Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Pietro Nastasi

Gauss: principe dei matematici e scienziato poliedrico, di Rossana Tazzioli, I grandi della scienza (Le Scienze), Anno V, n. 28, ottobre 2002

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2002), n.3, p. 561–568.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_3_561_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. V-A, Dicembre 2002, 561-568

Gauss: principe dei matematici e scienziato poliedrico, di Rossana TAZZIOLI, della collana *I grandi della scienza*, curata dalla rivista *Le Scienze*, Anno V, n. 28, ottobre 2002, € 6,20.

Recensione di PIETRO NASTASI

A distanza di poco più di due anni, Rossana Tazzioli, dopo aver scritto — per la stessa collana di *Le Scienze* — la biografia di Riemann (*Alla ricerca della geometria della natura*, anno III, n. 14, aprile 2000), ci offre ora una efficace biografia del maestro di Riemann, costretta a tornare indietro da uno di quei motivi imperscrutabili che guidano i programmatori di simili collane. Forse, giudicando a posteriori, è meglio così, almeno in questo caso: il lettore che abbia già letto la biografia di Riemann e conosca quindi i grandiosi esiti che alcuni temi di ricerca di Gauss ebbero con l'opera del primo, potrà meglio comprendere l'importanza dell'opera del «*principe dei matematici*».

Diciamo subito che Tazzioli si muove con abilità e maestrìa attraverso i percorsi biografici dei due grandi matematici, intrecciandoli sapientemente con le loro vicende scientifiche e professionali.

Come già quella di Riemann, anche la biografia di Gauss si articola in nove grandi aree tematiche: «Un piccolo, grande matematico»; «I primi successi»; «La nuova era»; «Le ricerche astronomiche»; «Ritorno a Gottinga: lutto e nuove nozze»; «Geodesia e carte geografiche»; «Geometria non euclidea e teoria delle superfici»; «Gauss fisico e inventore» e, infine, «Epilogo». Completano il volume una pagina di «Note biografiche» e la solita sezione di «Letture consigliate» — purtroppo quasi tutte in lingue straniere e scarsamente accessibili a un pubblico non specialistico, se si eccettua il volume *Il Flauto di Hilbert* (UTET, Torino, 1990) di Umberto Bottazzini.

> Serenisssimo Principe,
> allorché la riconoscenza m'impone il sacro dovere di dedicarvi quest'Opera, voi avete resa completa la mia felicità permettendomi di collocarvi in testa il vostro nome illustre e rispettabile. Infatti, non avrei potuto dedicarmi totalmente alla matematica, verso la quale un ardore irresistibile mi ha sempre spinto, se il vostro favore non me ne avesse aperto l'ingresso, se i vostri continui aiuti non avessero incessantemente sostenuto i miei studi. È stata solo la vostra bontà a liberarmi da preoccupazioni estranee e, libero di consacrare tutto il mio tempo allo studio, a permettermi di intraprendere le ricerche di diversi anni di cui quest'Opera espone una parte (1).

Così scriveva il ventiquattrenne Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nella *Dedica* al Duca di Brunswick della sua prima grande opera matematica, le *Disquisitiones Arithmeticae*, che aveva finalmente visto la luce a Lipsia nel 1801, dopo non pochi ostacoli che ne avevano ritardato la pubblicazione. Più di duecento anni dopo, si resta colpiti nel constatare come questo libro, con le sue 500 pagine in quarto grande, sembri piuttosto l'opera matura di un matematico esperto che l'opera di un esordiente.

La lingua usata da Gauss nelle *Disquisitiones*, così come in altre opere successive, fu il latino, un latino molto elegante e classico, che Gauss, nel suo eccesso di pignoleria, pur essendo altamente competente, faceva revisionare dal suo amico Johann Heinrich Jakob Meyerhoff (1770-1812). Dalla *Prefazione* apprendiamo che le prime quattro sezioni delle *Disquisitiones* erano state abbozzate da Gauss fin dal 1796, quand'egli era appena diciannovenne, e che avevano raggiunto la forma finale verso la fine del 1797, cioè durante il suo secondo anno di permanenza a Gottinga. L'intera opera venne terminata probabilmente verso la metà del 1800, anche perché le sezioni VI e VII non ebbero bisogno di sostanziali revisioni.

Fino al momento della pubblicazione di questo libro, grande e dif-

(1) Ho tradotto dall'edizione francese delle *Disquisitiones*: C.F. Gauss, *Recherches Aritmétiques* (traduites par A.-C.-M. Poullet-Delisle), nouvelle édition, Paris, Hermann, 1910, p. ix.

ficile, Gauss era del tutto sconosciuto ai matematici d'Europa, pur avendo ottenuto un gran numero di straordinari risultati. Tuttavia egli non aveva pubblicato le sue scoperte giovanili, preferendo affidarne la cronaca a un *Tagebuch* (*Diario*), che aveva cominciato a tenere fin dal 30 marzo 1796. Quel giorno Gauss aveva risolto un problema che risaliva alla matematica greca: la costruzione, con gli strumenti classici (riga e compasso), di altri poligoni regolari oltre quelli già noti, per esempio il poligono regolare di 17 lati, così annotando: «Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.» ([2]).

