Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandra Fiocca

Fermat: i sogni di un magistrato all'origine della matematica moderna, di Giulio Giorello e Corrado Sinigaglia, I grandi della scienza (Le Scienze), Anno IV, n. 24, dicembre 2001

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2002), n.3, p. 549–560.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_3_549_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. V-A, Dicembre 2002, 549-560

Fermat: i sogni di un magistrato all'origine della matematica moderna, di Giulio GIORELLO e Corrado SINIGAGLIA, della collana *I grandi della scienza*, curata dalla rivista *Le Scienze*, Anno IV, n. 24, dicembre 2001 € 6,20.

Recensione di ALESSANDRA FIOCCA

Nove capitoli dedicati ai principali aspetti dell'opera matematica di Pierre de Fermat compongono questo numero della collana *I grandi della scienza*, della rivista *Le Scienze*. Il primo capitolo è introduttivo al personaggio e all'ambiente culturale francese con cui il matematico venne a contatto. I successivi capitoli riguardano nell'ordine: la ricostruzione del patrimonio dell'analisi degli antichi che portò Fermat a elaborare il metodo delle coordinate, parallelamente e indipendentemente da Descartes; il metodo dei massimi e dei minimi e la dottrina delle tangenti alle curve; i metodi «archimedei» impiegati per il calcolo di aree e volumi e per la rettificazione delle curve; la polemica con Descartes originata dalla pubblicazione delle *Diottrica*, occasione per la messa a punto della legge della rifrazione; le ricerche di probabilità; le ricerche di teoria dei numeri; l'ultimo teorema di Fermat coi tentativi compiuti nei secoli XVIII e XIX per giungere alla soluzione; tecniche impiegate per la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat ad opera di Andrew Wiles.

Il saggio di Giorello e Sinigaglia rappresenta un'efficace e sufficientemente ampia introduzione alla matematica sviluppata da Fermat; chi desiderasse tuttavia approfondire qualche aspetto particolare può ricorrere alla bibliografia, organizzata a tema, con cui si conclude il fascicolo. I prerequisiti necessari per seguire il discorso matematico non sono molti, qualche elemento di geometria euclidea, nozioni fondamentali sulla teoria dei numeri. Per questo motivo la lettura è consigliata non solo a studenti universitari di discipline scientifiche, ma anche a chi possiede un interesse personale per la matematica. Gli studenti di scuola media superiore possono altresì trovarvi spunti per dei percorsi pluridisciplinari in cui inserire la matematica, anche in vista della preparazione dell'esame di maturità.

A partire dagli anni trenta del Seicento, Parigi divenne il centro europeo degli studi matematici anche grazie all'azione altamente stimolante svolta dal padre Marin Mersenne (1588-1648) e dagli altri esponenti del gruppo informale raccolto attorno a lui che costituì uno dei nuclei della futura Académie Royale des Sciences. In un'epoca in cui non esistevano riviste scientifiche in grado di assicurare la diffusione delle conoscenze, Mersenne, conscio dell'importanza che aveva la divulgazione delle scoperte e il confronto delle idee, stabilì una fitta rete di relazioni epistolari a livello internazionale facendo sovente da tramite nelle discussioni tra gli scienziati. Pierre Fermat fu uno dei più illustri matematici corrispondenti di Mersenne e le sue scoperte matematiche sono in massima parte confinate nella corrispondenza scientifica oltre che con Mersenne, con Blaise Pascal (1623-1662), Jean de Beaugrand (1596-1640), Pierre de Carcavi (160?-1684), Bernard Frénicle de Bessy (1605-1675). Alla morte di Fermat la maggior parte della sua ricerca matematica era disseminata per mezza Europa, confinata in lettere e manoscritti e spesso di un testo redatto da Fermat esisteva solo l'esemplare inviato dall'autore, che non aveva tenuto per sé neppure una copia. La produzione matematica di Fermat ha così un aspetto frammentario, che ne ha reso particolarmente difficoltoso il recupero, avvenuto in tempi successivi: alla pubblicazione da parte del figlio, Clément-Samuel de Fermat, dell'*Aritmetica* di Diofanto nell'edizione di Bachet del 1621, arricchita con le osservazioni paterne e di un saggio composto sulla scorta di lettere di Fermat (1670), seguì l'uscita alle stampe nel 1679, a cura sempre del figlio, del volume *Varia opera mathematica*, contenente scritti di algebra, geometria, calcolo di aree e volumi, rettificazione, ecc. oltre a una selezione dell'epistolario. L'opera di recupero del corpus fermatiano ha avuto il suo coronamento con la pubblicazione dei quattro volumi delle *Oeuvres de Fermat* curati da Charles Henry e Paul Tannery (1891-1912), seguiti da un quinto di *Supplément* (1922) contenente ulteriori documenti scoperti nel frattempo da C. de Waard.

