}(x)|\} < +\infty\,.$$

Notre premier résultat s'énonce ainsi:

THÉORÈME 1.1. – *Supposons les conditions* (A.1) *à* (A.4) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* $(*)$ *est bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $l \in \mathbb{R}$. *Plus précisément, pour tout* $f(t) = f(x,t) \in C^1([-T,T]; H^l(\mathbb{R}^n))$ *et tout* $u_0(x) \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n)$, *il existe une solution unique du problème de Cauchy* $(*)$ *telle que*

$$u(t) = u(x,t) \in C^0([-T,T]; H^{l+2}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([-T,T]; H^l(\mathbb{R}^n))$$

et que de plus on ait l'inégalité d'énergie:

$$\|u(t)\|_{(l)} \leq C(T)\left\{\|u(0)\|_{(l)} + \left|\int_0^t \|f(s)\|_{(l)}\, ds\right|\right\}, \qquad t \in [-T, T],$$

où $\|u(t)\|$ *est la* $H^l(\mathbb{R}^n)$*-norme de* $u(t) = u(\cdot, t)$.

Pour démontrer le Théorème 1.1, nous proposons une méthode qui s'appelle une «L^2-symétrisation indépendante du temps» au sens suivant:

Définition 1.2. – On dit que l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ est L^2-symétrisable par un opérateur $K(x, D_x)$ appartenant à $\mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ s'il existe un opérateur pseudo-différentiel $K(x, D_x)$ tel que

(1) $K(x, D_x)$ appartienne à $\mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$,

(2) $K(x, D_x)$ soit inversible dans $\mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$,

(3) $K(x, D_x)$ satisfasse à l'équation suivante:

$$P(x, D_x, D_t)\, K(x, D_x) \equiv K(x, D_x)\, Q(x, D_x, D_t) \quad (\mathrm{mod}\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)), \tag{1.2}$$

où

$$Q(x, D_x, D_t) = D_t + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (D_j - a_j^{\mathrm{R}}(x))^2. \tag{1.3}$$

Historiquement, en 1981, Mizohata ([35], [36]) a proposé une «L^2-symétrisation dépendante du temps»: il existe un opérateur pseudo-différentiel $K_0(x, D_x; t)$ (t: paramètre), borné et inversible dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, satisfaisant à l'équation suivante:

$$P(x, D_x, D_t)\, K_0(x, D_x; t) \equiv K_0(x, D_x; t)\, Q_0(D_x, D_t) \tag{1.4}$$

(modulo un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$), où

$$Q_0(D_x, D_t) = D_t + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n D_j^2 = -\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta_x\right). \tag{1.5}$$

Mizohata ([35], [36]) a proposé les conditions (A.1) et (A.2)$'$ ci-dessous qui assurent une «L^2-symétrisation dépendante du temps» par un opérateur pseudo-différentiel $K_0(x, D_x; t)$ (t: paramètre) appartenant à $\mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$. Takeuchi ([42], [55]) a démontré le Théorème 1.1 par une «L^2-symétrisation dépendante du temps» un peu différente de celle de Mizohata sous des conditions plus fortes que les conditions ci-dessus. C'est Takeuchi ([52] à [54]) qui a proposé deux «L^2-symétrisations indépendantes du temps» pour la première fois en 1992-1993.

On obtient le théorème suivant plus précis qui est au cœur du problème:

THÉORÈME 1.3. – *Supposons les conditions* (A.1) *à* (A.4) *vérifiées. Alors, l'opérateur* $P(x, D_x, D_t)$ *est* L^2*-symétrisable par un opérateur pseudo-différentiel* K *appartenant à* $\mathrm{OP}\,S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n)$ *au sens de la Définition* 1.2.

Les Théorèmes 1.1 et 1.3 ont été énoncés dans Takeuchi [53] avec l'esquisse de ses preuves. Notre résultat principal est le Théorème 1.3 (la symétrisation indépendante du temps) plus précis que le Théorème 1.1.

Au lieu des conditions (A.2) à (A.4), Mizohata ([35], [36]) a proposé une condition suivante:

CONDITION (A.2)′. – Pour tout multi-indice α ($|\alpha| \geqslant 1$), on a

$$\sup_{(x,\,\omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \int_0^{+\infty} |D_x^\alpha a(x + s\omega)|\, ds < +\infty\,.$$

REMARQUE 1.4. – La condition (A.1) est une condition nécessaire afin que le problème de Cauchy $(*)$ soit bien posé dans L^2 (Mizohata [34] à [37]).

1.1.3. Nous donnons d'autres conditions comme suit:

CONDITION (B.1). – Il existe une constante positive ε_0 telle que, pour tout multi-indice α, on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x\rangle^{1+\varepsilon_0} |D_x^\alpha a^{\mathrm{I}}(x)|\} < +\infty\,.$$

CONDITION (B.2). – Pour tout multi-indice α ($|\alpha| \geqslant 1$), on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x\rangle |D_x^\alpha a^{\mathrm{R}}(x)|\} < +\infty\,.$$

Nos résultats s'énoncent ainsi:

THÉORÈME 1.5. – *Supposons les conditions* (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, la conclusion du Théorème* 1.1 *est vérifiée.*

Plus précisément, on obtient le théorème suivant qui est au cœur du problème:

THÉORÈME 1.6. – *Supposons les conditions* (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, l'opérateur* $P(x, D_x, D_t)$ *est* L^2*-symétrisable par un opérateur pseudo-différentiel* K *appartenant à* $\mathrm{OP}\,S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n)$ *au sens de la Définition* 1.2.

Les Théorèmes 1.5 et 1.6 ont été énoncés dans Takeuchi [53] avec l'esquisse de ses preuves. La Condition (B.1) est complètement contenue dans une condition de Doi [8]; le Théorème 1.5 peut être démontré sous la seule Condition (B.1) par la méthode de Doi [8]; mais notre résultat principal est le Théorème 1.6 (la symétrisation indépendante du temps) plus précis que le Théorème 1.5.

1.1.4. Takeuchi [52] a donné une condition suivante qui est plus forte que la Condition (B.1):

CONDITION (B.1)′. – Il existe une constante positive ε_0 telle que, pour tout multi-indice α, on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x \rangle^{1+\varepsilon_0+|\alpha|} \, | D_x^\alpha a^{\mathrm{I}}(x) | \} < +\infty .$$

COROLLAIRE 1.7 (Takeuchi [52]). – *Supposons les conditions* (B.1)′ *et* (B.2) *vérifiées. Alors, la conclusion du Théorème* 1.6 *est vérifiée.*

Pour démontrer le Colloraire 1.7, Takeuchi [52] a proposé une autre méthode de «L^2-symétrisation indépendante du temps». On le verra dans un autre article.

NOTATION (Hörmander [14], Kumano-go [27]). – (1) La classe $S^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \varrho \leqslant 1,\ m \in \mathbb{R}^1)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfaisant aux estimations:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} | D_x^\beta D_\xi^\alpha k(x, \xi) | \leqslant C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m - \varrho|\alpha| + \delta|\beta|} .$$

(2) La classe $\mathrm{OP}\, S^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \varrho \leqslant 1,\ m \in \mathbb{R}^1)$ désigne l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels dont les symboles appartiennent à la classe $S^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Dans la démonstration des Théorèmes 1.1, 1.3, 1.5 et 1.6, on utilise essentiellement le théorème de Calderón-Vaillancourt [4] qui assure que l'opérateur pseudo-différentiel appartenant à la classe $\mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Après avoir transformé l'opérateur P en l'opérateur Q d'après le Théorème 1.3, on peut démontrer le Théorème 1.1 en appliquant le théorème de Hille-Yosida pour l'opérateur $Q + B$, $B \in \mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ sur la théorie de semi-groupes (voir Hille-Phillips [13], Yosida [61]).

Dans cet article, nous nous limitons au problème de Cauchy dans L^2. Dans un article qui est en préparation, nous verrons le problème de Cauchy dans H^∞ en utilisant une symétrisation indépendante du temps (voir aussi Takeuchi [44], [47] à [49]).

NOTES HISTORIQUES. – Takeuchi [41], pour la première fois, a traité du problème de Cauchy pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel vectoriel à valeurs complexes dans le cas où $n = 1$ (voir aussi Takeuchi [42], [43]). Mizohata ([34] à [36]) a donné des conditions suffisantes et des conditions nécessaires, qui sont le point de départ de nos études, afin que le problème de Cauchy $(*)$ soit bien posé dans L^2 (voir aussi Mizohata [37]). Après Mizohata ([34] à [36]), Ichinose ([16] et [17]) a considéré le problème de Cauchy pour le même opérateur dans le cadre H^∞. Takeuchi ([44], [47] à [49]) a aussi considéré le problème de Cauchy pour l'opérateur du type de Schrödinger dans le cadre H^∞; on le traitera dans un autre article. Baba ([1] et [2]) a traité du problème de Cauchy dans L^2 et aussi dans H^∞ par la méthode un peu différente. Hara [11], qui généralise le résultat d'Ichinose [16], a donné une condition nécessaire afin que le problème de Cauchy pour l'opérateur du type de Schrödinger soit bien posé dans H^∞. Tarama [56] a donné d'autres considérations sur le problème de Cauchy pour l'opérateur du type de Schrödinger. Doi ([8], [9]), dans lequel il a traité d'un opérateur plus général, a ajouté une nouvelle considération (dite des «effets régularisants» de solutions) importante pour quelques équations non linéaires dispersives et du type de Schrödinger (voir Constantin-Saut [6], Hayashi-Nakamitsu-Tsutsumi [12], Kato [25], [26], Yajima [60]). Kajitani et Baba [24] a traité du problème de Cauchy pour l'opérateur du type de Schrödinger dans la classe de Gevrey. Ichinose ([18] à [20]) a traité du problème de Cauchy pour l'opérateur du type de Schrödinger dans une variété riemannienne (Voir aussi Ichinose [21] et [22]). Kajitani [23] a traité du problème de Cauchy dans le cadre H^∞ pour un opérateur plus général.

1.2. – L^2-*symétrisation indépendante du temps.*

1.2.1. Le Théorème 1.3 entraîne le Théorème 1.1 immédiatement. Donc, il suffit de démontrer le Théorème 1.3. On suppose les Conditions (A.1) à (A.4) vérifiées.

La fonction

$$\varphi(x, \xi) = \int_0^{-x\cdot\xi/|\xi|^2} a^{\mathrm{I}}(x + s\xi)\cdot\xi\, ds\,, \qquad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash 0) \tag{1.6}$$

satisfait à l'équation:

$$\xi\cdot D_x\varphi(x, \xi) - ia^{\mathrm{I}}(x)\cdot\xi = 0 \tag{1.7}$$

et à la condition initiale:

(1.8) $$\varphi(x,\,\xi)=0 \ \text{ sur } \ \{x\in\mathbb{R}^n;\ x\cdot\xi=0\}\,.$$

Remarquons que $\varphi(x,\,\xi)$ est positivement homogène de degré 0 en $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash 0$: $\varphi(x,\,r\xi)=\varphi(x,\,\xi)$ pour tout $r>0$.

N.B. – La fonction $\varphi(x,\,\xi)$ définie par (1.6) a été donnée pour la première fois par Takeuchi [53].

On pose

(1.9) $$\Phi(x,\,\xi,\,t)=\int_0^t a^{\mathrm{I}}(x+s\xi)\cdot\xi\,ds \ \text{ et } \ \mu(x,\,\xi)=-x\cdot\xi/|\xi|^2 \ \ (\xi\neq 0)\,.$$

Alors, on a, par définition, $\varphi(x,\,\xi)=\Phi(x,\,\xi,\,\mu(x,\,\xi))$. Pour évaluer $D_x^\beta D_\xi^\alpha\varphi(x,\,\xi)$, il nous faut quelques étapes.

1.2.2. Le premier lemme suivant est dû à Mizohata ([35], [36]).

LEMME 1.8. – *Supposons les Conditions* (A.1) *et* (A.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha \Phi(x,\,\xi,\,t)|\leqslant C_{\alpha\beta}\,|t|^{|\alpha|}\,.$$

DÉMONSTRATION. – (i) Vu la Condition (A.1), on a

$$|\Phi(x,\,\xi,\,t)|=\left|\int_0^t a^{\mathrm{I}}(x+s\xi)\cdot\xi\,ds\right|=\left|\int_0^\varrho a^{\mathrm{I}}(x+s\omega)\cdot\omega\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(x,\,\omega,\,\varrho)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}\times\mathbb{R}^1}\left|\int_0^\varrho a^{\mathrm{I}}(x+s\omega)\cdot\omega\,ds\right|<+\infty \ \ (\omega=\xi/|\xi|\,,\ \varrho=t|\xi|)\,.$$

(ii) Vu la Condition (A.2), pour tout multi-indice β tel que $|\beta|\geqslant 1$, on a

$$|D_x^\beta\Phi(x,\,\xi,\,t)|=\left|\int_0^t D_x^\beta a^{\mathrm{I}}(x+s\xi)\cdot\xi\,ds\right|\leqslant\int_0^{|t\xi|}|D_x^\beta a^{\mathrm{I}}(x+s\omega)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{(x,\,\omega)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}}\int_0^{+\infty}|D_x^\beta a^{\mathrm{I}}(x+s\omega)\cdot\omega|\,ds<+\infty \ \ (\omega=\xi/|\xi|)\,.$$

(iii) Vu la Condition (A.2), pour tout multi-indices α et β tels que $|\alpha|\geqslant 1$, on a

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha\Phi(x,\,\xi,\,t)|\leqslant \mathrm{Cte}\left\{\left|\int_0^t s^{|\alpha|}(D_x^{\alpha+\beta}a^{\mathrm{I}})(x+s\xi)\cdot\xi\,ds\right|+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^n\left|\int_0^t s^{|\alpha|-1}(D_x^{\alpha+\beta-e_j}a^{\mathrm{I}})(x+s\xi)\cdot e_j\,ds\right|\right\}=\mathrm{Cte}\left(I_0+\sum_{j=1}^n I_j\right).$$

$$I_0 \leqslant \int_0^{|t|} s^{|\alpha|} \,|(D_x^{\alpha+\beta} a^{\mathrm{I}})(x+s\xi)\cdot\xi|\, ds \leqslant |t|^{|\alpha|} \int_0^{|t|} |(D_x^{\alpha+\beta} a^{\mathrm{I}})(x+s\xi)\cdot\xi|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |t|^{|\alpha|} \int_0^{|t\xi|} |(D_x^{\alpha+\beta} a^{\mathrm{I}})(x+s\omega)\cdot\omega|\, ds \,(\omega = \xi/|\xi|) \leqslant$$

$$\leqslant |t|^{|\alpha|} \sup_{(x,\,\omega)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} \int_0^{\infty} |(D_x^{\alpha+\beta} a^{\mathrm{I}})(x+s\omega)\cdot\omega|\, ds = \mathrm{Cte}\,|t|^{|\alpha|}\,.$$

$$I_j \leqslant \int_0^{|t|} s^{|\alpha|-1} \,|(D_x^{\alpha+\beta-e_j} a^{\mathrm{I}})(x+s\xi)\cdot e_j|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D_x^{\alpha+\beta-e_j} a^{\mathrm{I}}(x)| \left(\int_0^{|t|} s^{|\alpha|-1}\, ds \right) = \mathrm{Cte}\,|t|^{|\alpha|}\,. \qquad \blacksquare$$

LEMME 1.9. – *Supposons les conditions* (A.1) *et* (A.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations*:

$$|D_x^{\beta} D_\xi^{\alpha} D_t^k \Phi(x,\,\xi,\,t)| \leqslant C_{\alpha\beta k} \sum_{0\leqslant l\leqslant \min\{|\alpha|,\,k\}} |t|^{|\alpha|-l}\,|\xi|^{k-l}\,.$$

DÉMONSTRATION. – Dans le cas où $k=0$, le Lemme 1.8 implique les estimations. Désormais, on suppose que $k\geqslant 1$. Vu que $(iD_t)\,\Phi(x,\,\xi,\,t) = a^{\mathrm{I}}(x+t\xi)\cdot\xi$, on a

$$D_x^{\beta} D_\xi^{\alpha} (iD_t)^k \Phi(x,\,\xi,\,t) = D_x^{\beta} D_\xi^{\alpha} (iD_t)^{k-1}\{a^{\mathrm{I}}(x+t\xi)\cdot\xi\} =$$

$$= \sum_{|\gamma|=k-1} D_\xi^{\alpha}\{\xi^{\gamma}(D_x^{\gamma} D_x^{\beta} a^{\mathrm{I}})(x+t\xi)\cdot\xi\}\,.$$

(i) Si $|\alpha|\leqslant k$, on a

$$|D_x^{\beta} D_\xi^{\alpha} (iD_t)^k \Phi(x,\,\xi,\,t)| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \sum_{|\gamma|=k-1} \sum_{j=1}^{n} |t^{|\alpha'|}(D_x^{\alpha'} D_x^{\gamma} D_x^{\beta} a^{\mathrm{I}})(x+t\xi)|\,|D_\xi^{\alpha''}\{\xi^{\gamma+e_j}\}| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} |t|^{|\alpha'|}\,|\xi|^{k-|\alpha''|} = C \sum_{0\leqslant l\leqslant |\alpha|} |t|^{|\alpha|-l}\,|\xi|^{k-l}\,.$$

(ii) Si $|\alpha| > k$, on a

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha (iD_t)^k \Phi(x, \xi, t)| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} \sum_{|\gamma| = k-1} \sum_{j=1}^{n} |t^{|\alpha'|} (D_x^{\alpha'} D_x^\gamma D_x^\beta a^1)(x + t\xi)| \, |D_\xi^{\alpha''} \{\xi^{\gamma + e_j}\}| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{\substack{\alpha' + \alpha'' = \alpha \\ |\alpha''| \leqslant k}} |t|^{|\alpha'|} |\xi|^{k - |\alpha''|} = C \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} |t|^{|\alpha| - l} |\xi|^{k-l}. \quad \blacksquare$$

LEMME 1.10. – *Pour* $\mu(x, \xi) = -x \cdot \xi / |\xi|^2$ $(\xi \neq 0)$, *on a les estimations*:

(i) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^{1 - |\beta|} |\xi|^{-1 - |\alpha|}$ *si* $|\beta| \leqslant 1$,

(ii) $D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu(x, \xi) = 0$ *si* $|\beta| \geqslant 2$.

