Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Al Cuoco

La matematica per l'insegnamento

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2002), n.3, p. 473–490.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_3_473_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. V-A, Dicembre 2002, 473-490

La matematica per l'insegnamento.

AL CUOCO ([1])

Nella comunità matematica, in conseguenza di un crescente interesse nell'istruzione matematica ad ogni livello, molti hanno rivolto la propria attenzione alla preparazione matematica dei futuri insegnanti della scuola secondaria. Alcuni ricercatori nel campo dell'istruzione ([1, 2], ad esempio) hanno documentato l'esistenza di notevoli differenze tra gli insegnanti negli Stati Uniti e quelli di altri paesi per quanto riguarda il livello matematico. Un decennio di pensiero e di sforzi ha prodotto diversi insiemi di raccomandazioni specifiche per migliorare la preparazione matematica degli insegnanti [3, 4, 5]. E il documento dello NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*, delinea alcuni obiettivi di massima:

> Gli insegnanti necessitano di diversi tipi diversi di conoscenze matematiche — una conoscenza dell'intero campo; una conoscenza profonda e flessibile degli scopi del programma e delle idee importanti che sono fondamentali per la classe cui insegnano; la conoscenza di come si possano rappresentare le idee per insegnarle con efficacia; e la conoscenza di come si possa valutare la comprensione degli studenti. ... Questo genere di conoscenze è al di là di quanto la maggior parte degli insegnanti sperimentino nei normali corsi precedenti la pratica didattica negli Stati Uniti. ([6], p. 17)

([1]) Traduzione dell'articolo Al Cuoco, *Mathematics for Teaching*, Notices Amer. Math. Soc., 48, 2 (2001), 168-174. Ringraziamo l'AMS per averci permesso la traduzione e la pubblicazione dei questo articolo. La traduzione è dovuta a Carlo Alberto Bosello. Il lettore osserverà che le considerazioni contenute in quest'articolo sono ispirate alla situazione dell'insegnamento della matematica e della preparazione degli insegnanti negli Stati Uniti; la loro originalità e la loro generalità le rendono, a nostro avviso, interessanti anche in altre situazioni quale è quella italiana. *N.d.R.*

Che cosa esattamente deve essere cambiato, se mai lo deve, nei corsi di matematica che gli insegnanti seguono all'università? Nel presente articolo mi concentrerò sulla preparazione degli insegnanti delle scuole medie (soprattutto delle medie superiori), perché la maggior parte dei corsi di matematica rivolti ai futuri insegnanti di scuola media sono offerti dai dipartimenti di matematica e perché questo è l'ordine di scuola che conosco meglio. Durante gli ultimi trent'anni ho trascorso la maggior parte del tempo a pensare alla matematica delle scuole superiori — insegnandola, lavorando con persone che la insegnano o progettano di insegnarla e scrivendo materiale didattico.

Cosa si deve cambiare.

Le raccomandazioni emergono nell'ambito di uno sforzo di migliorare le cose, perciò, prima di esporre le mie, vorrei dare un'occhiata completa a ciò che si dovrebbe migliorare. In effetti, la maggior parte di ciò che si dovrebbe migliorare nelle scuole superiori non ha nulla a che fare con la preparazione matematica che gli insegnanti ricevono. Condizioni di lavoro opprimenti (cinque lezioni al giorno o più), la cultura della scuola, la mancanza di risorse, i bassi salari e la mancanza di prestigio nella società, amministrazioni sbilanciate, la segregazione dal resto della comunità matematica e il fatto che i funzionari governativi propongano soluzioni politiche a problemi didattici sono fattori responsabili dei risultati insoddisfacenti dei programmi di matematica almeno tanto quanto lo è l'attuale piano di studi universitario. E, naturalmente, definire qualcosa come «un problema» è una grossolana generalizzazione quando le classi differiscono tra loro tanto quanto le persone che vi insegnano. Tuttavia esistono alcune caratteristiche comuni a quasi tutti i programmi di scuola superiore che io abbia visto che sono fonte di problemi e che si possono probabilmente far risalire al tipo di matematica che si impara all'università. Comincerò col descrivere queste; vedete se riconoscete in ciò che segue abitudini che gli studenti potrebbero prendere durante le vostre lezioni.

• *Di che cosa si tratta.* In molte scuole si percepisce la matematica come un corpo di conoscenze definitive che viene passato da una generazione alla successiva. Invece di vedere i teoremi di geometria, le formule di trigonometria e i metodi dell'algebra come il *prodotto* della pratica della matematica, questi artefatti sono visti come *la* matematica (per maggiori dettagli su questo aspetto si veda [7, 8, 9]). Non compaiono quasi mai le domande che furono ritenute importanti e gli sforzi che si affrontarono nel tentativo di rispondervi; al loro posto vediamo i risultati degli sforzi, graziosamente confezionati come brani di testo incorniciato. La padronanza di qualsiasi argomento richiede un'approfondita conoscenza dei fatti basilari, ma quando si vedono gli studenti che per prepararsi ad una prova d'esame cercano di imparare la differenza tra la «forma $y = mx + b$» e la «forma a due punti» si comprende che c'è qualcosa che non va.