Pierre Fermat (1601-1665) non era un matematico di professione e alla matematica si avvicinò per puro piacere intellettuale; questo non gli impedì di divenire uno dei più grandi matematici di ogni tempo, e di abbracciare coi suoi studi molteplici campi della ricerca matematica all'avanguardia nella prima metà del secolo XVII. Fermat nacque a Beaumont-de-Lomagne cittadina del sud della Francia non lontana da Tolosa, da Dominique, ricco mercante e da Claire de Long, la cui famiglia apparteneva alla *noblesse de robe*. Consigliere al Parlamento di Tolosa, l'alta Corte di Giustizia della Provincia, è anche conosciuto come uno dei più grandi giureconsulti della sua epoca; la padronanza delle lingue classiche gli permise di accedere direttamente alla conoscenza delle fonti della geometria e dell'aritmetica greca da cui prenderanno avvio molte delle sue ricerche matematiche. Della sua formazione scientifica e della nascita dell'interesse per la matematica poco sappiamo, mentre più noti sono gli ambienti e le personalità scientifiche con cui venne a contatto, tra queste Jean de Beaugrand (1596-1640), editore assieme al Padre Mersenne, di alcune opere di François Viète (1540-1603), padre dell'algebra moderna e uno degli autori moderni maggiormente studiati da Fermat, Pierre de Carcavi, collega al Parlamento di Tolosa e poi bibliotecario del Re, che mise in contatto Fermat col Padre Mersenne, Ètienne d'Espagnet che gli diede accesso ai manoscritti di Viète presenti nella biblioteca paterna. Non mancarono nella vita di Fermat aspre polemiche; di queste quella originata dalle sue critiche *all'Arithmetica infinitorum* di John Wallis produsse una spaccatura con la comunità inglese, ma la più famosa è certamente quella che lo vide in contrapposizione con René Descartes.