Questo è l'unico risultato, fra quelli a lungo meditati dal giovane Gauss, a essere dato alle stampe (nello stesso 1796, sulla rivista *Intellegenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung*) prima della pubblicazione delle *Disquisitiones*, e non è certo un caso che tale risultato concluda le *Disquisitiones*. Secondo la testimonianza del suo collega e amico Sartorius von Waltershausen (1809-1876), sembra che quel risultato sia stato decisivo per convincere il giovane Carl a scegliere gli studi matematici piuttosto che quelli filologici.

Prima ancora della costruzione del poligono regolare di 17 lati, come mostra la sua corrispondenza relativa agli anni 1792-93, il giovane Gauss aveva trovato un altro risultato importante, relativo alla distribuzione dei numeri primi. Rimasto inedito, esso è tuttavia alla base della Memoria di Riemann del 1859, «Intorno al numero dei numeri primi inferiori a una grandezza data», stampata nelle «Note mensili» dell'Accademia di Berlino, che a giudizio di Edmund Landau (1877-1938) rappresenta il lavoro di Riemann «più geniale e fecondo», destinato a cambiare la teoria dei numeri. Non c'è evidenza alcuna di un legame diretto fra il risultato giovanile di Gauss e la Memoria di Riemann del 1859. Tuttavia Riemann era certamente a conoscenza delle *Disquisitiones* e sarebbe quanto meno strano che la teoria dei numeri, e in particolare la distribuzione dei numeri primi, non fosse stato oggetto delle sue conversazioni con Gauss. Un'altra prova indiziaria del legame fra i risulta-

([2]) Il *Tagebuch* di Gauss, aggiornato fino al 1814, è un documento preziosissimo per seguire il *progress* delle sue scoperte matematiche. Gauss non lo pubblicò mai e fu ritrovato casualmente solo nel 1898, oltre quarant'anni dopo la sua morte.

ti inediti di Gauss e la Memoria di Riemann ci pare offerta dal fatto che la teoria dei numeri era il campo di ricerca preferito di Richard Dedekind (1831-1916), anch'egli allievo di Gauss e amico e collega di Riemann a Gottinga.

Le *Disquisitiones Arithmeticae* sono un vero e proprio capolavoro della letteratura matematica di ogni tempo. Nella *Prefazione*, dopo aver precisato che si sarebbe occupato solo dell'*Aritmetica trascendente* (dell'Aritmetica superiore, come diremmo oggi), Gauss traccia un breve *excursus* storico della disciplina (da Euclide a Legendre, passando attraverso Fermat, Eulero e Lagrange), rinviando per maggiori dettagli alla Prefazione all'appendice che Lagrange aggiunse all'*Algebra* ([3]) di Eulero e all'*Essai sur la théorie des nombres* (1798) di Legendre allora appena pubblicato.

Leggendo le opere di questi uomini, prosegue Gauss, «non tardai a riconoscere di aver impiegato la maggior parte delle mie meditazioni su cose note da lungo tempo; ma animato da nuovo ardore nel seguire i loro passi, mi sono sforzato di avanzare ulteriormente nello studio della teoria dei numeri». Come giustamente osserva Tazzioli (p. 25), «i progressi furono enormi se, tra i numerosissimi lavori di Gauss, le *Disquisitiones* sono spesso considerate la sua opera più grandiosa, sia per i risultati ottenuti sia per la profondità delle nuove idee». In ciò la critica è unanime, da Felix Klein (1849-1925) ([4]) a Morris Kline (1908-1992) ([5]), il cui giudizio è stato messo come epigrafe (p. 24) della sezione dedicata alle *Disquisitiones*.

L'elogio più autorevole giunse però a Gauss da parte di Joseph Louis Lagrange (1736-1813), che in una lettera del 1804 (p. 33), gli scrisse con grande ammirazione:

([3]) L. Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Lipsia, 1770; traduzione francese (vol. I a cura di J. Bernoulli e vol. II a cura di Lagrange) *Eléments d'Algèbre par Léonard Euler traduits de l'Allemand avec des Notes et des Additions*, Lyon, 1795.

([4]) F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrundert,* Berlin, 1928; trad. inglese a cura di M. Ackermann, *Development of Mathematics in the 19th Century*, Brookline, Massachusetts, Math Sci Press, 1979, pp. 24-25.

([5]) M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Torino, Einaudi, 1991, 2 voll., II, p. 949.