DÉMONSTRATION. – Vu que $\mu(x, \xi)$ est linéaire en x et positivement homogène de degré (-1) en ξ, on a les estimations. $\blacksquare$

En combinant les Lemmes 1.9 et 1.10, on a les estimations suivantes pour $\varphi(x, \xi) = \Phi(x, \xi, \mu(x, \xi))$ qui est au cœur du problème:

PROPOSITION 1.11. – *Supposons les conditions* (A.1) *et* (A.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations suivantes pour* $\xi \neq 0$:

(i) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha \varphi(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} (\langle x \rangle / |\xi|)^{|\alpha|}$,

(ii) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha (\exp \varphi(x, \xi))| \leqslant C_{\alpha\beta} (\langle x \rangle / |\xi|)^{|\alpha|}$.

DÉMONSTRATION. – (1) Vu le Lemme 1.10 (ii), on a

$$D_x^\beta \varphi(x, \xi) = \sum_{k=0}^{|\beta|} \sum_{\substack{\beta' + \beta'' = \beta \\ |\beta''| = k}} (D_x^{\beta'} (iD_t)^k \Phi)(x, \xi, \mu(x, \xi)) (D_x \mu(x, \xi))^{\beta''}.$$

Compte tenu des Lemmes 1.9 et 1.10, on a

$$|D_x^\beta \varphi(x, \xi)| \leqslant \sum_{k=0}^{|\beta|} \sum_{\substack{\beta' + \beta'' = \beta \\ |\beta''| = k}} |(D_x^{\beta'} (iD_t)^k \Phi)(x, \xi, \mu(x, \xi))| \, |(D_x \mu(x, \xi))^{\beta''}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{|\beta|} \sum_{\substack{\beta' + \beta'' = \beta \\ |\beta''| = k}} |\xi|^k |D_x \mu(x, \xi)|^{|\beta''|} \leqslant C_\beta.$$

(2) Pour tout multi-indice α $(|\alpha| \geqslant 1)$, on a

$$D_\xi^\alpha D_x^\beta \varphi(x, \xi) = \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} C_{\alpha' \alpha''} \times$$

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant |\beta|} \sum_{\substack{\beta' + \beta'' = \beta \\ |\beta''| = k}} D_\xi^{\alpha'} \{(D_x^{\beta'} (iD_t)^k \Phi)(x, \xi, \mu(x, \xi))\} \, D_\xi^{\alpha''} \{(D_x \mu(x, \xi))^{\beta''}\}.$$

Comme $(D_x\mu)^{\beta''}$ est positivement homogène de degré $-|\beta''|$ en ξ, on a

$$|D_\xi^{\alpha''}\{(D_x\mu(x,\xi))^{\beta''}\}| \leqslant C|\xi|^{-(|\alpha''|+|\beta''|)}.$$

Compte tenu de la formule des dérivées de la fonction composée, on a

$$|D_\xi^{\alpha'}\{(D_x^{\beta'}(iD_t)^k\Phi)(x,\xi,\mu(x,\xi))\}| \leqslant C\left(\frac{\langle x\rangle}{|\xi|}\right)^{|\alpha'|}|\xi|^k.$$

Vu que $|\beta''| = k$, on a

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \varphi(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\left(\frac{\langle x\rangle}{|\xi|}\right)^{|\alpha|}.$$

(3) Compte tenu de la formule des dérivées de la fonction composée, on obtient (ii). ■

1.2.3. On définit le symbole $k(x,\xi)$ d'un opérateur pseudo-différentiel $K(x,D_x)$ comme suit:

(1.10) $\quad k(x,\xi) = \exp(\tilde{\varphi}(x,\xi)), \qquad \tilde{\varphi}(x,\xi) = \chi_R(\xi)\,\psi_R(x,\xi)\,\varphi(x,\xi),$

(1.11) $\quad \chi_R(\xi) = \chi(\xi/R), \qquad \psi_R(x,\xi) = \psi(R\langle x\rangle\langle\xi\rangle^{-1}),$

où $\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)=0$ $(|\xi|\leqslant 1)$, $\chi(\xi)=1$ $(|\xi|\geqslant 2)$, $\psi(s)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\psi(s) = 1$ $(s\leqslant 1)$, $\psi(s)=0$ $(s\geqslant 2)$ et $R\geqslant 1$ (assez grand).

Lemme 1.12. – *On a les estimations suivante*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha \psi_R(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{-|\beta|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|},$$

où $C_{\alpha\beta}$ est une constante indépendante de R $(R\geqslant 1)$.

Démonstration. – On a, par définition, $\psi_R(x,\xi) = \psi(R\langle x\rangle\langle\xi\rangle^{-1})$. En posant $s = R\langle x\rangle\langle\xi\rangle^{-1}$, on a $D_x^{e_j}\psi_R(x,\xi) = \psi'(s)\,D_x^{e_j}s$. Vu que $\log s = \log\langle x\rangle - \log\langle\xi\rangle + \log R$, on a $s^{-1}D_x^{e_j}s = \langle x\rangle^{-1}D_x^{e_j}\langle x\rangle$. Plus généralement, on a

$$D_x^{\beta+e_j}D_\xi^\alpha s = D_x^\beta\{(D_\xi^\alpha s)\langle x\rangle^{-1}D_x^{e_j}\langle x\rangle\},$$

$$D_x^\beta D_\xi^{\alpha+e_j}s = -D_\xi^\alpha\{(D_x^\beta s)\langle\xi\rangle^{-1}D_\xi^{e_j}\langle\xi\rangle\}.$$

On peut estimer, par récurrence, des $D_x^\beta s$, $D_\xi^\alpha s$, $D_x^\beta D_\xi^\alpha s$ sur le support de $\psi'(s)\subset[1,2]$: $|D_x^\beta D_\xi^\alpha s| \leqslant C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{-|\beta|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$, où $C_{\alpha\beta}$ est indépendante de R. En résumé, on a

$$D_x^{\beta+e_j}D_\xi^\alpha\psi_R(x,\xi) = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} D_x^{\beta_1}D_\xi^\alpha(s\psi'(s))\,D_x^{\beta_2}(\langle x\rangle^{-1}D_x^{e_j}\langle x\rangle),$$

$$D_x^\beta D_\xi^{\alpha+e_j}\psi_R(x,\xi) = -\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} D_x^\beta D_\xi^{\alpha_1}(s\psi'(s))\,D_\xi^{\alpha_2}(\langle\xi\rangle^{-1}D_\xi^{e_j}\langle\xi\rangle).$$

D'abord, on a

$$|D_x^{e_j}\psi_R(x,\,\xi)|\leqslant|s\psi'(s)|\langle x\rangle^{-1}|D_x^{e_j}\langle x\rangle|\leqslant \sup|s\psi'(s)|\langle x\rangle^{-1},$$

$$|D_\xi^{e_j}\psi_R(x,\,\xi)|\leqslant|s\psi'(s)|\langle \xi\rangle^{-1}|D_\xi^{e_j}\langle \xi\rangle|\leqslant \sup|s\psi'(s)|\langle \xi\rangle^{-1}.$$

Par récurrence, on a les estimations. ■

1.2.4. La proposition suivante assure la condition (1) de la Définition 1.2.

PROPOSITION 1.13. – *Supposons les conditions* (A.1) *et* (A.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha k(x,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}R^{-|\alpha|}\qquad (R\geqslant 1),$$

où $C_{\alpha\beta}$ est une constante indépendante de R, c'est-à-dire que $k(x,\,\xi)\in S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n)$.

DÉMONSTRATION. – On a, par définition,

$$D_x^\beta D_\xi^\alpha\tilde\varphi(x,\,\xi)=$$
$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}}\mathrm{Cte}\,(D_\xi^{\alpha_1}\chi_R(\xi))(D_x^{\beta_1}D_\xi^{\alpha_2}\psi_R(x,\,\xi))(D_x^{\beta_2}D_\xi^{\alpha_3}\varphi(x,\,\xi)).$$

Sur le support de $\tilde\varphi(x,\,\xi)$, on a, par définition,

$$|\xi|/R\geqslant 1\,,\qquad R\langle x\rangle\langle\xi\rangle^{-1}\leqslant 2\,,$$

c'est-à-dire que

$$|\xi|\geqslant R\geqslant 1\,,\qquad \frac{\langle x\rangle}{|\xi|}\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{R}\,.$$

Vu la Proposition 1.15 et le Lemme 1.16, on a, sur le support de $\tilde\varphi(x,\,\xi)$,

$$|D_\xi^{\alpha_1}\chi_R(\xi)|\leqslant \mathrm{Cte}\,R^{-|\alpha_1|}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|D_\xi^{\alpha_1}\chi|\leqslant\mathrm{Cte}\,R^{-|\alpha_1|},$$

$$|D_x^{\beta_1}D_\xi^{\alpha_2}\psi_R(x,\,\xi)|\leqslant\mathrm{Cte}\,\langle\xi\rangle^{-|\alpha_2|}\leqslant\mathrm{Cte}\,R^{-|\alpha_2|},$$

$$|D_x^{\beta_2}D_\xi^{\alpha_3}\varphi(x,\,\xi)|\leqslant\mathrm{Cte}\left(\frac{\langle x\rangle}{|\xi|}\right)^{|\alpha_3|}\leqslant\mathrm{Cte}\,R^{-|\alpha_3|},$$

d'où

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha\tilde\varphi(x,\,\xi;\,t)|\leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta}R^{-|\alpha|}.$$

Compte tenu de la formule des dérivées de la fonction composée $\exp(\tilde\varphi(x,\,\xi))$, on obtient la Proposition 1.13. ■

D'après Calderón-Vaillancourt [4], l'opérateur $K(x, D_x)$ est borné dans $H^l(\mathbb{R}^n)$.

1.2.5. La proposition suivante assure la condition (2) de la Définition 1.2.

PROPOSITION 1.14. – *Supposons les conditions* (A.1) *et* (A.2) *vérifiées. Alors, l'opérateur* $K(x, D_x)$ *est inversible dans* $\mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, *si* R *est suffisamment grand.*

DÉMONSTRATION. – Posons

$$J(x, \xi) = 1/k(x, \xi) = \exp(-\tilde{\varphi}(x, \xi)) .$$

Soit $J(x, D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel avec symbole $J(x, \xi)$.
Alors, on a

$$\sigma(J(x, D_x)\, K(x, D_x))(x, \xi) = 1 + L(x, \xi),$$

où

$$L(x, \xi) = \int_0^1 \sum_{|\gamma| = 1} L_{\gamma, \theta}(x, \xi)\, d\theta ,$$

$$-(2\pi)^n L_{\gamma, \theta}(x, \xi) = \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} \tilde{\varphi}^{(\gamma)}(x, \xi + \theta\eta) \exp\{-\tilde{\varphi}(x, \xi + \theta\eta)\} \times$$
$$\times \tilde{\varphi}_{(\gamma)}(x + y, \xi) \exp\{\tilde{\varphi}(x + y, \xi)\}\, dy\, d\eta ,$$

$$f^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, \xi) = (iD_\xi)^\alpha D^\beta_x f(x, \xi)$$

et $\mathrm{Os} - \iint \ldots dy\, d\eta$ est l'intégrale oscillatoire (cf. Kumano-go [27]).
$D^\beta_x D^\alpha_\xi L_{\gamma, \theta}(x, \xi)$ est une combinaison linéaire de la forme suivante:

$$\mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} D^{\beta'}_x D^{\alpha'}_\xi \{\tilde{\varphi}^{(\gamma)}(x, \xi + \theta\eta) \exp(-\tilde{\varphi}(x, \xi + \theta\eta))\} \times \tag{1.12}$$
$$\times D^{\beta''}_x D^{\alpha''}_\xi \{\tilde{\varphi}_{(\gamma)}(x + y, \xi) \exp(\tilde{\varphi}(x + y, \xi))\}\, dy\, d\eta ,$$

où $\alpha = \alpha' + \alpha''$, $\beta = \beta' + \beta''$.
Elle égale, par l'intégration par parties, à

$$\mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} \langle y\rangle^{-2l_0} \langle D_\eta\rangle^{2l_0} \{\langle\eta\rangle^{-2l_0} \langle D_y\rangle^{2l_0} C_{\gamma, \theta}(x, \xi; y, \eta)\}\, dy\, d\eta ,$$

où

$$C_{\gamma, \theta}(x, \xi; y, \eta) = D^{\beta'}_x D^{\alpha'}_\xi \{\tilde{\varphi}^{(\gamma)}(x, \xi + \theta\eta) \exp(-\tilde{\varphi}(x, \xi + \theta\eta))\} \times$$
$$\times D^{\beta''}_x D^{\alpha''}_\xi \{\tilde{\varphi}_{(\gamma)}(x + y, \xi) \exp(\tilde{\varphi}(x + y, \xi))\} .$$

Vu la Proposition 1.13, on a

$$|D_\eta^\nu\{\langle\eta\rangle^{-2l_0}D_y^\mu C_{\gamma,\theta}(x,\xi;y,\eta)\}|\leqslant$$

$$\text{Cte}\sum|D_\eta^{\nu_1}\langle\eta\rangle^{-2l_0}\tilde{\varphi}_{(\beta_1')}^{(\gamma+\alpha_1'+\nu_2)}(x,\xi+\theta\eta)\,\theta^{|\nu_2|}J_{(\beta_2')}^{(\alpha_2'+\nu_3)}(x,\xi+\theta\eta)\,\theta^{|\nu_3|}|\times$$

$$\times|\tilde{\varphi}_{(\gamma+\beta_1''+\mu_1)}^{(\alpha_1'')}(x+y,\xi)\,k_{(\beta_2''+\mu_2)}^{(\alpha_2'')}(x+y,\xi)|$$

où

$$\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3,\quad \mu=\mu_1+\mu_2,\quad \alpha'=\alpha_1'+\alpha_2',\quad \alpha''=\alpha_1''+\alpha_2'',$$

$$\beta'=\beta_1'+\beta_2',\quad \beta''=\beta_1''+\beta_2''.$$

$$|D_\eta^\nu\{\langle\eta\rangle^{-2l_0}D_y^\mu C_{\gamma,\theta}(x,\xi;y,\eta)\}|\leqslant$$

$$\leqslant\text{Cte}\sum\langle\eta\rangle^{-2l_0}\theta^{|\nu_2|+|\nu_3|}R^{-(|\gamma|+|\alpha_1'|+|\nu_2|)}R^{-(|\alpha_2'|+|\nu_3|)}R^{-|\alpha_1''|}R^{-|\alpha_2''|}\leqslant$$

$$\leqslant\text{Cte}\langle\eta\rangle^{-2l_0}\mathrm{R}^{-(|\gamma|+|\alpha|)}.$$

$$|\langle y\rangle^{-2l_0}\langle D_\eta\rangle^{2l_0}\{\langle\eta\rangle^{-2l_0}\langle D_y\rangle^{2l_0}C_{\gamma,\theta}(x,\xi;y,\eta)\}|\leqslant\text{Cte}\langle y\rangle^{-2l_0}\langle\eta\rangle^{-2l_0}R^{-(|\gamma|+|\alpha|)}.$$

Donc, si $2l_0>n+1$, l'intégrale oscillatoire (1.12) est absolument convergente;

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha L_{\gamma,\theta}(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}R^{-(|\gamma|+|\alpha|)},$$

où $C_{\alpha\beta}$ est une constante indépendante de R et $\theta\in[0,1]$.

Vu la définition de $L(x,\xi)$, on a l'estimation suivante:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha L(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}R^{-1-|\alpha|},$$

où $C_{\alpha\beta}$ est une constante indépendante de R $(R\geqslant1)$; d'où $L(x,\xi)\in S_{0,0}^0(\mathbb{R}^n)$.

D'après Calderón-Vaillancourt [4], on a

$$\|L(x,D_x)\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}\leqslant\frac{1}{R}\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant n+1\\|\beta|\leqslant n+1}}C_{\alpha\beta}\leqslant\text{Cte}\frac{1}{R},$$

où Cte est une constante indépendante de R.
Donc, si R est suffisamment grand,

$$J(x,D_x)\,K(x,D_x,D_t)=I+L(x,D_x)$$

a l'inverse dans $\mathrm{OP}\,S_{0,0}^0(\mathbb{R}^n)$ (cf. Kumano-go [27], Appendice I).