L'interesse di Fermat per il cosiddetto patrimonio dell'analisi greca, perduto nella sua integrità e conosciuto dal resoconto sommario ad opera di Pappo d'Alessandria, traeva origine dall'insegnamento di Viète secondo il quale lo sviluppo dell'*ars analytica* doveva passare attraverso il recupero e la successiva traduzione in veste algebrica dei testi della geometria classica. Fermat tuttavia andò oltre il programma di Viète, che si era limitato ai cosiddetti «problemi determinati», ovvero quei problemi la cui formulazione algebrica porta a un numero di equazioni uguale al numero delle incognite. A sua volta Fermat era convinto di poter trattare con l'algebra anche «problemi indeterminati», l'esempio più semplice è quello dell'equazione di primo grado a due incognite $ax + by = c$ che da Fermat in poi rappresenta geometricamente una linea retta. Così se Viète si era occupato della restituzione dei trattati di Apollonio sui *contatti*, Fermat appunterà la sua attenzione sul trattato di Apollonio dedicato ai *Luoghi piani*, di cui il settimo libro delle *Collectiones Mathematicae* di Pappo offriva una piccola selezione. Nel 1636 concluse il lavoro di ricostruzione («divinatio» secondo il linguaggio allora in uso) dei due libri sui *Luoghi piani* di Apollonio di Perga, di cui era da tempo andata perduta la versione originale; tra la fine del 1636 e l'inizio del 1637, redasse *Ad locos planos et solidos isagoge* in cui trovò piena espressione il nuovo metodo per lo studio dei luoghi geometrici. (I luoghi geometrici erano classificati dagli antichi in relazione al metodo di costruzione, e potevano essere piani, solidi o lineari a seconda che esigessero l'uso solo di rette e cerchi, oppure anche di ellissi, parabole o iperboli, oppure di linee curve diverse dalle precedenti). Si ritiene che fu proprio lo studio delle *Coniche* di Apollonio ad offrire a Fermat lo spunto decisivo per introdurre il suo metodo, il cui carattere di generalità lo rendeva superiore ai metodi *ad hoc* tradizionali. Nel trattare le sezioni coniche come «luoghi» e nel tradurre le loro proprietà fondamentali enunciate in forma verbale, in relazioni algebriche, Fermat pervenne a formulare il metodo oggi noto come metodo delle coordinate: oltre ad applicare l'algebra allo studio dei luoghi geometrici, Fermat compì anche il passo inverso e complementare, mostrando come a ogni equazione algebrica corrisponda un luogo geometrico. In aggiunta ai due libri sui *Luoghi piani* di Apollonio, Fermat compì anche la restituzione dei *Luoghi solidi* di Aristeo, dei *Luoghi alla superficie* e dei *Porismi* di Euclide, e nel 1643 ultimò le sue ricerche redigendo un breve testo, *Ad locos ad superficiem isagoge*, in cui estendeva a figure tridimensionali i risultati precedentemente raggiunti per i luoghi piani.

Lo studio delle equazioni algebriche mediante procedimenti geometrici, ovvero la soluzione di equazioni determinate di terzo e quarto grado, come intersezione di due luoghi geometrici, è argomento della breve memoria *Appendix ad isagogen topicam continens solutionem problematum solidorum per locos* (1637), e successivamente della dissertazione *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes* (redatta tra il 1641 e il 1643), in cui Fermat entra anche nel merito della classificazione delle curve proposta da Cartesio, che raggruppava nel genere n-esimo le curve la cui equazione è di grado $2n$ o $2n-1$, sulla base della possibilità di ridurre «tutti i Problemi di uno stesso genere ad una stessa costruzione». Nel 1636 Fermat iniziò a dedicarsi anche alla teoria dei numeri, mentre l'anno successivo inviò a Parigi la memoria *Methodus ad disquierendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, contenente un metodo per la determinazione dei massimi e dei minimi e delle tangenti alle curve che sarà superato solo dal calcolo differenziale di Leibniz. A questa prima memoria ne seguirono diverse altre, stese per rispondere alle obiezioni che gli vennero mosse principalmente da Descartes, venuto a conoscenza del metodo tramite Mersenne. Le critiche servirono a Fermat per raffinare il suo ragionamento, in particolare per estendere la dottrina delle tangenti anche a curve trascendenti. Sul significato del termine «adaequatio» usato da Fermat nel suo metodo, si interrogarono i matematici e gli storici della matematica venuti dopo di lui, divisi tra due diverse interpretazioni, quella di vedere nell'«adaequatio» una tecnica di approssimazione, che avrebbe avuto in Diofanto le sue radici, e quella di considerarla sinonimo di uguaglianza.

Almeno fino al 1643 Fermat continuò con ritmo molto intenso l'attività di ricerca matematica, che subì poi un rallentamento a causa dell'impegno politico-amministrativo; nel 1654 tuttavia, fu impegnato in un intenso scambio epistolare con Blaise Pascal, che viene considerato concordemente dagli storici l'atto di nascita della moderna teoria delle probabilità. Fu nell'estate del 1654 che ebbe inizio il fitto carteggio tra Blaise Pascal e Fermat su questioni di probabilità sollevate da un amico di Pascal, il cavaliere de Méré, indicato da Leibniz come un «giocatore e filosofo». Tra le questioni proposte, una consisteva nello stabilire come andava ripartita la posta in caso di interruzione del gioco anticipatamente, ovvero prima che uno dei giocatori avesse realizzato il punteggio necessario per vincere. Nell'ambito di questa problematica, Fermat pervenne in modo implicito al teorema noto oggi come «teorema delle probabilità totali per eventi incompatibili».