> Le vostre *Disquisitiones* vi hanno immediatamente elevato al rango dei migliori geometri [...]. Io ho da lungo tempo abbandonato questo genere di ricerche, ma esse non hanno mai cessato di affascinarmi, per quanto ora mi accontenti, su questi argomenti come su molti altri, di godere del frutto delle fatiche altrui.

Le *Disquisitiones* sono basate su tre idee principali: la teoria delle congruenze, l'introduzione dei numeri algebrici e la teoria delle forme come guida per l'analisi diofantea. Nella quarta delle sue sette sezioni (capitoli), dedicata alle «Congruenze di secondo grado», è contenuto il *teorema fondamentale*, ovvero la legge di reciprocità quadratica, il risultato forse più importante di tutta l'opera, mentre la quinta è dedicata alle «Forme ed equazioni di secondo grado», in cui Gauss espone sistematicamente la teoria delle forme quadratiche binarie. Una delle sue applicazioni più significative è la dimostrazione che ogni numero primo della forma $4n + 1$ può decomporsi in modo unico nella somma di due quadrati.

Come ha scritto Klein, le *Disquisitiones* rappresentano al tempo stesso, però, la fine del periodo creativo di Gauss in matematica pura. Non ne era stata infatti ancora completata la stampa, che l'attenzione di Gauss si era rivolta all'Astronomia in conseguenza di una vicenda che aveva scosso l'Europa scientifica dell'epoca.

Nella notte fra l'1 e il 2 gennaio del 1801, l'astronomo Giuseppe Piazzi (1746-1826), proseguendo le sue osservazioni sistematiche per un nuovo catalogo stellare, aveva notato nel cielo di Palermo un nuovo astro che precedeva una stella di settima grandezza, già catalogata, di cui aspettava il passaggio al meridiano. Senza sospettare la natura del nuovo astro, ne aveva misurato le coordinate, ma la sera successiva aveva constatato che queste erano cambiate, così che nelle sere seguenti poteva confermare la scoperta di un «astro errante», forse una cometa o forse un pianeta (come fu poi riconosciuto). Con strumenti diversi dal grande cerchio di Ramsden con cui lavorava per il Catalogo non gli fu possibile osservarlo fuori dal meridiano, ma poté continuare le osservazioni fino a che l'astro non si avvicinò troppo al sole, cioè fino a quasi la metà di febbraio. Lo scarso numero di osservazioni dell'astro scoperto da Piazzi, osservato per un periodo di soli 41 giorni, non consentiva — a causa della brevità del suo arco orbitale — la determinazione delle posizioni successive (e perciò di ritrovarlo) con i metodi fino allora noti. La notizia circolò largamente sui giornali scientifici e si creò addirittura un comitato di astronomi incaricato di determinarne l'orbita e accertare la natura del nuovo astro. Il *Tagebuch* di Gauss registra puntualmente, nel novembre del 1801, il suo interesse all'argomento. La soluzione da lui escogitata fu quella di considerare tre osservazioni complete dell'astro, distanziate il più possibile nel tempo, con le quali stabilire — per mezzo di tre coppie di coordinate (ascensione retta e declinazione) — sei equazioni sufficienti teoricamente a determinare gli elementi dell'orbita. Il problema veniva così trattato in modo del tutto generale e permetteva di dedurre l'orbita ellittica percorsa dal pianetino con precisione, aumentabile col concorso di tutte le altre osservazioni del periodo di visibilità (a ciò serviva il «metodo dei minimi quadrati», escogitato dallo stesso Gauss e che da allora si diffuse rapidamente). Compiuti i calcoli dell'orbita (e sappiamo che Gauss era un infaticabile e mirabile calcolatore) e delineata l'efemeride, fu possibile a Xavier von Zach (1754-1832), direttore dell'Osservatorio di Seeberg, ritrovare il pianetino perduto — il 7 dicembre 1801 — quasi esattamente nella posizione prevista da Gauss. Il «piccolo pianeta», primo fra i tanti di questo sciame di astri, compreso fra Marte e Giove, ebbe quindi da Piazzi il nome di *Cerere*, in onore della dea tutelare della Sicilia. Su questo argomento, come del resto per tutti gli altri, i box inseriti da Tazzioli costituiscono un utile strumento di comprensione, senza per altro interrompere la narrazione.

Gauss non si fermò naturalmente a questo primo, esaltante risultato, ma continuò ad applicare i suoi metodi e a generalizzarli, sicché otto anni dopo, nel 1809, poteva pubblicare un altro capolavoro, la *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Né l'autore si pentiva del ritardo, perché — come scriveva nella prefazione — «i metodi dapprima impiegati subirono tanti e così grandi mutamenti, che tra il metodo col quale fu calcolata l'orbita di Cerere e la trattazione data in quest'opera, rimane appena qualche traccia di lontana rassomiglianza» ([6]).