L'inverse de $K(x, D_x)$ est donné par

$$(I + L(x, D_x))^{-1} J(x, D_x).$$

La démonstration de la Proposition 1.14 est complète. ■

1.2.6. L'équation du lemme suivant était le point de départ du problème.

LEMME 1.15. – *Supposons les conditions* (A.1) *à* (A.3) *vérifiées. Alors, le symbole* $k(x, \xi)$ *de l'opérateur* $K(x, D_x)$ *satisfait à l'équation suivante*:

$$(\xi \cdot D_x - ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi) k(x, \xi) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)).$$

DÉMONSTRATION. – On pose:

$$b(x, \xi) = \exp(-\tilde{\varphi}(x, \xi))(\xi \cdot D_x - ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi) \exp(\tilde{\varphi}(x, \xi)).$$

Vu (1.10) et (1.7), on a

$$\begin{aligned} b(x, \xi) &= \xi \cdot D_x \tilde{\varphi}(x, \xi) - ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi = \\ &= \chi_R(\xi)\, \psi_R(x, \xi) \{(\xi \cdot D_x)\, \varphi(x, \xi) - ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi\} \\ &\quad + \chi_R(\xi) \{(\xi \cdot D_x)\, \psi_R(x, \xi)\}\, \varphi(x, \xi) - \{1 - \chi_R(\xi)\, \psi_R(x, \xi)\}\, (ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi) = \\ &= \chi_R(\xi) \{(\xi \cdot D_x)\, \psi_R(x, \xi)\}\, \varphi(x, \xi) - \chi_R(\xi) \{1 - \psi_R(x, \xi)\}\, (ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi) - \\ &\quad - \{1 - \chi_R(\xi)\}\, (ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi) = b_1(x, \xi) + b_2(x, \xi) + b_3(x, \xi). \end{aligned}$$

(i) Vu que $1 \leqslant R\langle x \rangle \langle \xi \rangle^{-1} \leqslant 2$ sur le support de $b_1(x, \xi)$ et par le Lemme 1.10, on a

$$\begin{aligned} |b_1(x, \xi)| &\leqslant |\chi_R(\xi)|\, |\{(\xi \cdot D_x)\, \psi_R(x, \xi)\}|\, |\varphi(x, \xi)| \leqslant \\ &\leqslant \sup |\chi(\xi)|\, \{C|\xi| \langle x \rangle^{-1}\} \sup |\varphi(x, \xi)| \leqslant CR \sup |\chi(\xi)| \sup |\varphi(x, \xi)|. \end{aligned}$$

En estimant $D^\beta_x D^\alpha_\xi b_1(x, \xi)$, on a $b_1(x, \xi) \in S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Vu que $R\langle x \rangle \langle \xi \rangle^{-1} \geqslant 1$ sur le support de $b_2(x, \xi)$ et par la condition (A.3), on a

$$\begin{aligned} |b_2(x, \xi)| &\leqslant |\chi_R(\xi)|\, |\{1 - \psi_R(x, \xi)\}\, |ia^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi| \leqslant \\ &\leqslant \sup |\chi(\xi)| \sup |\{1 - \psi_R(x, \xi)\}|\, \{C\langle x \rangle^{-1} |\xi|\} \leqslant \\ &\leqslant CR \sup |\chi(\xi)| \sup |(1 - \psi)(\xi)|. \end{aligned}$$

En estimant $D^\beta_x D^\alpha_\xi b_2(x, \xi)$, on a $b_2(x, \xi) \in S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Vu que $|\xi| R^{-1} \leqslant 2$ sur le support de $b_3(x, \xi)$, on a

$|b_3(x, \xi)| \leqslant |\{1 - \chi_R(\xi)\}| \, |i a^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi| \leqslant \sup |(1-\chi)(\xi)| \{2R \sup |a^{\mathrm{I}}(x)|\}$.

En estimant $D_x^\beta D_\xi^\alpha b_3(x, \xi)$, on a $b_3(x, \xi) \in S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration du Lemme 1.15 est complète. ■

À l'aide du Lemme 1.15, on obtient l'égalité suivante:

$$P(x, D_x, D_t)\, K(x, D_x) \equiv K(x, D_x) Q(x, D_x, D_t) + \\ + [K(x, D_x),\, a^{\mathrm{R}}(x) \cdot D_x] \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)).$$

1.2.7. La proposition suivante est au cœur de la preuve du Théorème 1.3.

PROPOSITION 1.16. – *Supposons les conditions* (A.1) *à* (A.4) *vérifiées. Alors, le commutateur* $[K(x, D_x), a^{\mathrm{R}}(x, D_x)]$ *appartient à* $\mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ *où* $a^{\mathrm{R}}(x, D_x) = a^{\mathrm{R}}(x) \cdot D_x$.

DÉMONSTRATION. – Le symbole du commutateur $[K(x, D_x), a^{\mathrm{R}}(x, D_x)]$ s'exprime comme suit:

$$\sigma([K(x, D_x), a^{\mathrm{R}}(x, D_x)])(x, \xi) = \int_0^1 \sum_{|\gamma|=1} \{R^{(\gamma)}_{1,\theta}(x, \xi) - R^{(\gamma)}_{2,\theta}(x, \xi)\}\, d\theta\,,$$

$$(2\pi)^n R^{(\gamma)}_{1,\theta}(x, \xi) = \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} k^{(\gamma)}(x, \xi + \theta\eta)\, a^{\mathrm{R}}_{(\gamma)}(x + y, \xi)\, dy\, d\eta\,,$$

$$(2\pi)^n R^{(\gamma)}_{2,\theta}(x, \xi) = \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} a^{\mathrm{R}(\gamma)}(x, \xi + \theta\eta)\, k_{(\gamma)}(x + y, \xi)\, dy\, d\eta\,.$$

Des estimations de $R^{(\gamma)}_{2,\theta}(x, \xi)$ $(|\gamma| = 1)$ sont faciles.

Donc, on considère des estimations de $R^{(\gamma)}_{1,\theta}(x, \xi)$ $(|\gamma| = 1)$.

$$(1.13) \qquad (2\pi)^n D_x^\beta D_\xi^\alpha R^{(\gamma)}_{1,\theta}(x, \xi) = \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} D_x^\beta D_\xi^\alpha \times \\ \times \{\tilde{\varphi}^{(\gamma)}(x, \xi + \theta\eta)\, k(x, \xi + \theta\eta)\, a^{\mathrm{R}}_{(\gamma)}(x + y, \xi)\}\, dy\, d\eta$$

(par l'intégration par parties)

$$= \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} \langle y \rangle^{-2l_0} \langle D_\eta \rangle^{2l_0} \{\langle \eta \rangle^{-2l_0} \langle D_y \rangle^{2l_0} C_{\gamma,\theta}(x, \xi; y, \eta)\}\, dy\, d\eta\,,$$

où

$$C_{\gamma,\theta}(x, \xi; y, \eta) = D_x^\beta D_\xi^\alpha \{\tilde{\varphi}^{(\gamma)}(x, \xi + \theta\eta)\, k(x, \xi + \theta\eta)\, a^{\mathrm{R}}_{(\gamma)}(x + y, \xi)\}\,.$$

$$|D_\eta^{\nu'}\{\langle\eta\rangle^{-2l_0} D_y^\mu C_{\gamma,\theta}(x,\xi;y,\eta)\}| \leqslant \mathrm{Cte} \sum_{\substack{\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \beta=\beta_1+\beta_2+\beta_3}} \sum_{\substack{\nu\leqslant\nu' \\ \nu=\nu_1+\nu_2}} \langle\eta\rangle^{-2l_0} \times$$

$$\times\, |\theta^{|\nu_1|}\, \widetilde{\varphi}_{(\beta_1)}^{(\gamma+\alpha_1+\nu_1)}(x,\xi+\theta\eta)|\; |\theta^{|\nu_2|}\, k_{(\beta_2)}^{(\alpha_2+\nu_2)}(x,\xi+\theta\eta)\, a_{(\gamma+\beta_3+\mu)}^{\mathrm{R}(\alpha_3)}(x+y,\xi)|\,.$$

$$|\,\widetilde{\varphi}_{(\beta_1)}^{(\gamma+\alpha_1+\nu_1)}(x,\xi+\theta\eta)\,| \leqslant$$

$$\leqslant \sum\{\,|\chi_R^{(\gamma+\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta)\,\psi_{R(\beta_1')}^{(\alpha_1''+\nu_1'')}(x,\xi+\theta\eta)\,\varphi_{(\beta_1'')}^{(\alpha_1'''+\nu_1''')}(x,\xi+\theta\eta)\,| +$$

$$+\,|\chi_R^{(\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta)\,\psi_{R(\beta_1')}^{(\gamma+\alpha_1''+\nu_1'')}(x,\xi+\theta\eta)\,\varphi_{(\beta_1'')}^{(\alpha_1'''+\nu_1''')}(x,\xi+\theta\eta)\,|\,\} +$$

$$+\,|\chi_R^{(\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta)\,\psi_{R(\beta_1')}^{(\alpha_1''+\nu_1'')}(x,\xi+\theta\eta)\,\varphi_{(\beta_1'')}^{(\gamma+\alpha_1'''+\nu_1''')}(x,\xi+\theta\eta)\,|\,\} =$$

$$= (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}),$$

où $\alpha_1 = \alpha_1' + \alpha_1'' + \alpha_1'''$, $\nu_1 = \nu_1' + \nu_1'' + \nu_1'''$, $\beta_1 = \beta_1' + \beta_1''$.

(i) Du fait que $\chi_R^{(\gamma+\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta) = 0$ si $|\xi+\theta\eta| \leqslant R$ et $|\xi+\theta\eta| \geqslant 2R$, on a

$$(\mathrm{I}) \leqslant C_0 \sum \left\{ \frac{\langle 2R\rangle}{\langle\xi+\theta\eta\rangle}\, |\chi_R^{(\gamma+\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta)\,| \times \right.$$

$$\left. \times\, |\,\psi_{R(\beta_1')}^{(\alpha_1''+\nu_1'')}(x,\xi+\theta\eta)\,\varphi_{(\beta_1'')}^{(\alpha_1'''+\nu_1''')}(x,\xi+\theta\eta)\,| \right\} \leqslant C_1 \frac{\langle 2R\rangle}{\langle\xi+\theta\eta\rangle}\,.$$

(ii) Vu le Lemme 1.12, on a

$$(\mathrm{II}) \leqslant \sum \left\{ \left| \chi_R^{(\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta)\, \frac{C_0}{\langle\xi+\theta\eta\rangle}\, \varphi_{(\beta_1'')}^{(\alpha_1'''+\nu_1''')}(x,\xi+\theta\eta) \right| \right\} \leqslant \frac{C_1}{\langle\xi+\theta\eta\rangle}\,.$$

(iii) Vu que $|\xi+\theta\eta| \geqslant R \geqslant 1$ sur le support de $\chi_R^{(\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta)$ et à l'aide de la Proposition 1.11, on a

$$(\mathrm{III}) \leqslant C_0 \sum \left\{ |\chi_R^{(\alpha_1'+\nu_1')}(\xi+\theta\eta)|\; |\psi_{R(\beta_1')}^{(\alpha_1''+\nu_1'')}(x,\xi+\theta\eta)|\, \frac{\langle x\rangle}{|\xi+\theta\eta|} \right\} \leqslant C_1 \frac{\langle x\rangle}{\langle\xi+\theta\eta\rangle}\,.$$

En combinant les estimations (I), (II) et (III), on a

$$|\,\widetilde{\varphi}_{(\beta_1)}^{(\gamma+\alpha_1+\nu_1)}(x,\xi+\theta\eta)\,| \leqslant \mathrm{Cte}\, \frac{\langle x\rangle}{\langle\xi+\theta\eta\rangle}\,. \tag{1.14}$$

Vu (1.14) et la condition (A.4), on a

$$|\,\widetilde{\varphi}_{(\beta_1)}^{(\gamma+\alpha_1+\nu_1)}(x,\xi+\theta\eta)\, k_{(\beta_2)}^{(\alpha_2+\nu_2)}(x,\xi+\theta\eta)\, a_{(\gamma+\beta_3+\mu)}^{\mathrm{R}(\alpha_3)}(x+y,\xi)\,| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{Cte}\, \frac{\langle x\rangle}{\langle\xi+\theta\eta\rangle}\, \frac{\langle\xi\rangle}{\langle x+y\rangle}\,.$$

D'après les inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\langle x\rangle}{\langle y\rangle} \leqslant \langle x \pm y\rangle \leqslant \sqrt{2}\,\langle x\rangle\langle y\rangle,$$

on a, pour $\theta \in [0, 1]$,

$$\frac{\langle x\rangle}{\langle \xi+\theta\eta\rangle}\,\frac{\langle \xi\rangle}{\langle x+y\rangle} \leqslant \sqrt{2}\,\langle y\rangle\,\sqrt{2}\,\langle \theta\eta\rangle \leqslant 2\langle y\rangle\langle \eta\rangle.$$

En résumé, on a

$$|\langle y\rangle^{-2l_0}\langle D_\eta\rangle^{2l_0}\{\langle \eta\rangle^{-2l_0}\langle D_y\rangle^{2l_0} C_{\gamma,\,\theta}(x,\,\xi;\,y,\,\eta)\}\,| \leqslant \mathrm{Cte}\,\langle y\rangle^{-2l_0+1}\langle \eta\rangle^{-2l_0+1}.$$

Si on choisit le nombre intégral l_0 tel que $-2l_0+1 < -(n+1)$, l'intégrale oscillatoire (1.13) est absolument convergente.
Donc, pour tous multi-indices α et β, on a

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha R_{1,\,\theta}^{(\gamma)}(x,\,\xi)\,| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta} \qquad (|\gamma| = 1,\ |\theta| \leqslant 1);$$

d'où $R_{1,\,\theta}^{(\gamma)}(x,\,\xi) \in S_{0,\,0}^{0}(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration de la Proposition 1.16 est complète. ∎

1.2.8. La Proposition 1.16 implique que

$$P(x,\,D_x,\,D_t)\,K(x,\,D_x) \equiv K(x,\,D_x)\,Q(x,\,D_x,\,D_t) \qquad (\mathrm{mod}\,\mathrm{OP}\,S_{0,\,0}^{0}(\mathbb{R}^n));$$

d'où la condition (3) de la Définition 1.2.

La démonstration du Théorème 1.3 est complète. ∎

Remarque 1.17. – C'est seulement pour obtenir le Lemme 1.15 et la Proposition 1.16 que l'on utilise la condition (A.3); C'est seulement pour assurer la Proposition 1.16 que l'on utilise la condition (A.4).

1.2.9. Nous donnons un exemple de $a^{\mathrm{I}}(x)$ qui satisfait aux conditions (A.1) à (A.3).

Exemple 1.18 (Takeuchi [47]). – Soient A une matrice réelle $n \times n$ et δ un nombre non négatif. On pose:

$$a^{\mathrm{I}}(x) = \frac{Ax}{\langle x\rangle^{2+\delta}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

(1) Si $\delta > 0$, $a^{\mathrm{I}}(x)$ satisfait aux conditions (A.1) à (A.3) et aussi à la condition (B.1).

(2) Si $\delta = 0$, $a^{\mathrm{I}}(x)$ satisfait à la condition suivante qui est une condition nécessaire afin que le problème de Cauchy $(*)$ soit bien posé dans H^∞:

CONDITION (C) (Ichinose [16]). – Il existe une constante non négative κ et une constante positive C telles que, pour tout $\varrho \in \mathbb{R}^1$, on ait

$$\sup_{(x,\,\omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \left| \int_0^{\varrho} a^{\mathrm{I}}(x + s\omega) \cdot \omega \, ds \right| \leqslant \kappa \log \langle \varrho \rangle + C .$$

Nous traiterons de ce problème dans un autre article (voir aussi Takeuchi [44], [47]).

(3) Si $\delta = 0$ et de plus on suppose A anti-symétrique (${}^t A = -A$), $a^{\mathrm{I}}(x)$ satisfait aux conditions (A.1) à (A.3); mais, si $\operatorname{rang} A > 0$, $a^{\mathrm{I}}(x)$ ne satisfait pas à la condition (B.1).

1.3. – *Preuves des Théorèmes* 1.5 *et* 1.6.

Le Théorème 1.6 entraîne le Théorème 1.5 immédiatement. Donc, il suffit de démontrer le Théorème 1.6. On peut démontrer directement le Théorème 1.6 parallèlement à la preuve du Théorème 1.3. Mais, il suffit de démontrer que la condition (B.1) entraîne les conditions (A.1) à (A.3).

PROPOSITION 1.19. – *Supposons la condition* (B.1) *vérifiée. Alors, les conditions* (A.1) *à* (A.3) *sont vérifiées.*

DÉMONSTRATION. – (1) Vu la condition (B.1), pour $(x, \omega, \varrho) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$, on a

$$\left| \int_0^{\varrho} a^{\mathrm{I}}(x + s\omega) \cdot \omega \, ds \right| \leqslant \int_0^{|\varrho|} | a^{\mathrm{I}}(x + s\omega) | \, ds \leqslant \mathrm{C}_0 \int_0^{|\varrho|} \langle x + s\omega \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}_0 \int_0^{|\varrho|} \langle s + x \cdot \omega \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds = \mathrm{C}_0 \int_{x\cdot\omega}^{|\varrho| + x\cdot\omega} \langle s \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds \leqslant \mathrm{C}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \langle s \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds < +\infty \ ;$$

d'où la condition (A.1).

(2) Vu la condition (B.1), pour tout multi-indice α ($|\alpha| \geqslant 1$) et pour $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, on a

$$\int_0^{+\infty} | D_x^{\alpha} a^{\mathrm{I}}(x + s\omega) \cdot \omega | \, ds \leqslant \int_0^{+\infty} | D_x^{\alpha} a^{\mathrm{I}}(x + s\omega) | \, ds \leqslant \mathrm{C}_{\alpha} \int_0^{+\infty} \langle x + s\omega \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}_{\alpha} \int_0^{+\infty} \langle s + x \cdot \omega \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds = \mathrm{C}_{\alpha} \int_{x\cdot\omega}^{+\infty} \langle s \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds \leqslant \mathrm{C}_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \langle s \rangle^{-1-\varepsilon_0} \, ds < +\infty \ ;$$

d'où la condition (A.2).

(3) Vu la condition (B.1) et vu que $\varepsilon_0 > 0$, pour tout multi-indices α et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle x\rangle \, | D_x^\alpha a^{\mathrm{I}}(x) | \leqslant \langle x\rangle^{1+\varepsilon_0} \, | D_x^\alpha a^{\mathrm{I}}(x) | \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x\rangle^{1+\varepsilon_0} \, | D_x^\alpha a^{\mathrm{I}}(x) | \} < +\infty \; ;$$

d'où la condition (A.3).

La démonstratioin de la Proposition 1.19 est complète. ■

1.4. – *Quelques remarques.*

1.4.1. Remarque sur la condition (A.1).

Supposons que la dimension de l'espace est 1: $n = 1$. On considère, dans cette sous-section, la relation entre la condition (A.1) de Mizohata et celle de Takeuchi [41].