Sollecitato da Mersenne, nel 1636 Fermat si occupò della traiettoria descritta da un grave in caduta libera dalla cima di una torre che già Galilei aveva affrontato proponendo una traiettoria semicircolare con un estremo nel centro della terra. Dopo aver dimostrato che si trattava invece di un arco di spirale, Fermat calcolò l'area della figura piana compresa tra l'arco di spirale e il raggio della terra prolungato fino alla cima della torre, approssimando la figura, per eccesso e per difetto, con figure a scalini le cui aree differivano tra loro per una quantità che poteva essere resa piccola a piacere, aumentando il numero dei gradini. Il problema era così ricondotto a trovare il valore «intermedio» tra questi (noi diremmo il valore limite delle due successioni approssimanti); Fermat ottenne il valore 8/15 estendendo la nota identità: $2\ (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n\ (n + 1)$, che fornisce i numeri triangolari, agli altri numeri «poligonali», e dimostrando un risultato che era stato solo intuito da Roberval, ovvero che «la somma dei quadrati è sempre maggiore di un terzo del cubo che ha per lato il lato del quadrato più grande, mentre la medesima somma dei quadrati tolto il più grande è minore di un terzo dello stesso cubo; la somma dei cubi è maggiore di un quarto del quadratoquadrato e, tolto il cubo maggiore, è minore di un quarto del quadratoquadrato, ecc.». Con la stessa tecnica Fermat estese il risultato alla famiglia di spirali di cui quella precedente era un caso particolare e alle figure piane delimitate da archi di parabola di ordine superiore, del tipo $y^n = kx^m$.

Solo nel 1657 Fermat tornò a questo genere di ricerche, stimolato dalla pubblicazione dell'opera *Arithmetica infinitorum* di John Wallis (1616-1703), da lui accusato di tradire la via archimedea. Nel testo *De aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis compara-*

tionem..., si propose di seguire la via archimedea utilizzando la progressione geometrica per ottenere la quadratura di figure piane delimitate da archi di parabole di ordine superiore o da archi di iperboli, ad esclusione dell'iperbole semplice.

Le ricerche sulla rettificazione delle curve furono intraprese da Fermat dopo l'uscita alle stampe delle *Lettres de A. Dettonville*, in cui Blaise Pascal dimostrava l'uguaglianza delle lunghezze di un arco di spirale di Archimede e di un arco di parabola, e l'annuncio di Christopher Wren di aver ottenuto la rettificazione della cicloide; Fermat si occupò a sua volta della rettificazione di «una delle parabole in numero infinito, su cui da tempo abbiamo speculato, vale a dire quella in cui i cubi delle ordinate sull'asse sono proporzionali ai quadrati delle ascisse dell'asse»; il metodo seguito è quello archimedeo semplificato, che fa uso di «due figure composte da rette» che approssimano per eccesso e per difetto la curva, entrambe formate da segmenti di tangente alla curva stessa.

Con la pubblicazione della *Diottrica* da parte di Descartes nacque la controversia tra Fermat e Descartes sulla legge della rifrazione e sul fenomeno della riflessione, e in generale sull'impostazione cartesiana del problema ottico; oltre a Mersenne, nella polemica furono coinvolti anche Claude Mydorge al quale Descartes aveva inviato «le carte del piccolo processo di matematica» perché questi potesse giudicare «secondo giustizia e verità» e Claude Clerselier, editore di tre volumi dell'epistolario cartesiano tra il 1657 e il 1667, che si rivolse a Fermat per conoscere i termini della passata disputa; a Clerselier Fermat inviò una lettera contenente i dubbi che egli ancora nutriva sulla presunta dimostrazione cartesiana della legge della rifrazione.