([6]) G. Abetti, *Storia dell'Astronomia*, Firenze, Vallecchi, 1949, p. 158.

Dopo la nomina a Direttore dell'Osservatorio di Gottinga nel 1807, dagli interessi di meccanica celeste Gauss passò a quelli di Geodesia, sia teorica sia pratica, e poi alla Fisica, con contributi particolarmente interessanti sul magnetismo terrestre e sulla teoria del potenziale. In questo periodo della sua vita, il contributo più importante alla Matematica è quello sulla teoria delle superfici. La sua Memoria del 1828, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, ha segnato l'inizio della moderna geometria differenziale e costituito il modello e la fonte di ispirazione per molte delle ricerche successive. Come fa osservare Tazzioli (p. 63), l'idea chiave è quella di considerare «la superficie non come la frontiera di un solido», ma in modo intrinseco. Una concezione che sarà fatta propria da Riemann nella sua celebre lezione di abilitazione tenuta nel 1854, proprio di fronte a Gauss. Nella Memoria gaussiana appena citata le coordinate curvilinee (intrinseche) vengono usate per esprimere l'elemento lineare ds per mezzo della forma differenziale quadratica (prima forma fondamentale):

$$ds^2 = Edu^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

dove E, F, G dipendono solo dal tipo di superficie. Tutta la teoria culminava nel celebre *theorema egregium*, secondo cui la curvatura totale della superficie dipende solo da E, F, G e dalle loro derivate, e perciò è un invariante per deformazioni senza strappi.

Ancora alla Geodesia e alla trattazione della teoria delle superfici si possono ricollegare gli interessi di Gauss per i fondamenti della Geometria, argomento che riconosceva come «la metafisica della teoria dello spazio» e su cui aveva meditato a lungo fin dagli anni giovanili: «In principiis Geometriae egregios progressus fecimus» si legge in una nota del *Tagebuch* del settembre 1799. Le questioni sui fondamenti riguardavano principalmente la geometria non euclidea e le relative problematiche, su cui Gauss non pubblicò mai nulla, preferendo affidare le sue riflessioni alla corrispondenza con gli amici. Dall'esame di questa e dei suoi manoscritti è risultato, poi, che aveva anticipato alcune delle più belle idee di Lobatcevskij e di Janos Bolyai, pago solo di sancirne il valore colla sua imponente autorità. Lo testimonia la nobile lettera che nel 1832 scrive all'amico Farkas Bolyai (padre di Janos) sul *Tentamen* del figlio (p. 70): «Avevo l'idea di scrivere col tempo tutto ciò, perché non perisse con me. È dunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essermi risparmiata e sono estremamente contento che proprio il figlio del mio vecchio amico mi abbia preceduto in modo così notevole».

E questa lettera richiama alla memoria un'altra lettera, ugualmente nobile (p. 42), che decenni prima (nell'inverno del 1806) aveva indirizzato a Sophie Germain (1776-1831), fino allora conosciuta come «Monsieur Leblanc». Entusiasmata dalla lettura delle *Disquisitiones Arithmeticae*, la bella Sophie aveva comunicato all'autore, per iscritto, alcune sue osservazioni, presentandosi come il signor Antoine-August Leblanc per paura che anche il sommo matematico avesse qualche prevenzione contro le donne che si dedicavano alla matematica. Quando Gauss ne apprese, infine, la vera identità, non solo non dimostrò alcuna forma di misogenìa, ma in seguito si adoperò perché l'Università di Gottinga le conferisse una laurea *ad honorem*. Purtroppo la Germain, distrutta da un cancro, morì prima di potersi mettere in viaggio dalla Francia. Le seguenti parole di Gauss testimoniano tutto il suo rammarico: «Ella ha dimostrato che anche una donna può realizzare qualcosa di importante nella più rigorosa e astratta delle scienze e per questa ragione avrebbe meritato una laurea *ad honorem*».

Molti anni dopo, un altro grande della matematica tedesca e di Gottinga in particolare, Felix Klein avrebbe raccolto anche questa parte dell'eredità gaussiana. Ed è proprio con le parole di Klein che preferisco concludere, perché mi sembrano una sintesi efficace della statura matematica di Gauss (7):

> Per me Gauss è come la cima più alta tra i nostri monti bavaresi come appare ad uno spettatore da nord. Da est le basse colline gradatamente ascendenti culminano in un gigantesco colosso, che scende ripidamente nelle pianure di nuova formazione, su cui per molte miglia sporgono i suoi contrafforti e in cui l'acqua che da esso sgorga genera nuova vita.

Pietro Nastasi, Dipartimento di Matematica, Università di Palermo
nastasi@math.unipa.it

(7) F. Klein, cit., p. 57.