La condition de Takeuchi [41] s'exprime comme suit:

Condition (T). – On a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1} \left| \int_0^x a^{\mathrm{I}}(y) \, dy \right| < +\infty \, .$$

Proposition 1.20. – *La condition* (A.1) *est équivalente à la condition* (T) *dans le cas où* $n = 1$.

Démonstration. – (1) On suppose la condition (T) vérifiée. Alors, on a, pour $\omega \in S^0 = \{-1, 1\}$,

$$\int_0^\varrho a^{\mathrm{I}}(x + s\omega) \, \omega \, ds = \int_0^{\varrho\omega} a^{\mathrm{I}}(x + s') \, ds' = \int_x^{x+\varrho\omega} a^{\mathrm{I}}(y) \, dy = \Phi(x + \varrho\omega) - \Phi(x) \, ,$$

où

$$\Phi(x) = \int_0^x a^{\mathrm{I}}(y) \, dy \, .$$

D'après la condition (T), on a

$$\sup_{(x,\,\omega,\,\varrho) \in \mathbb{R}^1 \times S^0 \times \mathbb{R}^1} \left| \int_0^\varrho a^{\mathrm{I}}(x + s\omega) \, \omega \, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(x,\,\omega,\,\varrho) \in \mathbb{R}^1 \times S^0 \times \mathbb{R}^1} \{ | \Phi(x + \varrho\omega) | + | \Phi(x) | \} < +\infty \, .$$

(2) Au contraire, en posant $x = 0$ dans la condition (A.1), on a la condition (T) vu que $\omega \in S^0 = \{-1, 1\}$.

La démonstratioin de la Proposition 1.20 est complète. ■

Nos résultats s'expriment comme suit:

THÉORÈME 1.21. – *Dans le cas où* $n = 1$, *afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* $(*)$ *soit bien posé dans* H^l $(l \in \mathbb{R})$ *au sens du Théorème* 1.1, *il est nécessaire et suffisant que la condition* (T) *est vérifiée.*

COROLLAIRE 1.22. – *Dans le cas où* $n = 1$, *afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* $(*)$ *soit bien posé dans* H^l $(l \in \mathbb{R})$ *au sens du Théorème* 1.1, *il est nécessaire et suffisant que la condition* (A.1) *est vérifiée.*

En combinant la Proposition 1.20 et la Remarque 1.4, on a la nécessité de la condition (T). Le théorème suivant permet la démonstration de la condition suffisante.

THÉORÈME 1.23. – *Supposons que* $n = 1$ *et que la condition* (T) *est vérifiée. Alors, il existe un opérateur pseudo-différentiel* $K(x, D_x)$ *invertible dans* $\mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^1)$ *satisfaisant à l'équation suivante*:

$$P(x, D_x, D_t)\, K(x, D_x) \equiv K(x, D_x)\, Q(x, D_x, D_t) \qquad (\mathrm{mod}\, \mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^1))\,, \tag{1.15}$$

où l'opérateur $Q(x, D_x, D_t)$ *est défini par* (1.3).

DÉMONSTRATION. – Supposons que $n = 1$ et que la condition (T) est vérifiée.

La fonction

$$\Phi(x) = -\int_0^x a^{\mathrm{I}}(y)\, dy$$

satisfait à l'équation suivante:

$$\xi D_x \Phi(x) - i a^{\mathrm{I}}(x)\, \xi = 0\,. \tag{1.16}$$

On définit le symbole $k(x, \xi)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $K(x, D_x)$ comme suit:

$$k(x, \xi) = \exp(\Phi(x))\,,$$

qui est indépendante de ξ.

D'après la condition (T), il est évident que $k(x, \xi) \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^1)$.

L'équation (1.16) entraîne l'équation (1.15).

L'inverse $K(x, D_x)^{-1}$ de l'opérateur $K(x, D_x)$ est donné par

$$K(x, D_x)^{-1} = \exp(-\Phi(x)) .$$

La démonstratioin du Théorème 1.23 est complète. ■

REMARQUE 1.24. – Cette démonstration est essentiellement même que celle de Takeuchi [41].

1.4.2. D'autres conditions suffisantes.

Nous retournons au problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps $(*)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$.

Dans cette sous-section, nous considérons le cas où 1-forme différentielle

$$\varpi = \sum_{j=1}^{n} a_j^{\mathrm{I}}(x)\, dx_j$$

est «fermée» dans $\mathbb{R}^n$:

CONDITION (D.1). – On a $d\varpi = 0$, c'est-à-dire,

$$\frac{\partial a_j^{\mathrm{I}}(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k^{\mathrm{I}}(x)}{\partial x_j} \qquad (1 \leqslant j, k \leqslant n) .$$

Comme $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe, d'après le théorème de Poincaré (voir H. Cartan [5], Théorème 2.12.1 et Théorème 3.8.1), il existe une fonction $\Phi(x)$, qui s'appelle une fonction primitive, définie dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$d\Phi = \varpi . \tag{1.17}$$

La fonction $\Phi(x)$ est donnée par

$$\Phi(x) = \int_0^1 a^{\mathrm{I}}(\theta x)\cdot x\, d\theta = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} a_j^{\mathrm{I}}(\theta x)\, x_j\, d\theta . \tag{1.18}$$

(voir H. Cartan [5], p. 42-43 et aussi Tarama [56], p. 144.)

Nous supposons que la fonction $\Phi(x)$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$:

CONDITION (D.2). – On a

$$\sup_{(\omega, \varrho) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^1} \left| \int_0^{\varrho} a^{\mathrm{I}}(s\omega)\cdot \omega\, ds \right| < +\infty .$$

PROPOSITION 1.25. – *Sous la condition* (D.1), *la condition* (D.2) *est équivalente à la condition* (A.1).

DÉMONSTRATION. – (i) La condition (A.1) implique la condition (D.2): La condition (D.2) est la condition (A.1) avec $x = 0$.

(ii) La condition (D.2) implique la condition (A.1): La fonction $\Phi(x)$ définie par (1.18) s'écrit comme l'intégrale curviligne de 1-forme le long du segment orienté de 0 à x (noté par $L[0, x]$):

$$\Phi(x) = \int_{L[0,\, x]} \varpi = \int_{L[0,\, x]} \sum_{j=1}^{n} a_j^{\mathrm{I}}(x)\, dx_j\,.$$

D'après la formule de Green-Stokes et la condition (D.1), pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{L[0,\, x]} \varpi + \int_{L[x,\, y]} \varpi + \int_{L[y,\, 0]} \varpi = \iint_{\triangle[0xy]} d\varpi = 0\,,$$

où $\triangle[0xy]$ est l'intérieur du triangle formé par trois points $0, x, y$ dans $\mathbb{R}^n$. Donc, on a

$$\int_{L[x,\, y]} \varpi = \Phi(y) - \Phi(x)\,.$$

Pour tout $(x, \omega, \varrho) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$, on a

$$\int_0^{\varrho} a^{\mathrm{I}}(x + s\omega)\cdot\omega\, ds = \int_{L[x,\, x+\varrho\omega]} \varpi = \Phi(x + \varrho\omega) - \Phi(x)\,.$$

D'après la condition (D.2), on a

$$\sup_{(x,\, \omega,\, \varrho) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1} \left| \int_0^{\varrho} a^{\mathrm{I}}(x + s\omega)\cdot\omega\, ds \right| \leqslant \sup_{(x,\, \omega,\, \varrho) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1} \{ |\Phi(x + \varrho\omega)| + |\Phi(x)| \} < +\infty\,.$$

La démonstratioin de la Proposition 1.25 est complète. ■

Notre résultat s'énonce ainsi:

THÉORÈME 1.26. – *Supposons les conditions* (D.1) *et* (D.2) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* $(*)$ *est bien posé dans* H^l $(l \in \mathbb{R})$ *au sens du Théorème* 1.1.

COROLLAIRE 1.27. – *Supposons les conditions* (D.1) *et* (A.1) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* $(*)$ *est bien posé dans* H^l $(l \in \mathbb{R})$ *au sens du Théorème* 1.1.

REMARQUE 1.28. – (1) Ce résultat n'est pas nouveau; ce résultat été connu il y a longtemps, mais il n'y avait pas de papiers où ce résultat était donné explicitement jusqu'en 1993 (voir Tarama [56] et aussi Ichinose [17]).

(2) Ce résultat est le cas particulier de Tarama [56]; il traite du problème de Cauchy $(*)$ dans H^∞.

Plus fortement, on a le résultat suivant:

THÉORÈME 1.29. – *Supposons les conditions* (D.1) *et* (D.2) *vérifiées. Alors, l'opérateur* $P(x, D_x, D_t)$ *est* L^2*-symétrisable par un opérateur appartenant à* $\mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$: *il existe un opérateur pseudo-différentiel* $K(x, D_x)$ *tel que*

(1) $K(x, D_x)$ *appartienne à* $\mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$,

(2) $K(x, D_x)$ *soit inversible dans* $\mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$,

(3) $K(x, D_x)$ *satisfasse à l'équation suivant*:

$$P(x, D_x, D_t)\, K(x, D_x) \equiv K(x, D_x)\, Q(x, D_x, D_t) \quad (\mathrm{mod\, OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))\,, \tag{1.19}$$

où l'opérateur $Q(x, D_x, D_t)$ *est défini par* (1.3).

DÉMONSTRATION. – On définit le symbole $k(x, \xi)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $K(x, D_x)$ comme suit:

$$k(x, \xi) = \exp(-\Phi(x))\,,$$

qui est indépendante de ξ.

(1) La condition (D.2) implique que la fonction $\Phi(x)$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$. Et de plus, $\Phi(x)$ est $\mathcal{B}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ vu que $\nabla_x \Phi(x) = a^{\mathrm{I}}(x)$ est à $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Donc, $k(x, \xi)$ appartient à $S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$.

(2) L'inverse $K(x, D_x)^{-1}$ de l'opérateur $K(x, D_x)$ est donné par

$$K(x, D_x)^{-1} = \exp(\Phi(x))\,.$$

(3) D'après (1.17), la fonction $k(x, \xi)$ satisfait à l'équation suivante:

$$(\xi \cdot D_x - i a^{\mathrm{I}}(x) \cdot \xi)\, k(x, \xi) = 0\,. \tag{1.20}$$

L'équation (1.20) entraîne l'équation (1.19).

La démonstratioin du Théorème 1.29 est complète. ■

REMARQUE 1.30. – Cette démonstration du Théorème 1.29 est une extension au cas $\mathbb{R}^n$ de celle du Théorème 1.23.

2. – Équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger.

2.1. – *Introduction et énoncé des résultats.*

2.1.1. On considère un opérateur différentiel de 2-évolution au sens de Petrowsky [38] défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$:

$$P(x, D_x, D_t) = D_t^m + a_1(x, D_x)\, D_t^{m-1} + \cdots + a_m(x, D_x)\,, \tag{2.1}$$

$$a_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2j} a_{\alpha j}(x)\, D_x^\alpha \qquad (1 \leq j \leq m)\,, \tag{2.2}$$

avec les coefficients $a_{\alpha j}(x) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$, où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $D_t = i^{-1}\,\partial/\partial t$, $D_x = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = i^{-1}\,\partial/\partial x_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

Nous allons donner des conditions afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps

$$\begin{cases} P(x, D_x, D_t)\, u(x,t) = f(x,t) \ \text{ sur } \ \mathbb{R}^n \times [-T, T] \quad (T > 0)\,, \\ D_t^{j-1} u(x, 0) = g_j(x) \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^n \quad (1 \leq j \leq m) \end{cases} \tag{$*$}$$

soit bien posé dans l'espace de Sobolev $H^l(\mathbb{R}^n)$.

Nos conditions s'expriment comme suit.

La première condition pour la partie principale est:

CONDITION (A.1). – On a $a_{\alpha j}(x) = a_{\alpha j}$ (Constante), pour $|\alpha| = 2j$, $1 \leq j \leq m$.

On note $a_j^0(\xi)$ le symbole principal de l'opérateur $a_j(x, D_x)$ et $a_j^1(x, \xi)$ le symbole sous-principal de l'opérateur $a_j(x, D_x)$:

$$a_j^0(\xi) = \sum_{|\alpha| = 2j} a_{\alpha j}\, \xi^\alpha\,, \qquad a_j^1(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2j-1} a_{\alpha j}(x)\, \xi^\alpha \qquad (1 \leq j \leq m)\,. \tag{2.3}$$

On note $P_{2m}(\xi, \tau)$ le symbole principal de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ au sens de Petrowsky [38]:

$$P_{2m}(\xi, \tau) = \tau^m + a_1^0(\xi)\tau^{m-1} + \cdots + a_m^0(\xi)\,. \tag{2.4}$$

On note $P_{2m-1}(x, \xi, \tau)$ le symbole sous-principal de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ au sens de Petrowsky [38]:

$$P_{2m-1}(x, \xi, \tau) = a_1^1(x, \xi)\, \tau^{m-1} + \cdots + a_m^1(x, \xi)\,. \tag{2.5}$$

Remarquons que $P_{2m}(\xi, \tau)$ et $P_{2m-1}(x, \xi, \tau)$ sont quasi-homogènes de degré $2m$ et $(2m-1)$ respectivement en (ξ, τ) de poids $(1, 2)$ au sens suivant: Pour tout $\varrho \in \mathbb{R}^1$, on a

$$P_{2m}(\varrho\xi, \varrho^2\tau) = \varrho^{2m} P_{2m}(\xi, \tau)\,, \qquad P_{2m-1}(x, \varrho\xi, \varrho^2\tau) = \varrho^{2m-1} P_{2m-1}(x, \xi, \tau)\,.$$

La deuxième condition pour la partie principale est:

Condition (A.2). – Les racines $\lambda_j^0(\xi)$ (en τ) de l'équation caractéristique $P_{2m}(\xi,\tau)=0$ sont non nulles, réelles, distinctes pour $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash 0$:

$$P_{2m}(\xi,\tau)=\prod_{j=1}^{m}(\tau-\lambda_j^0(\xi))\,;$$

$$\lambda_j^0(\xi)\neq\lambda_k^0(\xi)\quad(j\neq k,\ \xi\neq 0)\,;\qquad \lambda_j^0(\xi)\neq 0\quad(\xi\neq 0,\ 1\leqslant j\leqslant m)\,.$$

On dit que l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ défini par (2.1) est *du type de Schrödinger* si les racines caractéristiques $\lambda_j^0(\xi)$ sont réelles pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Pour caractériser l'opérateur du type de Schrödinger, il faut considerer non seulement le problème de Cauchy pour le futur ou pour le passé, mais aussi le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps; c'est pour exclure les opérateurs «paraboliques».

L'opérateur satisfaisant aux conditions (A.1) et (A.2) est une généralisation de l'opérateur $(\partial/\partial t)^2+\Delta_x^2=-(D_t+|D_x|^2)(D_t-|D_x|^2)$ (voir Schrödinger [39], p. 112, [40], Courant-Hilbert [7, p. 252], Takeuchi [42], [55]).

Remarque 2.1. – (1) La racine caractéristique $\lambda_j^0(\xi)$ est positivement homogène de degré 2 en ξ;

(2) la condition (A.2) et l'identité d'Euler impliquent que

$$\xi\cdot\nabla_\xi\lambda_j^0(\xi)=2\lambda_j^0(\xi)\neq 0\quad(\xi\neq 0)\quad\text{i.e.,}\quad \nabla_\xi\lambda_j^0(\xi)\neq 0\quad(\xi\neq 0)\,.$$

Les conditions pour le symbole sous-principal s'expriment comme suit:

Condition (B.1). – Pour tout j $(1\leqslant j\leqslant m)$, on a

$$\sup_{(x,\omega,\varrho)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}\times\mathbb{R}^1}\left|\int_0^{\varrho}\operatorname{Im}P_{2m-1}(x+s(\nabla_\xi\lambda_j^0)(\omega),\,\omega,\,\lambda_j^0(\omega))\,ds\right|<+\infty\,.$$

Condition (B.2). – Pour tout j $(1\leqslant j\leqslant m)$ et tout multi-indice ν $(|\nu|\geqslant 1)$, on a

$$\sup_{(x,\omega)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}}\int_0^{+\infty}|D_x^\nu\{\operatorname{Im}P_{2m-1}(x+s(\nabla_\xi\lambda_j^0)(\omega),\,\omega,\,\lambda_j^0(\omega))\}|\,ds<+\infty\,.$$

Condition (B.3). – Pour tout j $(1\leqslant j\leqslant m)$ et tout multi-indice ν, on a

$$\sup_{(x,\omega)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}}\{\langle x\rangle\,|D_x^\nu\operatorname{Im}P_{2m-1}(x,\,\omega,\,\lambda_j^0(\omega))|\}<+\infty\,.$$

CONDITION (B.4). – Pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et tout multi-indice $\nu(|\nu| \geqslant 1)$, on a

$$\sup_{(x,\,\omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \{\langle x\rangle |D_x^\nu \operatorname{Re} P_{2m-1}(x,\,\omega,\,\lambda_j^0(\omega))|\} < +\infty\,.$$

DÉFINITION 2.2. – On dit que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps $(*)$ est bien posé dans $H^l(\mathbb{R}^n)$ $(l \in \mathbb{R}^1)$ si et seulement si pour tout

$$(g_1(x),\,\ldots,\,g_m(x)) \in H^{l+2m}(\mathbb{R}^n) \times H^{l+2(m-1)}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times H^{l+2}(\mathbb{R}^n)$$

et tout

$$f(x,\,t) \in C_t^1([-T,\,T];\,H^l(\mathbb{R}^n))\,,$$

il existe une solution unique $u(x,\,t)$ du problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps $(*)$ telle que

$$u(x,\,t) \in C_t^0([-T,\,T];\,H^{l+2m}(\mathbb{R}^n)) \cap$$
$$C_t^1([-T,\,T];\,H^{l+2(m-1)}(\mathbb{R}^n)) \cap \ldots \cap C_t^m([-T,\,T];\,H^l(\mathbb{R}^n))$$

et que de plus on ait l'inégalité d'énergie suivante:

$$|||u(t)|||_{(l)} \leqslant C(l,\,T)\left\{|||u(0)|||_{(l)} + \left|\int_0^t \|f(\tau)\|_{(l)}\,d\tau\right|\right\}, \qquad t \in [-T,\,T],$$

où

$$|||u(t)|||_{(l)}^2 = \sum_{j=1}^m \|\langle D_x\rangle^{2(m-j)} D_t^{j-1} u(t)\|_{(l)}^2$$

et $\|u(t)\|_{(l)}$ est la $H^l(\mathbb{R}^n)$-norme de $u(t) = u(\cdot,\,t)$.