Fermat rigettava l'analogia cartesiana tra il fenomeno della riflessione e il moto di una palla che, colpita da una racchetta, rimbalza in un punto del terreno «perfettamente piano e duro»; secondo Fermat la luce, la cui natura era «azione» ovvero «tendenza al movimento», si propaga istantaneamente in una materia sottile che pervade lo spazio e non segue necessariamente le leggi del movimento dei corpi materiali, essendoci «tra l'una e l'altra la stessa differenza che passa tra la potenza e l'atto». Fermat criticava poi la spiegazione data da Descartes della legge della riflessione, nota fin dai tempi di Euclide (angolo di incidenza uguale all'angolo di riflessione), accusandola di paralogismo, poiché tra le infinite scomposizioni «della determinazione al movimento», Descartes considerava unicamente quella che lo poteva condurre alla desiderata conclusione.

Circa la dimostrazione della legge della rifrazione nella *Diottrica*, Fermat la giudicava derivata da un falso fondamento; sul tema della rifrazione e in particolare sul principio secondo il quale la natura agisce sempre per le vie più brevi, Fermat ritornò in alcune lettere a Cureau de la Chambre, medico di fiducia del Re, che gli aveva inviato una copia del suo trattato *La lumière*, uscito alle stampe nel 1657. Nella famosa lettera del 1 gennaio 1662 Fermat propose a de la Chambre di trovare «il vero rapporto della rifrazione» interpretando il principio della via più semplice o facile come principio non della minima distanza, bensì del minimo tempo e ricorrendo quindi al suo metodo dei massimi e dei minimi. Egli pervenne in questo modo a dimostrare la proporzionalità inversa tra i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione e le resistenze dei rispettivi mezzi; con Clerselier Fermat ebbe una discussione sulla validità del principio della fisica secondo il quale la natura agisce sempre secondo le vie più brevi e più semplici, un tema che continuò a interessare gli scienziati e portò Maupertuis a elaborare il «principio di minima azione», che attraverso gli sviluppi successivi ad opera di Eulero, Lagrange, Hamilton, divenne lo strumento matematico per esprimere le leggi della meccanica.

Secondo Fermat l'aritmetica aveva un suo dominio specifico, quello che potremmo chiamare la teoria dei numeri interi; alle ricerche di Fermat in questo ambito si fa risalire l'avvio della moderna teoria dei numeri; esse si trovano presentate in gran parte nelle lettere a Bernard Frénicle de Bessy che condivideva con lui l'interesse per questo genere di studi. Il teorema di Euclide sui numeri perfetti che afferma che se $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$ è un numero primo, allora $2^{n-1}(2^n - 1)$ è un numero perfetto (un numero si dice perfetto quando è somma dei suoi divisori, includendo l'unità ed escludendo il numero stesso) fu un tema che affascinò sia Fermat che Frénicle; dalla richiesta di quest'ultimo di determinare un numero perfetto compreso tra 10^{20} e 10^{22}, Fermat intraprese delle ricerche che lo portarono a diverse conclusioni importanti: 1) se n non è primo, 2^n-1 non è primo; 2) se n è primo, 2^n-2 è un multiplo di $2n$; 3) se n è primo e p è un divisore primo di 2^n-1, allora $p-1$ è un multiplo di n. In particolare le proposizioni 2 e 3 sono casi speciali di uno dei più importanti risultati raggiunti da Fermat, il cosiddetto «piccolo teorema di Fermat» che lo stesso Fermat enunciò nella lettera a Frénicle del 18 ottobre 1640 nella forma seguente: dato un qualunque numero primo p, e una qualunque progressione geometrica 1, a, a^2, ecc., p deve dividere qualche numero a^n-1 per il quale n divida $p-1$; se allora N è un qualsiasi multiplo del più piccolo n per il quale valga quanto detto, p divide anche a^N-1.