Notre résultat s'énonce ainsi:

THÉORÈME 2.3. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.4) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* $(*)$ *est bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ *au sens de la Définition* 2.2 *pour tout* $l \in \mathbb{R}^1$.

2.1.2. Nous allons donner d'autres conditions afin que le problème de Cauchy $(*)$ pour le futur et pour le passé en même temps soit bien posé dans $H^l(\mathbb{R}^n)$ au sens de la Définition 2.2.

Nos conditions s'expriment comme suit:

Condition (C.1). – Il existe une constante positive ε_0 telle que, pour tout $|\alpha| = 2j-1$, $1 \leqslant j \leqslant m$ et tout multi-indice ν, on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x\rangle^{1+\varepsilon_0} |D_x^\nu (\operatorname{Im} a_{\alpha j}(x))|\} < +\infty .$$

Condition (C.2). – Pour tout $|\alpha| = 2j-1$, $1 \leqslant j \leqslant m$ et tout multi-indice ν ($|\nu| \geqslant 1$), on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x\rangle |D_x^\nu (\operatorname{Re} a_{\alpha j}(x))|\} < +\infty .$$

Notre résultat s'énonce ainsi:

Théorème 2.4. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (C.1) *et* (C.2) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* ($*$) *est bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ *au sens de la Définition* 2.2 *pour tout* $l \in \mathbb{R}^1$.

2.1.3. Pour démontrer les Théorèmes 2.3 et 2.4, nous proposons une méthode de «L^2-symétrisation indépendante du temps» qui est une généralisation de celle proposée au chapitre 1. Cette méthode est comme suit: D'abord, on réduit l'équation ($*$) à un système; ensuit, on diagonalise ce système; finalement, on réduit ce système diagonal à un système diagonal et L^2-symétrique par un opérateur pseudo-différentiel indépendant du temps. Ce résultat de L^2-symétrisation indépendante du temps est plus fort que celui des Théorèmes 2.3 et 2.4; nous le verrons à la section 2.2 (les Propositions 2.6 et 2.14).

2.1.4. Pour la nécessité, on impose la condition suivante plus faible que la condition (A.2):

Condition (A.2)$'$. – Les racines (en τ) de l'équation caractéristique $P_{2m}(\xi, \tau) = 0$ sont réelles et distinctes pour $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$:

$$P_{2m}(\xi, \tau) = \prod_{j=1}^{m} (\tau - \lambda_j^0(\xi)) ; \qquad \lambda_j^0(\xi) \neq \lambda_k^0(\xi) \quad (j \neq k,\ \xi \neq 0).$$

On remarque que $\lambda_j^0(\xi)$ peut s'annuler pour certains ξ.

Notre résultat s'énonce ainsi:

Théorème 2.5 (Takeuchi [42], [44]). – *Supposons les conditions* (A.1) *et* (A.2)$'$ *vérifiées. Alors, la condition* (B.1) *est une condition nécessaire afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps* ($*$) *soit bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) *au sens de la Définition* 2.2.

2.2. – L^2-*symétrisation indépendante du temps.*

2.2.1. Réduction de l'équation à un système.

En posant

$$U(x,\,t) = {}^t(u_1(x,\,t),\,\dots,\,u_m(x,\,t))\,,$$

$$u_j(x,\,t) = \langle D_x\rangle^{2(m-j)} D_t^{j-1} u(x,\,t) \quad (1 \leqslant j \leqslant m)\,,$$

on a un système de la forme suivante:

$$(**) \qquad \begin{cases} D_t U(x,\,t) = M(x,\,D_x)\,U(x,\,t) + F(x,\,t) \ \text{ sur } \mathbb{R}^n \times [-T,\,T]\,, \\ U(x,\,0) = G(x) \ \text{ dans } \mathbb{R}^n\,. \end{cases}$$

Le symbole $\sigma(M)(x,\,\xi)$ de l'opérateur $M(x,\,D_x)$ s'écrit comme suit:

$$\sigma(M)(x,\,\xi) = M_2(\xi) + M_1(x,\,\xi) + M_0(x,\,\xi) \in \mathrm{Mat}\,(m;\,S^2_{1,\,0}(\mathbb{R}^n))\,,$$

$$M_2(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 1 \\ -a_m^0(\xi') & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1^0(\xi') \end{bmatrix} |\xi|^2 \chi_\infty(\xi)\,,$$

$$M_1(x,\,\xi) = -\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_m^1(x,\,\xi') & \cdots & \cdots & a_1^1(x,\,\xi') \end{bmatrix} |\xi| \chi_\infty(\xi)\,,$$

$$\xi' = \xi/|\xi|\,, \qquad M_0(x,\,\xi) \in S^0_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)\,, \qquad \chi_\infty(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,,$$

$$\chi_\infty(\xi) = 1 \ \ (|\xi| \geqslant 1)\,, \qquad \chi_\infty(\xi) = 0 \ \ (|\xi| \leqslant 1/2)\,.$$

$$F(x,\,t) = {}^t(0,\,\dots,\,0,\,f(x,\,t))\,,$$

$$G(x) = {}^t(\langle D_x\rangle^{2(m-1)} g_1(x), \langle D_x\rangle^{2(m-2)} g_2(x),\,\dots,\,g_m(x))\,.$$

2.2.2. Diagonalisation du système.

Grâce à la condition (A.2), on peut diagonaliser le système $(**)$ de la façon suivante:

PROPOSITION 2.6. – *Supposons les conditions* (A.1) *et* (A.2) *vérifiées. Alors, il existe un opérateur pseudo-différentiel diagonal* $\mathcal{D}(x, D_x) \in \mathrm{Mat}(m; \mathrm{OP}\, S^2_{1,0}(\mathbb{R}^n))$ *et un opérateur pseudo-différentiel inversible* $N(x, D_x) \in \mathrm{Mat}(m; \mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))$ *tels que*

(1) *l'on ait l'équation suivante*:

$$N(x, D_x)(D_t - M(x, D_x)) \equiv (D_t - \mathcal{D}(x, D_x))N(x, D_x)$$

$$(\mathrm{mod}\, \mathrm{Mat}(m; \mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)))\ ;$$

(2) *en notant* $\sigma(\mathcal{D})(x, \xi) = (\delta_{jk} \lambda_k(x, \xi))$ *le symbole de l'opérateur* $\mathcal{D}(x, D_x)$, *on ait*

$$\lambda_j(x, \xi) = \lambda^0_j(\xi) + \lambda^1_j(x, \xi),$$

où

$$\lambda^1_j(x, \xi) = -P_{2m-1}(x, \xi, \lambda^0_j(\xi))\chi_\infty(\xi) \Big/ \frac{\partial P_{2m}}{\partial \tau}(\xi, \lambda^0_j(\xi)) \in S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n), \tag{2.6}$$

$P_{2m-1}(x, \xi, \tau)$ *est le symbole sous-principal de l'opérateur* $P(x, D_x, D_t)$ *défini par* (2.5) *et* $\chi_\infty(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_\infty(\xi) = 1$ $(|\xi| \geqslant 1)$, $\chi_\infty(\xi) = 0$ $(|\xi| \leqslant 1/2)$.

DÉMONSTRATION. – voir Takeuchi ([42], [55]). ■

LEMME 2.7. – *Sous les conditions* (A.1) *et* (A.2), *les conditions* (B.1) *à* (B.4) *s'expriment comme suit*:

(B.1)′ *Pour tout* j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, *on a*

$$\sup_{(x, \omega, \varrho) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1} \left| \int_0^\varrho \mathrm{Im}\, \lambda^1_j(x + s(\nabla_\xi \lambda^0_j)(\omega), \omega)\, ds \right| < +\infty\ .$$

(B.2)′ *Pour tout* j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *et tout multi-indice* ν $(|\nu| \geqslant 1)$, *on a*

$$\sup_{(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \int_0^{+\infty} |D^\nu_x \{\mathrm{Im}\, \lambda^1_j(x + s(\nabla_\xi \lambda^0_j)(\omega), \omega)\}|\, ds < +\infty\ .$$

(B.3)′ *Pour tout* j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *et tout multi-indice* ν, *on a*

$$\sup_{(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \{\langle x \rangle |D^\nu_x\, \mathrm{Im}\, \lambda^1_j(x, \omega)|\} < +\infty\ .$$

(B.4)′ *Pour tout* j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *et tout multi-indice* ν $(|\nu| \geqslant 1)$, *on a*

$$\sup_{(x,\,\omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \{\langle x\rangle \,|D_x^\nu \operatorname{Re} \lambda_j^1(x, \omega)|\} < +\infty .$$

DÉMONSTRATION. – Vu (2.6), on a le Lemme 2.7. ■

2.2.3. L^2-symétrisation indépendante du temps du système.

On pose, pour tout j et pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash 0$,

$$\varphi_j(x, \xi) = \Phi_j(x, \xi, \mu_j(x, \xi)),$$

où

$$\Phi_j(x, \xi, t) = \int_0^t \operatorname{Im} \lambda_j^1(x - s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\xi), \xi)\, ds ,$$

$$\mu_j(x, \xi) = (x \cdot \nabla_\xi \lambda_j^0(\xi)) / |\nabla_\xi \lambda_j^0(\xi)|^2 .$$

N.B. – On a $\nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) \neq 0$ $(\xi \neq 0)$ par la Remarque 2.1.

La fonction $\varphi_j(x, \xi)$ satisfait à l'équation:

$$\nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) \cdot D_x \varphi_j(x, \xi) + i \operatorname{Im} \lambda_j^1(x, \xi) = 0$$

et à la condition initiale:

$$\varphi_j(x, \xi) = 0 \quad \text{sur} \quad \{x \in \mathbb{R}^n ;\, x \cdot \nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) = 0\} .$$

Remarquons que $\varphi_j(x, \xi)$ est positivement homogène de degré 0 en $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$: $\varphi_j(x, r\xi) = \varphi_j(x, \xi)$ pour tout $r > 0$.

PROPOSITION 2.8. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations pour* $\xi \neq 0$:

(i) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha \varphi_j(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} \left(\dfrac{\langle x\rangle}{|\xi|} \right)^{|\alpha|}$,

(ii) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha (\exp \varphi_j(x, \xi))| \leqslant C_{\alpha\beta} \left(\dfrac{\langle x\rangle}{|\xi|} \right)^{|\alpha|}$,

où $C_{\alpha\beta}$ *est une constante indépendante de* R $(R \geqslant 1)$.

DÉMONSTRATION. – D'après les estimations (B.1)′ et (B.2)′ du Lemme 2.7, on a la Proposition 2.8 par la même démonstration que celle de la Proposition 1.11. ■

On définit le symbole $K(x, \xi)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $K(x, D_x)$

comme suit:

$$K(x,\,\xi)=\operatorname{diag}(k_1(x,\,\xi),\,\dots,\,k_m(x,\,\xi))\,,$$

$$k_j(x,\,\xi)=\exp(\chi_R(\xi)\,\psi_R(x,\,\xi)\,\varphi_j(x,\,\xi))\,,$$

$$\chi_R(\xi)=\chi(\xi/R)\,,\qquad \psi_R(x,\,\xi)=\psi(R\langle x\rangle\langle\xi\rangle^{-1})\,,$$

où $\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)=1$ $(|\xi|\geqslant 2)$, $\chi(\xi)=0$ $(|\xi|\leqslant 1)$, $\psi(s)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\psi(s)=1$ $(s\leqslant 1)$, $\psi(s)=0$ $(s\geqslant 2)$ et $R\geqslant 1$.

LEMME 2.9. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha k_j(x,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}R^{-|\alpha|}\,,$$

où $C_{\alpha\beta}$ est une constante indépendante de R $(R\geqslant 1)$.

DÉMONSTRATION. – D'après le Lemme 1.14, les estimations (B.1)′ et (B.2)′ du Lemme 2.7 et la Proposition 2.8, on a le Lemme 2.9 par la même démonstration que celle de la Proposition 1.13. ■

D'après le théorème de Calderón-Vaillancourt [4], l'opérateur $K(x,\,D_x)$ est borné dans $(H^s(\mathbb{R}^n))^m$.

LEMME 2.10. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, l'opérateur $K(x,\,D_x)$ est inversible dans* $\mathrm{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))$ *si R est assez grand.*

DÉMONSTRATION. – La même que celle de la Proposition 1.14. ■

LEMME 2.11. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.3) *vérifiées. Alors, le symbole $k_j(x,\,\xi)$ de l'opérateur $k_j(x,\,D_x)$ satisfait à l'équation suivante*:

$$\{\nabla_\xi\lambda_j^0(\xi)\cdot D_x+i\,\mathrm{Im}\,\lambda_j^1(x,\,\xi)\}\,k_j(x,\,\xi)\equiv 0\qquad(\mathrm{mod}\,S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))\,.$$

DÉMONSTRATION. – La même que celle du Lemme 1.15. ■

LEMME 2.12. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.3) *vérifiées. Alors, on obtient l'égalité suivante*:

$$\begin{aligned}(2.27)\qquad (D_t-\mathcal{O}(x,\,D_x))\,K(x,\,D_x)&\equiv K(x,\,D_x)(D_t-\mathcal{O}^{\mathrm{R}}(x,\,D_x))+\\ &+[K(x,\,D_x),\,\mathcal{O}^{\mathrm{R}}_1(x,\,D_x)]\,,\qquad(\mathrm{mod}\,\mathrm{Mat}\,(m;\,\mathrm{OP}\,S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n)))\,,\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{D}_1^{\mathrm{R}}(x,\xi)=\operatorname{diag}(\operatorname{Re}\lambda_1^1(x,\xi),\ldots,\operatorname{Re}\lambda_m^1(x,\xi))\,, \tag{2.28}$$

DÉMONSTRATION. – Vu le Lemme 2.11, on a

$$(D_t-\mathcal{D})\,K=(D_t-\mathcal{D}^{\mathrm{R}})\,K-(\mathcal{D}-\mathcal{D}^{\mathrm{R}})\,K=$$

$$=K(D_t-\mathcal{D}^{\mathrm{R}})+[D_t-\mathcal{D}^{\mathrm{R}},K]-(\mathcal{D}-\mathcal{D}^{\mathrm{R}})\,K=$$

$$=K(D_t-\mathcal{D}^{\mathrm{R}})-[\mathcal{D}_1^{\mathrm{R}},K]-\{[\mathcal{D}_2,K]+(\mathcal{D}-\mathcal{D}^{\mathrm{R}})K\}\equiv K(D_t-\mathcal{D}^{\mathrm{R}})-[\mathcal{D}_1^{\mathrm{R}},K],$$

où $\mathcal{D}_2(\xi)=\operatorname{diag}(\lambda_1^0(\xi),\ldots,\lambda_m^0(\xi))$. ■

LEMME 2.13. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.4) *vérifiées. Alors, le commutateur* $[K(x,D_x),\mathcal{D}_1^{\mathrm{R}}(x,D_x)]$ *appartient à* $\operatorname{Mat}(m;\operatorname{OP}S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n))$.

DÉMONSTRATION. – La même que celle de la Proposition 1.16. ■

En résumé, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 2.14 (L^2-symétrisation). – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.4) *vérifiées. Alors, il existe un opérateur pseudo-différentiel matriciel* $\widetilde{K}(x,D_x)$ *tel que*

(1) $\widetilde{K}(x,D_x)$ *appartienne à* $\operatorname{Mat}(m;\operatorname{OP}S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n))$,

(2) $\widetilde{K}(x,D_x)$ *soit inversible dans* $\operatorname{Mat}(m;\operatorname{OP}S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n))$,

(3) $\widetilde{K}(x,D_x)$ *satisfasse à l'équation suivante*:

$$(D_t-M(x,D_x))\,\widetilde{K}(x,D_x)\equiv\widetilde{K}(x,D_x)(D_t-\mathcal{D}^{\mathrm{R}}(x,D_x))\,,$$
$$(\operatorname{mod}\operatorname{Mat}(m;\operatorname{OP}S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)))\,,$$

où

$$\mathcal{D}^{\mathrm{R}}(x,D_x)=\operatorname{diag}(\lambda_1^{\mathrm{R}}(x,D_x),\ldots,\lambda_m^{\mathrm{R}}(x,D_x))\,,\quad \lambda_j^{\mathrm{R}}(x,\xi)=\lambda_j^0(\xi)+\operatorname{Re}\lambda_j^1(x,\xi)$$

et $\lambda_j^1(x,\xi)$ *est défini par* (2.6).

DÉMONSTRATION. – À l'aide de la Proposition 2.1 et les Lemmes 2.12 et 2.13, en posant $\widetilde{K}(x,D_x)=N^{-1}(x,D_x)\,K(x,D_x)$, on a la Proposition 2.14. ■

REMARQUE 2.15. – C'est seulement pour obtenir les Lemmes 2.11 à 2.13 et la Proposition 2.14 que l'on utilise la condition (A.3); C'est seulement pour assurer le Lemme 2.13 et la Proposition 2.14 que l'on utilise la condition (A.4).

2.2.4. Preuve du Théorème 2.3.

En appliquant $N(x, D_x)$ à l'équation $(**)$, on a, d'après la Proposition 2.6,

$$(D_t - \mathcal{D}(x, D_x))\, V(x, t) + B_0(x, D_x)\, V(x, t) = N(x, D_x)\, F(x, t)\,,$$

où

$$V(x, t) = N(x, D_x)\, U(x, t)\,, \qquad B_0(x, D_x) \in \mathrm{Mat}\,(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{1,\,0}(\mathbb{R}^n))\,.$$

En posant

$$V(x, t) = K(x, D_x)\, W(x, t)\,,$$

on a un système suivant:

$$(D_t - \mathcal{D}^R(x, D_x) + B(x, D_x))\, W(x, t) = \widetilde{B}(x, D_x)\, F(x, t)\,,$$

où

$$B(x, D_x) \in \mathrm{Mat}\,(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))\,,$$

$$\widetilde{B}(x, S_x) = K(x, D_x)^{-1} N(x, D_x) \in \mathrm{Mat}\,(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))\,.$$

Le problème de Cauchy pour l'opérateur

$$D_t - \mathcal{D}^{\mathrm{R}}(x, D_x) + B(x, D_x)$$

dans $\mathbb{R}^n \times [-T, T]$ est bien posé dans $(H^s(\mathbb{R}^n))^m$; d'où le Théorème 2.3. ■

2.3. – *Preuve du Théorème* 2.4.

On peut démontrer directement le Théorème 2.4 parallèlement à la preuve du Théorème 2.3. Mais, il suffit de démontrer que les conditions (C.1) et (C.2) entraînent les conditions (B.1) à (B.4).

Proposition 2.16. – *Supposons les conditions* (C.1) *et* (C.2) *vérifiées. Alors, les conditions* (A.1) *à* (A.4) *sont vérifiées.*

Démonstration. – En combinant la Proposition 1.19 et la définition du symbole sous-principal $P_{2m-1}(x, D_x, D_t)$, on a la Proposition 2.16. ■

3. – Certains systèmes de Leray-Volevich du type de Schrödinger.

3.1. – *Introduction et énoncé des résultats.*

3.1.1. On considère un système d'équations aux dérivées partielles:

$$D_t u(x, t) - A(x, D_x) u(x, t) = 0\,, \tag{3.1}$$

où $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $D_x=(D_1, \ldots, D_n)$, $D_j=i^{-1}\partial/\partial x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $D_t=i^{-1}\partial/\partial t$, $A(x, D_x)=(a_{jk}(x, D_x))$ est une matrice $m \times m$ dont la (j, k)-composante $a_{jk}(x, D_x)$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre r_{jk} à coefficients $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et

$$u(x, t)={}^t(u_1(x, t), \ldots, u_m(x, t))$$

est un vecteur d'inconnues.

On impose une hypothèse *a priori* sur les ordres r_{jk} des opérateurs $a_{jk}(x, D_x)$:

HYPOTHÈSE (L-V). – Il existe une suite $\{s_1, \ldots, s_m\}$ de m entiers non négatifs telle qu'on ait

$$r_{jk} \leqslant s_k - s_j + 2 \quad (j, k=1, \ldots, m).$$

D'après Volevich ([57], [58]) il est toujours possible de trouver de telles suites $\{s_1, \ldots, s_m\}$ si l'on suppose que

$$\max_\sigma \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{j\sigma(j)} \right) \leqslant 2, \tag{3.2}$$

où σ parcourt toutes les permutations de $\{1, \ldots, m\}$.

Cette formulation de $\{s_1, \ldots, s_m\}$ est due à Mizohata [33]; un tel système $D_t I - A(x, D_x)$ est un des systèmes de Leray-Volevich (voir Leray [28], Volevich ([57], [58]) Gårding-Kotake-Leray [10], Hufford [15], Wagschal [59] et Miyake [31]).

Désormais, on fixe $\{s_1, \ldots, s_m\}$ dans l'hypothèse (L-V). Dans cette situation, l'opérateur $a_{jk}(x, D_x)$ peut s'écrire comme suit:

$$a_{jk}(x, D_x)=\sum_{|\alpha| \leqslant s_k - s_j + 2} a_{jk\alpha}(x) D_x^\alpha \quad (1 \leqslant j, k \leqslant m), \tag{3.3}$$

avec les coefficients $a_{jk\alpha}(x) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$, où $a_{jk}(x, D_x) \equiv 0$ si $s_k - s_j + 2 < 0$.

Nous allons donner des conditions afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps

$$(*) \quad \begin{cases} D_t u(x, t) - A(x, D_x) u(x, t) = f(x, t) \text{ sur } \mathbb{R}^n \times [-T, T], & (T>0), \\ u(x, 0)=u_0(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

soit bien posé dans l'espace de Sobolev $H^l(\mathbb{R}^n)$.

DÉFINITION 3.1. – On dit que le problème de Cauchy $(*)$ pour le futur et pour le passé en même temps est bien posé dans $H^l(\mathbb{R}^n)$ $(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si pour tout

$$u_0(x)={}^t(u_{01}(x), \ldots, u_{0m}(x)) \in H^{s_1+l+2}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times H^{s_m+l+2}(\mathbb{R}^n)$$

et tout

$$f(x, t) = {}^t(f_1(x, t), \ldots, f_m(x, t)) \in$$

$$C_t^1([-T, T]; H^{s_1+l}(\mathbb{R}^n)) \times \cdots \times C_t^1([-T, T]; H^{s_m+l}(\mathbb{R}^n)),$$

il existe une solution unique $u(x, t)$ du problème de Cauchy $(*)$ telle que

$$u_j(x, t) \in C_t^0([-T, T]; H^{s_j+l+2}(\mathbb{R}^n)) \cap C_t^1([-T, T]; H^{s_j+l}(\mathbb{R}^n)) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

et que de plus on ait l'inégalité d'énergie suivante:

$$|||u(t)|||_{(l)}^2 \leqslant C(T)\left\{|||u(0)|||_{(l)}^2 + \left|\int_0^t |||f(s)|||_{(l)}^2\, ds\right|\right\}, \qquad t \in [-T, T],$$

où $u_j(t) = u_j(\cdot, t)$ est la j-composante de $u(t) = u(\cdot, t)$ et

$$|||u(t)|||_{(l)}^2 = \sum_{j=1}^m \|\langle D_x\rangle^{s_j} u_j(t)\|_{(l)}^2,$$

$\|u_j(t)\|_{(l)}$ est la $H^l(\mathbb{R}^n)$-norme de $u_j(t)$.

Nos conditions s'expriment comme suit.

La première condition pour la partie principale est:

Condition (A.1). – On a $a_{jk\alpha}(x) = a_{jk\alpha}$ (Constante) pour $|\alpha| = s_k - s_j + 2$ $1 \leqslant j, k \leqslant m$.

On note $a_{jk}^0(\xi)$ le symbole principal de l'opérateur $a_{jk}(x, D_x)$:

$$a_{jk}^0(\xi) = \sum_{|\alpha| = s_k - s_j + 2} a_{jk\alpha}\, \xi^\alpha \tag{3.4}$$

et on pose $A_2(\xi) = (a_{jk}^0(\xi))$ qui s'appelle la matrice caractéristique.

La deuxième condition pour la partie principale est:

Condition (A.2). – Les valeurs propres de la matrice caractéristique $A_2(\xi)$ sont non nulles, réelles et distinctes pour $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$:

$$\text{dét}(\tau I - A_2(\xi)) = \prod_{j=1}^m (\tau - \lambda_j^0(\xi));$$

$$\lambda_j^0(\xi) \neq \lambda_k^0(\xi) \quad (j \neq k, \xi \neq 0); \qquad \lambda_j^0(\xi) \neq 0 \quad (\xi \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant m).$$

Remarque 3.2. – Afin que le problème de Cauchy pour l'opérateur $D_t I - A(x, D_x)$ pour le futur et pour le passé en même temps soit bien posé dans $H^l(\mathbb{R}^n)$ au sens de la Définition 3.1, il est nécessaire que les valeurs propres de la matrice caractéristique $A_2(\xi)$ soient réelles pour

$\xi \in \mathbb{R}^n$ même si les coefficients de $A_2(\xi)$ dépendent de x (Takeuchi [43], voir aussi Petrowsky [38], Mizohata [32]).

DÉFINITION 3.3. – On dit que un opérateur $D_t I - A(x, D_x)$ satisfaisant à l'hypothèse (L-V) est un système de Leray-Volevich du type de Schrödinger si et seulement si les valeurs propres de la matrice caractéristique $A_2(\xi)$ sont réelles pour $\xi \in \mathbb{R}^n$.

REMARQUE 3.4. – Pour caractériser l'opérateur du type de Schrödinger, il faut considérer non seulement le problème de Cauchy pour le futur ou pour le passé, mais aussi le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps; c'est pour exclure les systèmes «paraboliques» (voir Remarque 3.2 et Théorème 3.11 ci-dessous).

REMARQUE 3.5. – (1) $\lambda_j^0(\xi)$ est positivement homogène de degré 2 en ξ; (2) La condition (A.2) et l'identité d'Euler impliquent que

$$\xi \cdot \nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) = 2\lambda_j^0(\xi) \neq 0 \quad (\xi \neq 0) \text{ i.e.}, \qquad \nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) \neq 0 \quad (\xi \neq 0).$$

Pour $\omega \in S^{n-1}$, on note $l_j^0(\omega)$ [resp. $r_j^0(\omega)$] le zéro-vecteur à gauche (resp. à droite) de $(\lambda_j^0(\omega)\, I - A_2(\omega))$: $l_j^0(\omega)$ [resp. $r_j^0(\omega)$] est une matrice $1 \times m$ (resp. $m \times 1$) telle que

$$l_j^0(\omega)(\lambda_j^0(\omega)\, I - A_2(\omega)) = 0 \tag{3.5 l}$$

[resp.

$$(\lambda_j^0(\omega)\, I - A_2(\omega))\, r_j^0(\omega) = 0]\,. \tag{3.5 r}$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$, on définit $l_j^0(\xi)$ et $r_j^0(\xi)$ comme suit:

$$l_j^0(\xi) = l_j^0(\omega), \qquad r_j^0(\xi) = r_j^0(\omega), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0, \qquad \omega = \xi/|\xi|\,. \tag{3.6}$$

Et de plus, on impose la condition suivante:

$$l_j^0(\xi)\, r_j^0(\xi) = 1\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0\,; \tag{3.7}$$

d'où

$$l_j^0(\xi)\, r_k^0(\xi) = \delta_{jk}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0 \tag{3.8}$$

d'après la condition (A.2).

On note $a_{jk}^1(x, \xi)$ le symbole sous-principal de l'opérateur $a_{jk}(x, D_x)$:

$$a_{jk}^1(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s_k - s_j + 1} a_{jk\alpha}(x)\, \xi^\alpha \tag{3.9}$$

et on pose $A_1(x, \xi) = (a_{jk}^1(x, \xi))$ qui s'appelle la martice sous-principale.

Remarquons que $l_j^0(\xi)\, A_1(x, \xi)\, r_j^0(\xi)$ est une scalaire.

Les conditions pour le symbole sous-principal s'expriment comme suit:

CONDITION (B.1). – Pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, on a

$$\sup_{(x,\,\omega,\,\varrho) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1} \left| \int_0^{\varrho} \operatorname{Im} \{ l_j^0(\omega)\, A_1(x + s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\omega),\, \omega)\, r_j^0(\omega) \}\, ds \right| < +\infty\,.$$

CONDITION (B.2). – Pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et tout multi-indice ν $(|\nu| \geqslant 1)$, on a

$$\sup_{(x,\,\omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \int_0^{+\infty} |D_x^\nu \{ \operatorname{Im} l_j^0(\omega)\, A_1(x + s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\omega),\, \omega)\, r_j^0(\omega) \}|\, ds < +\infty\,.$$

CONDITION (B.3). – Pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et tout multi-indice ν, on a

$$\sup_{(x,\,\omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \{ \langle x \rangle\, |D_x^\nu (\operatorname{Im} l_j^0(\omega)\, A_1(x,\, \omega)\, r_j^0(\omega))| \} < +\infty\,.$$

CONDITION (B.4). – Pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et tout multi-indice ν $(|\nu| \geqslant 1)$, on a

$$\sup_{(x,\,\omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \{ \langle x \rangle\, |D_x^\nu (\operatorname{Re} l_j^0(\omega)\, A_1(x,\, \omega)\, r_j^0(\omega))| \} < +\infty\,.$$

REMARQUE 3.6. – Les conditions (B.1) à (B.4) ne dépendent pas du choix du zéro-vecteur à gauche et du zéro-vecteur à droite satisfaisant (3.7).

Nos résultats s'énoncent ainsi:

THÉORÈME 3.7. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.4) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy* $(*)$ *pour le futur et pour le passé en même temps est bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ *au sens de la Définition* 3.1 *pour tout* $l \in \mathbb{R}$.

COROLLAIRE 3.8. – *Supposons que* $s_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *et que les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.4) *soient vérifiées. Alors, le problème de Cauchy* $(*)$ *pour le futur et pour le passé en même temps est bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ *au sens de la Définition* 3.1 *avec* $s_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *pour tout* $l \in \mathbb{R}$.

3.1.2. Nous allons donner d'autres conditions afin que le problème de Cauchy $(*)$ pour le futur et pour le passé en même temps soit bien posé dans $H^l(\mathbb{R}^n)$ au sens de la Définition 3.1.

Nos conditions s'expriment comme suit:

CONDITION (C.1). – Il existe une constante positive ε_0 telle que, pour tout $|\alpha| = s_k - s_j + 1$, $1 \leqslant j$, $k \leqslant m$ et tout multi-indice ν, on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x \rangle^{1+\varepsilon_0} |D_x^\nu (\operatorname{Im} a_{jk\alpha}(x))|\} < +\infty .$$

CONDITION (C.2). – Pour tout $|\alpha| = s_k - s_j + 1$, $1 \leqslant j$, $k \leqslant m$ et tout multi-indice ν ($|\nu| \geqslant 1$), on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x \rangle |D_x^\nu (\operatorname{Re} a_{jk\alpha}(x))|\} < +\infty .$$

Notre résultat s'énonce ainsi:

THÉORÈME 3.9. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (C.1) *et* (C.2) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy* ($*$) *pour le futur et pour le passé en même temps est bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ *au sens de la Définition* 3.1 *pour tout* $l \in \mathbb{R}$.

3.1.3. Pour démontrer les Théorèmes 3.7 et 3.9, nous proposons une méthode de «L^2-symétrisation indépendante du temps» qui est une généralisation de celle proposée au chapitre 1. Cette méthode est comme suit: D'abord, on diagonalise ce système; ensuite, on réduit ce système diagonal à un système diagonal et L^2-symétrique par un opérateur pseudo-différentiel indépendant du temps. Ce résultat de L^2-symétrisation indépendante du temps est plus fort que celui des Théorèmes 3.7 et 3.9; nous le verrons à la Section 3.2 (le Théorème 3.23).

3.1.4. Afin d'obtenir des conditions nécessaires, on considère une définition plus faible que la Définition 3.1.

DÉFINITION 3.10. – On dit que le problème de Cauchy ($*$) pour le futur et pour le passé en même temps est bien posé dans $H^l(\mathbb{R}^n)$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) si et seulement si pour tout

$$u_0(x) = {}^t(u_{01}(x), \ldots, u_{0m}(x)) \in H^{s_1+l}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times H^{s_m+l}(\mathbb{R}^n)$$

et tout

$$f(x, t) = {}^t(f_1(x, t), \ldots, f_m(x, t)) \in$$
$$C_t^0([-T, T]; H^{s_1+l}(\mathbb{R}^n)) \times \ldots \times C_t^0([-T, T]; H^{s_m+l}(\mathbb{R}^n)) ,$$

il existe une solution unique $u(x, t)$ du problème de Cauchy ($*$) telle que

$$u_j(x, t) \in C_t^1([-T, T]; H^{s_j+l}(\mathbb{R}^n)) \quad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

et que de plus on ait l'inégalité d'énergie suivante:

$$[[u(t)]]_{(l)}^2 \leqslant C(T)\left\{[[u(0)]]_{(l)}^2 + \left|\int_0^t [[f(s)]]_{(l)}^2\, ds\right|\right\}, \qquad t \in [-T, T],$$

où $u_j(x, t)$ est la j-composante de $u(x, t)$ et

$$[[u(t)]]_{(l)}^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leqslant s_j + l} \|D_x^\alpha u_j(t)\|^2,$$

$\|u_j(t)\|$ est la $L^2(\mathbb{R}^n)$-norme de $u_j(\cdot, t)$.

On impose la condition suivante plus faible que la condition (A.2):

Condition (A.2)'. – Les valeurs propres $\lambda_j^0(\xi)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ de la matrice caractéristique $A_2(\xi)$ sont réelles et distinctes pour $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$.

Remarquons que $\lambda_j^0(\xi)$ peut s'annuler pour certains $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Notre résultat s'énonce ainsi:

Théorème 3.11 (Takeuchi [55]). – *Supposons les conditions* (A.1) *et* (A.2)' *vérifiées. Alors, afin que le problème de Cauchy* $(*)$ *pour le futur et pour le passé en même temps soit bien posé dans* $H^l(\mathbb{R}^n)$ $(l \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ *au sens de la Définition* 3.10, *il est nécessaire que la condition* (B.1) *soit vérifiée.*

Pour démontrer le Théorème 3.11, on construit des solutions asymptotiques du problème de Cauchy $(*)$ selon Takeuchi [42], [44] (voir aussi Birkhoff [3], Leray [29], Maslov [30] et Mizohata [34], [37]). Nous démontrerons le Théorème 3.11 dans un autre article.

3.2. – *L^2-symétrisation indépendante du temps.*

3.2.1. Diagonalisation du système.

Soit $A(x, D_x) = (a_{jk}(x, D_x))$ est la matrice $m \times m$ d'opérateurs différentiels linéaires définie dans la section 3.1.