Dimostrato che dati a e p primo, non esiste in generale m tale che p divide a^m+1, Fermat fornisce un criterio per caratterizzare i casi in cui ciò si verifica; affronta anche il problema di stabilire quando il numero 2^m+1 è primo e dimostra che non è primo se m è divisibile per un numero dispari maggiore di 1, mentre è primo per $m=2^r$ con $r=0, 1, 2, 3, 4$. Fermat riteneva che anche per $r=5, 6$ il numero fosse primo, ma ammetteva di non essere riuscito a darne una dimostrazione completa; oggi sappiamo che 2^m+1 non è primo per $m=2^r$ con r numero compreso tra 5 e 16, inclusi gli estremi (resta aperta la questione per r maggiore di 16).

I problemi diofantei, consistenti nella ricerca di soluzioni intere o razionali di equazioni algebriche a coefficienti interi, hanno avuto un ruolo centrale nell'ambito della ricerca matematica fermatiana. Come scrisse a Mersenne, fu la lettura del commento di Bachet a Diofanto che indusse Fermat a occuparsi della rappresentazione dei numeri come somma di quadrati e tra i problemi discussi con Mersenne vi era quello di stabilire quando un intero che sia somma di due (o tre) quadrati razionali, possa essere espresso anche come somma di due (rispettivamente tre) quadrati interi.

Il metodo della discesa infinita o indefinita, consistente in un procedimento reiterato che porta a costruire numeri interi positivi via via minori verificanti una stessa proprietà, venne sfruttato da Fermat per trattare questioni aritmetiche e fornire delle dimostrazioni sia a carattere affermativo che negativo; in particolare fu usato per dimostrare il teorema che afferma che ogni numero primo della forma $4n + 1$ può essere espresso in uno e un solo modo come somma di quadrati; la reticenza di Fermat a dare dimostrazioni complete dei risultati enunciati ha messo sovente in difficoltà i suoi lettori, tuttavia nel caso del teorema sopracitato la dimostrazione data da Eulero che fa uso di un metodo dimostrativo tipo «discesa infinita», permette di immaginare il ragionamento di Fermat.

Fermat lanciò una sfida ai matematici inglesi, William Brouncker e John Wallis, che estese anche ai matematici europei come Frénicle e van Schooten, congetturando l'esistenza di infinite coppie di numeri interi x, y soluzioni dell'equazione $a \cdot y^2 + 1 = x^2$, dove a è un numero che non è un quadrato perfetto (l'equazione è oggi impropriamente nota sotto il nome del matematico John Pell a causa di un fraintendimento di Eulero). Tale equazione aveva già una sua storia che risale ad Archimede poiché il problema archimedeo, cosiddetto dei buoi, in un caso particolare, ricade sotto l'equazione di Pell. Anche gli indiani avevano formulato il problema in generale e lo avevano risolto in alcuni casi particolari. Fermat afferma che «la dimostrazione generale si troverà grazie alla *discesa* applicata debitamente e propriamente», formulando l'auspicio che il suo suggerimento servisse a condurre i suddetti matematici alla dimostrazione generale. Nel suo *Number Theory*, André Weil ricostruisce quella che avrebbe potuto essere la dimostrazione di Fermat, ma aggiunge che «affrontando una dimostrazione difficile e complicata, è ben possibile che Fermat si sia accontentato soltanto di un'attenta analisi di alcuni casi numerici tipici, convincendosi allo stesso tempo che i passaggi sviluppati fossero di validità generale». L'equazione di Pell riapparve nel 1730 in un carteggio tra Eulero e Christian Goldbach; quest'ultimo, convinto di aver dimostrato che un numero triangolare $n\,(n + 1)/2$ non è mai un quadrato, invia la dimostrazione a Eulero il quale riconosce la pecca: posto $x = 2n + 1$, il problema di Goldbach si riduce all'equazione $8 \cdot y^2 + 1 = x^2$ che è l'equazione di Pell nel caso $a = 8$. La dimostrazione rigorosa e generale della congettura di Fermat verrà data da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Le vicende connesse al famoso «ultimo teorema di Fermat», sul quale si sono cimentate generazioni di matematici e che ha resistito fino al 1995, sono argomento degli ultimi due capitoli del lavoro. Tra i vari teoremi enunciati da Fermat senza dimostrazione, l'unico a non venire risolto, affermativamente o con una negazione, in un arco di tempo relativamente breve, è quello che va sotto il nome di «ultimo teorema di Fermat» e che afferma l'impossibilità di risolvere per numeri interi positivi l'equazione $x^n + y^n = z^n$ quando n è un numero intero maggiore di 2. Come è ben noto Fermat affermò di avere dimostrato il risultato ma di non avere sufficiente spazio nella pagina per poter trascrivere la dimostrazione (*cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc margini exiguitas non caperet*).