On considère un système:

$$D_t u(x, t) - A(x, D_x)\, u(x, t) = f(x, t)\,. \tag{3.10}$$

On note $J(\xi)$ le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel diagonal $J(D_x)$:

$$J(\xi) = \operatorname{diag}(\langle\xi\rangle^{s_1}, \ldots, \langle\xi\rangle^{s_m})\,. \tag{3.11}$$

En notant

$$\tilde{u}(x, t) = J(D_x)\, u(x, t),$$

$$\widetilde{A}(x, D_x) = J(D_x)\, A(x, D_x)\, J(D_x)^{-1},$$

$$\tilde{f}(x, t) = J(D_x)\, f(x, t),$$

on a un système suivant:

$$D_t \tilde{u}(x, t) - \widetilde{A}(x, D_x)\, \tilde{u}(x, t) = \tilde{f}(x, t). \tag{3.12}$$

On note

$$\widetilde{A}(x, D_x) = \widetilde{A}_2(D_x) + \widetilde{A}_1(x, D_x) + \widetilde{A}_0(x, D_x), \tag{3.13}$$

où

$$\widetilde{A}_2(D_x) = J(D_x)\, A_2(D_x)\, J(D_x)^{-1},$$

$$\widetilde{A}_1(x, D_x) = J(D_x)\, A_1(x, D_x)\, J(D_x)^{-1}.$$

Le symbole $\widetilde{A}_2(\xi)$ de l'opérateur $\widetilde{A}_2(D_x)$ s'exprime comme suit:

$$\widetilde{A}_2(\xi) = J(\xi)\, A_2(\xi)\, J(\xi)^{-1} = A_2(\xi/\langle\xi\rangle))\langle\xi\rangle^2. \tag{3.14}$$

Le symbole $\widetilde{A}_1(x, \xi)$ de l'opéreteur $\widetilde{A}_1(x, D_x)$ s'exprime comme suit:

$$\widetilde{A}_1(x, \xi) = J(\xi)\, A_1(x, \xi)\, J(\xi)^{-1} + \sum_{|\nu| \geqslant 1} \frac{1}{\nu!} J^{(\nu)}(\xi)\, A_{1(\nu)}(x, \xi)\, J(\xi)^{-1},$$

où

$$f^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, \xi) = D_x^\beta (iD_\xi)^\alpha f(x, \xi).$$

Comme

$$\sum_{|\nu| \geqslant 1} \frac{1}{\nu!} J^{(\nu)}(\xi)\, A_{1(\nu)}(x, \xi)\, J(\xi)^{-1} \in \mathrm{Mat}\,(m; S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)),$$

on a

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1(x, \xi) &\equiv J(\xi)\, A_1(x, \xi)\, J(\xi)^{-1} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathrm{Mat}\,(m; S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))) \\ &= A_1(x, \xi/\langle\xi\rangle)\langle\xi\rangle. \end{aligned} \tag{3.15}$$

LEMME 3.12. – Soit $a(x, \xi) \in S^d_{1,0}(\mathbb{R}^n)$. *Alors on a*

$$a(x, \xi/\langle\xi\rangle) - a(x, \xi/|\xi|)\chi_\infty(\xi) \in S^{d-2}_{1,0}(\mathbb{R}^n),$$

où $\chi_\infty(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_\infty(\xi) = 1$ $(|\xi| \geqslant 1)$, $\chi_\infty(\xi) = 0$ $(|\xi| \leqslant 1/2)$.

DÉMONSTRATION. – On a

$$a(x, \xi/\langle\xi\rangle) - a(x, \xi/|\xi|)\chi_\infty(\xi) =$$
$$= \{a(x, \xi/\langle\xi\rangle) - a(x, \xi/|\xi|)\}\,\chi_\infty(\xi) + (1-\chi_\infty)(\xi)\,a(x, \xi/\langle\xi\rangle) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}).$$

$$(\mathrm{I}) = \chi_\infty(\xi)\int_0^1 (\nabla_\xi a)(x, \xi/|\xi| + \theta(\xi/\langle\xi\rangle - \xi/|\xi|))\cdot(\xi/\langle\xi\rangle - \xi/|\xi|)\,d\theta =$$

$$= \chi_\infty(\xi)\left(\frac{1}{\langle\xi\rangle} - \frac{1}{|\xi|}\right)\int_0^1 (\xi\cdot\nabla_\xi a)(x, \xi/|\xi| + \theta(\xi/\langle\xi\rangle - \xi/|\xi|))\,d\theta =$$

$$= \chi_\infty(\xi)\,\frac{-1}{\langle\xi\rangle(|\xi| + \langle\xi\rangle)}\int_0^1 \left(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\nabla_\xi a\right)(x, \xi/|\xi| + \theta(\xi/\langle\xi\rangle - \xi/|\xi|))\,d\theta\,;$$

d'où $(\mathrm{I}) \in S^{d-2}_{1,0}(\mathbb{R}^n)$. Il est évident que $(\mathrm{II}) \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. ■

D'après (3.13) à (3.15) et le Lemme 3.12, on a

$$\widetilde{A}(x, \xi) \equiv A_2(\xi/|\xi|)|\xi|^2\chi_\infty(\xi) + A_1(x, \xi/|\xi|)|\xi|\,\chi_\infty(\xi)$$
$$(\mathrm{mod}\ \mathrm{Mat}(m;\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)))\,.$$

Grâce à la condition (A.2), on peut diagonaliser le système (3.12):

PROPOSITION 3.13 (Diagonalisation). – *Supposons que les conditions* (A.1) *et* (A.2) *soient vérifiées. Alors, il existe un opérateur pseudo-différentiel diagonal* $\mathcal{D}(x, D_x) \in \mathrm{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\,S^2_{1,0}(\mathbb{R}^n))$ *et un opérateur pseudo-différentiel inversible* $N(x, D_x) \in \mathrm{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\,S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))$ *tels que*

(1) *l'on ait l'équation suivante*:

$$N(x, D_x)(D_t - \widetilde{A}(x, D_x)) \equiv (D_t - \mathcal{D}(x, D_x))\,N(x, D_x),$$
$$(\mathrm{mod}\ \mathrm{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\,S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)))$$

(2) *en notant* $\sigma(\mathcal{D})(x, \xi) = (\delta_{jk}\lambda_k(x, \xi))$ *le symbole de l'opéreteur* $\mathcal{D}(x, D_x)$, *on ait*

$$\lambda_j(x, \xi) = \lambda^0_j(\xi) + \lambda^1_j(x, \xi), \tag{3.16}$$

$$\lambda^1_j(x, \xi) = l^0_j(\xi)\,\widetilde{\widetilde{A}}_1(x, \xi)\,r^0_j(\xi) \in S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n), \tag{3.17}$$

où

$$\tilde{\tilde{A}}_1(x, \xi) = A_1(x, \xi/|\xi|)|\xi|\chi_\infty(\xi) \in \mathrm{Mat}(m; S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n)), \tag{3.18}$$

et $l_j^0(\xi)$ (*resp.* $r_j^0(\xi)$) *est le zéro-vecteur à gauche* (*resp. à droite*) *de*

$$(\lambda_j^0(\xi)\, I - A_2(\xi/|\xi|)\, |\xi|^2)$$

défini par (3.5 l) (*resp.* (3.5 r)) *et* (3.6).

DÉMONSTRATION. – *Preuve de* (1) – En notant

$$\tilde{J}(\xi) = \mathrm{diag}(|\xi|^{s_1}, \ldots, |\xi|^{s_m}) \quad (\xi \neq 0),$$

$$\tilde{\tilde{A}}_2(\xi) = A_2(\xi/|\xi|)\,|\xi|^2 = \tilde{J}(\xi)\, A_2(\xi)\, \tilde{J}(\xi)^{-1},$$

on a

$$\mathrm{dét}(\tau I - \tilde{\tilde{A}}_2(\xi)) = \mathrm{dét}(\tau I - A_2(\xi)) = \prod_{j=1}^{m} (\tau - \lambda_j^0(\xi)). \tag{3.19}$$

Vu (3.5 l), (3.5 r) et (3.19), on a

$$l_j^0(\xi)(\lambda_j^0(\xi)\, I - \tilde{\tilde{A}}_2(\xi)) = 0,$$

$$(\lambda_j^0(\xi)\, I - \tilde{\tilde{A}}_2(\xi))\, r_j^0(\xi) = 0.$$

La condition (A.2) entraîne que les vecteurs $\{l_1^0(\xi), \ldots, l_m^0(\xi)\}$ sont linéairement indépendantes pour $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$.

On note

$$N_0(\xi) = \begin{bmatrix} l_1^0(\xi) \\ \vdots \\ l_m^0(\xi) \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Par l'homogénéité de $l_j^0(\xi)$ en $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$, on a:

$$|\mathrm{dét}\, N_0(\xi)| \geqslant \delta > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0.$$

D'après (3.8), on a

$$N_0(\xi)^{-1} = [r_1^0(\xi), \ldots, r_m^0(\xi)] \quad (\xi \neq 0). \tag{3.21}$$

On modifie $N_0(\xi)$ dans $|\xi| \leqslant 1$ en tenant la condition $|\mathrm{dét}\, N_0(\xi)| \geqslant \delta > 0$ et la condition $N_0(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On note:

$$\mathcal{D}_2(\xi)=\operatorname{diag}(\lambda_1^0(\xi),\,\dots,\,\lambda_m^0(\xi))\,. \tag{3.22}$$

Alors, on a

$$N_0(\xi)\,\widetilde{\widetilde{A}}_2(\xi)=\mathcal{D}_2(\xi)\,N_0(\xi)\,, \tag{3.23}$$

$$N_0(\xi)\{\widetilde{\widetilde{A}}_2(\xi)\,\chi_\infty(\xi)\}=\{\mathcal{D}_2(\xi)\,\chi_\infty(\xi)\}\,N_0(\xi)\,. \tag{3.24}$$

On pose

$$N(x,\,\xi)=N_0(\xi)+N_{-1}(x,\,\xi)\,, \tag{3.25}$$

$$\mathcal{D}(x,\,\xi)=\mathcal{D}_2(\xi)+\mathcal{D}_1(x,\,\xi)\,, \tag{3.26}$$

où

$$N_{-1}(x,\,\xi)\in\operatorname{Mat}(m;\,S^{-1}_{1,\,0}(\mathbb{R}^n))\quad\text{et}\quad\mathcal{D}_1(x,\,\xi)\in\operatorname{Mat}(m;\,S^1_{1,\,0}(\mathbb{R}^n))\,,$$

qui seront à déterminer.

D'après (3.23) et (3.24), on a

$$N(x,\,D_x)\,\widetilde{A}(x,\,D_x)\equiv\mathcal{D}(x,\,D_x)\,N(x,\,D_x)\qquad(\operatorname{mod}\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^1_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)))\,, \tag{3.27}$$

parce que on a, par définition,

$$N_0(D_x)\,\widetilde{A}_2(D_x)\equiv N_0(D_x)\{\widetilde{\widetilde{A}}_2(D_x)\,\chi_\infty(D_x)\}\qquad(\operatorname{mod}\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^1_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)))$$

$$=\{\mathcal{D}_2(D_x)\,\chi_\infty(D_x)\}\,N_0(D_x)=\mathcal{D}_2(D_x)\,N_0(D_x)+\mathcal{D}_2(D_x)(1-\chi_\infty)(D_x)\,N_0(D_x)\,,$$

$$\mathcal{D}_2(D_x)(1-\chi_\infty)(D_x)\,N_0(D_x)\in\mathrm{OP}\,S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Ensuite, on considère l'équation (3.27) $(\operatorname{mod}\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^0_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)))$:

$$N_0(D_x)\,\widetilde{\widetilde{A}}_1(x,\,D_x)+N_{-1}(x,\,D_x)\,\widetilde{\widetilde{A}}_2(D_x)\,\chi_\infty(D_x)\equiv \tag{3.28}$$

$$\equiv\mathcal{D}_2(D_x)\,N_{-1}(x,\,D_x)+\mathcal{D}_1(x,\,D_x)\,N_0(D_x)\qquad(\operatorname{mod}\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^0_{1,\,0}(\mathbb{R}^n)))\,.$$

(3.28) implique que

$$N_0(\xi)\,\widetilde{\widetilde{A}}_1(x,\,\xi)+N_{-1}(x,\,\xi)\,\widetilde{\widetilde{A}}_2(\xi)\,\chi_\infty(\xi)=\mathcal{D}_2(\xi)\,N_{-1}(x,\,\xi)+\mathcal{D}_1(x,\,\xi)\,N_0(\xi)\,. \tag{3.29}$$

En posant

$$N_{-1}(x,\xi)N_0(\xi)^{-1}=\widetilde{N}_{-1}(x,\xi)=(\tilde{n}_{jk}), \tag{3.30}$$

et en remarquant

$$\mathcal{D}_2(\xi)\,\chi_\infty(\xi)\equiv\mathcal{D}_2(\xi)\quad(\operatorname{mod}\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))),$$

on a

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{-1}(x,\xi)\,\mathcal{D}_2(\xi)-\mathcal{D}_2(\xi)\,\widetilde{N}_{-1}(x,\xi)&\equiv\\ \equiv\mathcal{D}_1(x,\xi)-N_0(\xi)\,\tilde{\tilde{A}}_1(x,\xi)\,N_0(\xi)^{-1}&\quad(\operatorname{mod}\operatorname{Mat}(m;\,S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))).\end{aligned} \tag{3.31}$$

On note:

$$R_1(x,\xi)=N_0(\xi)\,\tilde{\tilde{A}}_1(x,\xi)\,N_0^{-1}(\xi)=(r_{jk}(x,\xi)). \tag{3.32}$$

Alors, on choisit $\mathcal{D}_1(x,\xi)$ telle que

$$\mathcal{D}_1(x,\xi)=\text{diagonale de } R_1(x,\xi). \tag{3.33}$$

On définit:

$$\tilde{n}_{jk}(x,\xi)=\begin{cases}(\lambda^0_j(\xi)-\lambda^0_k(\xi))^{-1}r_{jk}(x,\xi)\,\chi_{R_0}(\xi), & \text{si } j\neq k,\\ 0, & \text{si } j=k,\end{cases} \tag{3.34}$$

où $\chi_{R_0}(\xi)=\chi(\xi/R_0)$, $\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)=1$ $(|\xi|\geqslant 1)$, $\chi(\xi)=0$ $(|\xi|\leqslant 1/2)$.

(3.30), (3.32) et (3.34) impliquent que $\widetilde{N}_{-1}(x,\xi)\in\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n))$.

(3.32) et (3.33) entraînent que $\mathcal{D}_1(x,\xi)\in\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n))$.

Donc, $\mathcal{D}_1(x,\xi)$ et $N_{-1}(x,\xi)=\widetilde{N}_{-1}(x,\xi)\,N_0(\xi)$ satisfont à l'équation (3.29): $\mathcal{D}(x,D_x)=\mathcal{D}_2(D_x)+\mathcal{D}_1(x,D_x)$ et $N(x,D_x)=(I+\widetilde{N}_{-1}(x,D_x))\times N_0(D_x)$ satisfont à l'équation (3.28).

De plus, en prenant R_0 assez grand, on a

$$\|\widetilde{N}_{-1}(x,D_x)\|_{\mathcal{L}(H^s,H^s)}\leqslant r_0<1. \tag{3.35}$$

(3.35) entraîne que

$$(I+\widetilde{N}_{-1}(x,D_x))^{-1}=I+(-\widetilde{N}_{-1}(x,D_x))+\ldots+(-\widetilde{N}_{-1}(x,D_x))^k+\ldots$$

existe et appartient à $\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))$ (voir Kumano-go [27], Appendice I).

Donc, $N(x,D_x)$ est inversible dans $\operatorname{Mat}(m;\,\mathrm{OP}\,S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n))$ et l'inverse $N(x,D_x)^{-1}$ est donné par

$$N(x,D_x)^{-1}=N_0(D_x)^{-1}(I+\widetilde{N}_{-1}(x,D_x))^{-1}.$$

– *Preuve de* (2) – Vu (3.20) à (3.22), (3.32), (3.33) et (3.26), on a (3.16) à (3.18).

La démonstration de la Proposition 3.13 est complète. ■

3.2.2. L^2-symétrisation indépendante du temps du système.

Dans cette sous-section, on toujours suppose les conditions (A.1), (A.2), (B.1) à (B.4) vérifiées.

On définit le symbole $K(x, \xi)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $K(x, D_x)$ comme suit:

$$K(x, \xi) = \operatorname{diag}(k_1(x, \xi), \ldots, k_m(x, \xi)),$$

$$k_j(x, \xi) = \exp(\chi_R(\xi)\, \psi_R(x, \xi)\, \varphi_j(x, \xi)),$$

$$\varphi_j(x, \xi) = \Phi_j(x, \xi, \mu_j(x, \xi)),$$

$$\Phi_j(x, \xi, t) = \int_0^t \operatorname{Im} \lambda_j^1(x - s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\xi), \xi)\, ds,$$

$$\mu_j(x, \xi) = (x \cdot \nabla_\xi \lambda_j^0(\xi)) / |\nabla_\xi \lambda_j^0(\xi)|^2,$$

$$\chi_R(\xi) = \chi(\xi/R), \qquad \psi_R(x, \xi) = \psi(R\langle x\rangle\langle\xi\rangle^{-1}),$$

où $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) = 1$ $(|\xi| \geqslant 2)$, $\chi(\xi) = 0$ $(|\xi| \leqslant 1)$, $\psi(s) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\psi(s) = 1$ $(s \leqslant 1)$, $\psi(s) = 0$ $(s \geqslant 2)$ et $R \geqslant 1$.

Remarquons que $\varphi_j(x, \xi)$ est positivement homogène de degré 0 en $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$: $\varphi_j(x, r\xi) = \varphi_j(x, \xi)$ pour tout $r > 0$.

LEMME 3.14. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha \Phi_j(x, \xi, t)| \leqslant C_{\alpha\beta} |t|^{|\alpha|}.$$

DÉMONSTRATION. – La même que celle du Lemme 1.8. ■

LEMME 3.15. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha D_t^k \Phi_j(x, \xi, t)| \leqslant C_{\alpha\beta k} \sum_{0 \leqslant l \leqslant \min\{|\alpha|, k\}} |t|^{|\alpha| - l} |\xi|^{k - l}.$$

DÉMONSTRATION. – La même que celle du Lemme 1.9. ■

LEMME 3.16. – *Pour la fonction* $\mu_j(x, \xi)$, *on a les estimations*:

(i) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu_j(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{1-|\beta|}|\xi|^{-1-|\alpha|}$ *si* $|\beta| \leqslant 1$,

(ii) $D_x^\beta D_\xi^\alpha \mu_j(x, \xi) = 0$ *si* $|\beta| \geqslant 2$.

DÉMONSTRATION. – La même que celle du Lemme 1.10. ■

En combinant les Lemmes 3.15 et 3.16, on a les estimations suivantes pour $\varphi_j(x, \xi) = \Phi_j(x, \xi, \mu_j(x, \xi))$ qui est au cœur du problème:

PROPOSITION 3.17. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations suivantes pour* $\xi \neq 0$:

(i) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha \varphi_j(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\left(\dfrac{\langle x\rangle}{|\xi|}\right)^{|\alpha|}$,

(ii) $|D_x^\beta D_\xi^\alpha (\exp \varphi_j(x, \xi))| \leqslant C_{\alpha\beta}\left(\dfrac{\langle x\rangle}{|\xi|}\right)^{|\alpha|}$.

DÉMONSTRATION. – La même que celle de la Proposition 1.11. ■

LEMME 3.18. – *On a les estimations suivante*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha \psi_R(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{-|\beta|}\langle \xi\rangle^{-|\alpha|},$$

où $C_{\alpha\beta}$ *est une constante indépendante de* R $(R \geqslant 1)$.

DÉMONSTRATION. – Voir la démonstration du Lemme 1.12. ■

En combinant la Proposition 3.17 et le Lemme 3.18, on a les estimations suivantes.

PROPOSITION 3.19. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, on a les estimations*:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha k_j(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} R^{-|\alpha|} \quad (R \geqslant 1),$$

où $C_{\alpha\beta}$ *est une constante indépendante de* R, *c'est-à-dire que* $k_j(x, \xi) \in S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$.

DÉMONSTRATION. – La même que celle de la Proposition 1.13. ■

D'après le théorème de Calderón-Vaillancourt [4], l'opérateur $K(x, D_x)$ est borné dans $(H^s(\mathbb{R}^n))^m$.

PROPOSITION 3.20. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *et* (B.2) *vérifiées. Alors, l'opérateur* $K(x, D_x)$ *est inversible dans* $\mathrm{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))$ *si* R *est suffisamment grand.*

DÉMONSTRATION. – La même que celle de la Proposition 1.14. ■

L'équation du lemme suivant était le point de départ du problème.

LEMME 3.21. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.3) *vérifiées. Alors, le symbole* $k_j(x, \xi)$ *de l'opérateur* $k_j(x, D_x)$ *satisfait à l'équation suivante*:

$$(\nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) \cdot D_x - i\, \mathrm{Im}\, \lambda_j^1(x, \xi))\, k_j(x, \xi) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))\, .$$

DÉMONSTRATION. – La même que celle du Lemme 1.15. ■

La proposition suivante est au cœur du problème.

PROPOSITION 3.22. – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.4) *vérifiées. Alors, on a*

$$[K(x, D_x), \mathcal{D}_1^{\mathrm{R}}(x, D_x)] \in \mathrm{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))\, ,$$

où $[A, B] = AB - BA$ *est le commutateur d'opérateurs* A *et* B,

$$\mathcal{D}_1^{\mathrm{R}}(x, \xi) = \mathrm{diag}\,(\mathrm{Re}\, \lambda_1^1(x, \xi),\, \dots,\, \mathrm{Re}\, \lambda_m^1(x, \xi))\, ,$$

le symbole $\lambda_j^1(x, \xi)$ *est défini par* (3.17) *et* (3.18).

DÉMONSTRATION. – La même que celle de la Proposition 1.16. ■

En résumé, on obtient le théorème suivant qui est le but de nos études:

THÉORÈME 3.23 (L^2-symétrisation). – *Supposons les conditions* (A.1), (A.2), (B.1) *à* (B.4) *vérifiées. Alors, il existe un opérateur pseudo-différentiel matriciel* $\widetilde{K}(x, D_x)$ *tel que*

(1) $\widetilde{K}(x, D_x)$ *appartienne à* $\mathrm{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))$,

(2) $\widetilde{K}(x, D_x)$ *soit inversible dans* $\mathrm{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))$,

(3) $\widetilde{K}(x, D_x)$ *satisfasse à l'équation suivante*:

$$J(D_x)(D_t - A(x, D_x))\, J(D_x)^{-1} \widetilde{K}(x, D_x) \equiv \widetilde{K}(x, D_x)(D_t - \mathcal{D}^{\mathrm{R}}(x, D_x))\, ,$$

$$(\mathrm{mod}\ \mathrm{Mat}\,(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,\,0}(\mathbb{R}^n))\, ,$$

où le symbole $J(\xi)$ *de l'opérateur* $J(D_x)$ *est défini par* (3.11),

$$\mathcal{D}^{\mathrm{R}}(x, D_x) = \operatorname{diag}(\lambda_1^{\mathrm{R}}(x, D_x), \ldots, \lambda_m^{\mathrm{R}}(x, D_x)),$$

$$\lambda_j^{\mathrm{R}}(x, \xi) = \lambda_j^0(\xi) + \operatorname{Re} \lambda_j^1(x, \xi)$$

et le symbole $\lambda_j^1(x, \xi)$ *est défini par* (3.17) *et* (3.18).

DÉMONSTRATION. – En combinant les Propositions 3.19, 3.20 et 3.22, on a le Théorème 3.23. ■

REMARQUE 3.24. – C'est seulement pour obtenir le Lemme 3.21, la Proposition 3.22 et le Théorème 3.23 que l'on utilise la condition (B.3); C'est seulement pour assurer la Proposition 3.22 et le Théorème 3.23 que l'on utilise la condition (B.4).

3.3. – *Preuve des Théorèmes* 3.7 *et* 3.9.

3.3.1. Preuve du Théorème 3.7.

Dans cette sous-section, on toujours suppose les conditions (A.1), (A.2), (B.1) à (B.4) vérifiées.

On applique $N(x, D_x)$ à (3.12) à gauche, on a, d'après la Proposition 3.13,

$$(3.36)\qquad (D_t - \mathcal{D}(x, D_x))\, v(x, t) + B_0(x, D_x)\, v(x, t) = N(x, D_x)\, \tilde{f}(x, t),$$

où

$$v(x, t) = N(x, D_x)\, \tilde{u}(x, t), \qquad B_0(x, D_x) \in \operatorname{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)).$$

En posant à l'équation (3.36),

$$v(x, t) = K(x, D_x)\, w(x, t),$$

on a un système suivant:

$$(D_t - \mathcal{D}^R(x, D_x) + B(x, D_x))\, w(x, t) = \widetilde{B}(x, D_x)\, \tilde{f}(x, t),$$

où

$$B(x, D_x) \in \operatorname{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)),$$

$$\widetilde{B}(x, S_x) = K(x, D_x)^{-1} N(x, D_x) \in \operatorname{Mat}(m;\, \mathrm{OP}\, S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)).$$

Le problème de Cauchy pour l'opérateur

$$D_t - \mathcal{D}^R(x, D_x) + B(x, D_x)$$

dans $\mathbb{R}^n \times [-T, T]$ est bien posé dans $(H^s(\mathbb{R}^n))^m$. Vu la Proposition 3.13

et le Théorème 3.23, les normes $\|w(t)\|$, $\|v(t)\|$ et $\|\tilde{u}(t)\|$ sont équivalentes. Vu que $\|\tilde{u}(t)\| = \|J(D_x)\, u(t)\| = |\!|\!|\, u(t)\, |\!|\!|$, on a le Théorème 3.7.

La démonstration du Théorème 3.7 est complète. ■

3.3.2. Preuve du Théorème 3.9.

Dans cette sous-section, on toujours suppose les conditions (A.1), (A.2), (C.1) et (C.2) vérifiées. On peut démontrer directement le Théorème 3.9 parallèlement à la preuve du Théorème 3.7. Mais, il suffit de démontrer que les conditions (C.1) et (C.2) entraînent les conditions (B.1) à (B.4).

PROPOSITION 3.25. – *Supposons les conditions* (C.1) *et* (C.2) *vérifiées. Alors, les conditions* (B.1) *à* (B.4) *sont vérifiées.*

DÉMONSTRATION. – (1) Vu la condition (C.1), pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, tout multi-indice ν et tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, on a

$$|D_x^\nu \operatorname{Im}\{l_j^0(\omega)\, A_1(x, \omega)\, r_j^0(\omega)\}| \leqslant C_{\nu j} \langle x \rangle^{-1-\varepsilon_0} \qquad (\varepsilon_0 > 0)\,;$$

d'où les conditions (B.1) à (B.3).

(2) Vu la condition (C.2), pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, tout multi-indice ν $(|\nu| \geqslant 1)$ et tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, on a

$$|D_x^\nu \operatorname{Re}\{l_j^0(\omega)\, A_1(x, \omega)\, r_j^0(\omega)\}| \leqslant C_{\nu j} \langle x \rangle^{-1}\,;$$

d'où la condition (B.4).

La démonstration de la Proposition 3.25 est complète. ■

D'après la Proposition 3.25, on a le Théorème 3.9. La démonstration du Théorème 3.9 est complète. ■

Remerciements. L'auteur tient à exprimer ici toute sa reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean Vaillant qui a permis à l'auteur de faire de la recherche dans son Laboratoire de l'Université de Paris-VI depuis 1989. Grâce à son accueil et ses conseils, l'auteur a pu avancer dans ses études et a pu réaliser ce travail. L'auteur tient à remercier Monsieur le Professeur Jean Leray qui s'est intéressé aux Notes de l'auteur proposées aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris; il a donné beaucoup de conseils précieux pour les Notes de l'auteur et il a fait l'effort de les améliorer. L'auteur souhaite également remercier Monsieur le Professeur Sigeru Mizohata qui a conduit l'auteur au monde des Équations aux Dérivées Partielles; il a enseigné l'auteur à faire la recherche, il a inspiré l'auteur et il a constamment conseillé l'auteur depuis le début des études de l'auteur.

RÉFÉRENCES

[1] A. BABA, *The L^2-wellposed Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Tsukuba J. Math., **16** (1992), 235-256.

[2] A. BABA, *The H^∞-wellposed Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Tsukuba J. Math., **18** (1994), 101-117.

[3] G. D. BIRKHOFF, *Quantum mechanics and asymptotic series*, Bull. Amer. Math. Soc., **39** (1933), 681-700.

[4] A. P. CALDERÓN - R. VAILLANCOURT, *A class of bounded pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **69** (1972), 1185-1187.

[5] H. CARTAN, *Formes Différentielles*, Cours de Mathématiques II, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[6] P. CONSTANTIN - J. C. SAUT, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc., **1** (1988), 413-439.

[7] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, Interscience Publishers, New York, 1953.

[8] S. DOI, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and the regularity of solutions*, J. Math. Kyoto Univ., **34** (1994), 319-328.

[9] S. DOI, *Remarks on the Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Comm. Partial Differential Equations, **21** (1996), 163-178.

[10] L. GÅRDING - T. KOTAKE - J. LERAY, *Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes*, Bull. Soc. Math. France, **92** (1964), 263-361.

[11] S. HARA, *A necessary condition for H^∞-wellposed Cauchy problem of Schrödinger type equations with variable coefficients*, J. Math. Kyoto Univ., **32** (1992), 287-305.

[12] N. HAYSHI - K. NAKAMITSU - M. TSUTSUMI, *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal., **71** (1987), 218-245.

[13] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, 1957.

[14] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. III, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[15] G. HUFFORD, *On the characteristic matrix of a matrix of differential operators*, J. Diff. Equations, **1** (1965), 27-38.

[16] W. ICHINOSE, *Some remarks on the Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Osaka J. Math., **21** (1984), 565-581.

[17] W. ICHINOSE, *Sufficient condition on H_∞ wellposedness for Schrödinger type equations*, Comm. Partial Differential Equations, **9** (1984), 33-48.

[18] W. ICHINOSE, *The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variables coefficients*, Osaka J. Math., **24** (1987), 853-886.

[19] W. ICHINOSE, *On L^2 well-posedness of the Cauchy problem for Schrödinger type equations on the Riemannian manifold and Maslov theory*, Duke Math. J., **56** (1988), 549-588.

[20] W. ICHINOSE, *A note on the Cauchy problem for Schrödinger type equations on the Riemannian manifold*, Math. Japonica, **35** (1990), 205-213.

[21] W. ICHINOSE, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and Fourier integral operators*, J. Math. Kyoto Univ., **33** (1993), 583-620.

[22] W. ICHINOSE, *On a necessary condition for L^2 well-posedness of the Cauchy problem for some Schrödinger type equations with a potential term*, J. Math. Kyoto Univ., **33** (1993), 647-663.

[23] K. KAJITANI, *The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients*, J. Math. Soc. Japan, **50** (1998), 179-202.
[24] K. KAJITANI, *The Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Bull. Sc. Math., 2e série, **119** (1995), 459-473.
[25] T. KATO, *Non-linear Schrödinger equations*, Schrödinger Operators, Springer Lecture Notes in Physics, **345** (1989), 218-263.
[26] T. KATO, *On the Cauchy problemfor the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in Appl. Math. Adv. in Math., Suppl. Studies., **8** (1983), 93-128.
[27] H. KUMANO-GO, *Pseudo-Differential Operators*, MIT Press, 1981.
[28] J. LERAY, *Hyperbolic Differential Equations*, Inst. Adv. Study, Princeton, (1953).
[29] J. LERAY, *Lagrangian Analysis and Quantum Mechanics. A mathematical structure related to asymptotic expansions and the Maslov index*, MIT Press, 1981.
[30] V. P. MASLOV, *Theory of Perturbations and Asymptotic Methods*, Moskow, 1965 (en russe); French translation from Russian, Dunod, Paris, 1970.
[31] M. MIYAKE, *On Cauchy-Kowalewski's theorem for general systems*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., **15** (1979), 315-337.
[32] S. MIZOHATA, *Some remarks on the Cauchy problem*, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1961), 109-127.
[33] S. MIZOHATA, *On Kowalewskian systems*, Russian Math. Surveys, **29-7** (1974), 223-235.
[34] S. MIZOHATA, *On some Schrödinger type equations*, Proc. Japan Acad., **57** (1981), 81-84.
[35] S. MIZOHATA, *Sur quelques équations du type Schödinger*, Séminaire J. Vaillant 1980-1981, Univ. Paris-VI.
[36] S. MIZOHATA, *Sur quelques équations du type Schödinger*, Journées «Équations aux Dérivées Partielles», Saint-Jean-de-Monts, Soc. Math. France, 1981.
[37] S. MIZOHATA, *On the Cauchy Problem*, Notes and Reports in Math., **3**, Academic Press, 1985.
[38] I. G. PETROWSKY, *Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nicht-analytischen Funktionen*, Bull. Univ. État Moscou, **1** (1938), 1-74.
[39] E. SCHÖDINGER, *Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung)*, Ann. der Physik, **81** (1926), 109-139.
[40] E. SCHÖDINGER, *Gesammelte Abhandlungen*, **3**: Beiträge zur Quantentheorie Herausgegeben von der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Wien, 1984.
[41] J. TAKEUCHI, *A necessary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for certain class of evolution equations*, Proc. Japan Acad., **50** (1974), 133-137.
[42] J. TAKEUCHI, *Some remarks on my paper «On the Cauchy problem for some non-kowalewskian equations with distinct characteristic roots»*, J. Math. Kyoto Univ., **24** (1984), 741-754.
[43] J. TAKEUCHI, *On the Cauchy problem for systems of linear partial differential equations of Schrödinger type*, Bull. Iron and Steel Technical College, **18** (1984), 25-34.
[44] J. TAKEUCHI, *A necessary condition for H^∞-wellposedness of the Cauchy problem for linear partial differential operators of Schrödinger type*, J. Math. Kyoto Univ., **25** (1985), 459-472.
[45] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour quelques équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **310** (1990), 823-826.
[46] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour quelques équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, II, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **310** (1990), 855-858.

[47] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, III, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **312** (1991), 341-344.
[48] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, IV, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **312** (1991), 587-590.
[49] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certains systèmes de Leray-Volevič du type de Schrödinger*, V, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **312** (1991), 799-802.
[50] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, VI, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **313** (1991), 761-764.
[51] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, VII, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **314** (1992), 527-530.
[52] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, VIII; *symétrisations indépendantes du temps*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **315** (1992), 1055-1058.
[53] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, IX; *symétrisations indépendantes du temps*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **316** (1993), 1025-1028.
[54] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, X; *symétrisations indépendantes du temps*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **69** (1993), 189-192.
[55] J. TAKEUCHI, *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris-VI, Octobre 1995, pp. 115.
[56] S. TARAMA, *On the H^∞-wellposed Cauchy problem for some Schrödinger type equations*, Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., **55** (1993), 143-153.
[57] L. R. VOLEVICH, *On general systems of differential equations*, Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 458-461.
[58] L. R. VOLEVICH, *A problem of linear programming arising in differential equations*, Uspehi Mat. Nauk., **18-3** (1963), 155-162 (en russe).
[59] C. WAGSCHAL, *Diverses formulations du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles*, J. Math. Pures et Appl., **53** (1974), 51-69.
[60] K. YAJIMA, *On smoothing property of Schrödinger propagators*, Functional Analytic Methods for partial differential equations, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and its Applications, Springer Lecture Notes in Math., **1450** (1990), 20-35.
[61] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1965.

Université Paris - VI «Géométrie des Équations aux Dérivées Partielles»
UFR 920 - UMR 7586
Boîte Courrier 172, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
et Science University of Tokyo, Faculty of Industrial Science
and Tecnology, Campus Oshamanbe, Hokkaido 049-3514, Japan
E-mail: takeuchi@it.osha.sut.ac.jp

Pervenuta in Redazione
l'11 Dicembre 1998