L'impossibilità di soluzioni intere non banali per $n = 4$ è semplice da dimostrare, col metodo della discesa infinita combinato con la costruzione di terne pitagoriche, inoltre se n è intero maggiore di 2, esso è divisibile o per un numero p primo dispari o per 4, dunque l'equazione si può scrivere in una delle seguenti due forme:

$$(\boldsymbol{x}^r)^p + (y^r)^p = (z^r)^p$$

$$(x^r)^4 + (y^r)^4 = (z^r)^4$$

Sciolto il caso $n = 4$, restava da dimostrare che l'equazione $x^p + y^p = z^p$, con p primo dispari, non ammette soluzioni intere non banali. Risultati parziali in questa direzione furono ottenuti da Eulero, Gauss, Sophie Germain, Legendre, Dirichlet, Lamé, Kummer. La ricerca al computer del secolo scorso ha mostrato che la maggior parte dei numeri primi minori di una certa «soglia» sono «regolari», e che le «eccezioni» godono di una proprietà, una sorta di «regolarità debole» che implica il teorema di Fermat anche per quegli esponenti. Nel 1983 l'ultimo teorema era stato verificato per n minore di un milione, nel 1992 per n minore di quattro milioni. La soluzione del teorema di Fermat per tutti gli esponenti maggiori di 2, è il risultato ultimo di ricerche che passano attraverso la congettura di Taniyama-Weil-Shimura che afferma la possibilità di parametrizzare le curve ellittiche mediante funzioni modulari.

Associare a una terna fermatiana a, b, c tale cioè che $a^n + b^n = c^n$, ipotizzando che esista per qualche $n > 2$, la curva ellittica di equazione $y^2 = x(x + a^n)(x - b^n)$ fu idea del tedesco Gerard Frey, nel

1985. Solo un anno dopo lo statunitense Kenneth Ribet dimostrò che la curva di Frey non è parametrizzabile con funzioni modulari, quindi se la congettura di Taniyama-Weil-Shimura era vera, era vero anche l'ultimo teorema di Fermat.

Tra il 1993 e il '94 Andrew Wiles, limitandosi alla classe delle curve ellittiche dette semistabili, classe cui appartiene la curva $y^2 = x(x + a^n)(x - b^n)$, dimostrò la congettura di Taniyama-Weil-Shimura, completando così le ricerche intorno all'ultimo teorema di Fermat. Sulla rivista *Annals of Mathematics* del 1995 comparvero due articoli, uno di Wiles dal titolo *Modular Elliptics Curves and Fermat's Last Theorem*, contenente il nucleo del suo ragionamento, e un secondo articolo, in collaborazione con Richard Taylor, *Ring Theoretic Properties of Certain Hecke Algebras*, in cui trovarono sistemazione alcuni punti critici. Per una esposizione della dimostrazione di Wiles, con la collaborazione di Taylor, della congettura di Taniyama-Weil-Shimura per curve ellittiche semistabili, e delle conseguenze di tale lavoro sull'Ultimo Teorema di Fermat, si può far riferimento al lavoro di M. Bertolini-G. Canuto, *La congettura di Shimura-Taniyama-Weil*, Bollettino U.M.I, (7) 10-A (1996), 213-247.

Alessandra Fiocca, Dipertimento di Matematica, Università di Ferrara,
a.fiocca@unife.it