• *La sindrome dell'«appiattimento».* Ciò che mi colpisce davvero in molte delle lezioni che osservo è che *tutto* è allo stesso livello. Il lessico, la notazione e le convenzioni sono trattate come se venisse loro attribuita la stessa importanza della risoluzione di problemi o della dimostrazione di teoremi. In questo modo l'apprendimento della definizione di coseno viene presentata come matematica dello stesso tipo della dimostrazione delle formule di addizione. E alle formule di addizione viene data la stessa enfasi riservata a molte altre identità trigonometriche ben più esoteriche. Ho ascoltato infinite discussioni tra insegnanti per decidere se un parallelogramma sia o meno un trapezoide o se il simbolo corretto per indicare i numeri interi sia $\boldsymbol{Z}^+$ oppure $\boldsymbol{N}$.

• *Insegnamento centrato sullo svolgimento di prove.* In molte delle lezioni cui ho assistito, l'obiettivo è quello di svolgere il lavoro il più rapidamente e con il minor sforzo possibile. La tipica lezione consiste in un flusso continuo di distribuzione, svolgimento e raccolta di prove scritte. Normalmente le prove scritte sono di due tipi: quaranta esercizi di calcolo identici oppure un problema. In alcuni casi, gli esercizi o il problema sono concepiti per mostrare qualcosa di rilevante, ma in pratica ciò non emerge quasi mai.

• *La pedagogia del guarda-e-imita.* In questo stile di insegnamento l'insegnante comincia svolgendo in dettaglio la risoluzione di un esercizio. Poi sono gli studenti a cimentarsi con un esercizio quasi identico, imitando ciò che l'insegnante ha appena fatto. A questo segue un mucchio di pratica con altri esercizi quasi identici. Il ciclo si ripete fino al termine della lezione, quando vengono assegnati compiti per casa consistenti in ancora altra pratica, giusto per fissare bene le cose. E gli esercizi spesso consistono nella sostituzione di valori numerici in formule o nell'applicazione di qualche procedimento più e più volte.

• *Programmi senza lemmi.* Nell'ambito pre-universitario è profondamente radicata la convinzione che gli studenti, prima di poter lavorare ad un problema, debbano disporre di tutti i prerequisiti necessari per risolverlo. Una volta presi parte ad un'accesa discussione relativa a se si dovesse lasciare che i ragazzi esplorassero il teorema secondo il quale i punti medi di un quadrilatero costituiscono i vertici di un parallelogramma *prima* che avessero visto il teorema che afferma che un segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è lungo quanto la metà del terzo lato ed è parallelo ad esso. Mi aspettavo che la necessità di quel teorema «mediano» sarebbe emersa durante l'indagine sul quadrilatero e che potesse allora essere postulato come lemma e trattato in seguito. Questo concetto di postulare temporaneamente qualcosa per vedere dove conduca è completamente estraneo alla maggior parte dei programmi pre-universitari.

• *Impara tutto all'università.* Molti insegnanti applicano a se stessi la filosofia del «sapere tutto prima di cominciare» di cui sopra. Invece di vedere i propri studi universitari come la sede in cui vengono dotati degli strumenti di cui abbisognano per apprendere matematica per tutta la vita essi vedono l'università come la sede in cui si impara tutta la matematica di cui si potrà mai avere bisogno per insegnare la materia. Questa convinzione ha conseguenze molto profonde. Ad esempio, la maggior parte dei corsi d'aggiornamento per gli insegnanti in attività enfatizza la pedagogia, lo svolgimento dei programmi o altre capacità connesse all'arte di insegnare ([2]) molto più di quanto si concentri sul contenuto matematico — gli insegnanti hanno imparato «la matematica» quando erano all'università. Questo, associato all'idea che la matematica sia un corpo immutabile di fatti, pone molti insegnanti nella situazione terrificante in cui le loro capacità matematiche sono definite non da quello che sono in grado di elaborare ma dai fatti appresi quando erano studenti. Se si ha un tale atteggiamento mentale le domande degli studenti possono fare davvero paura.

- *L'interruzione verticale.* La maggior parte degli insegnanti vede pochi collegamenti tra la matematica che ha studiato all'università e la matematica che insegna. Questo è particolarmente vero in algebra, dove l'algebra astratta è vista come una materia completamente diversa dall'algebra della scuola. A causa di ciò, l'algebra delle scuole superiori si è evoluta in una materia che è praticamente indistinguibile dallo studio di funzioni senza il calcolo differenziale. Un'ulteriore conseguenza è che, poiché i singoli argomenti non vengono visti come cose che trovano posto in un panorama più vasto, l'enfasi in un argomento può finire col cadere su qualche applicazione a basso livello piuttosto che sugli importanti collegamenti matematici che comporta. Ad esempio, si guardi a come la maggior parte dei programmi tratta il teorema di DeMoivre. Se mai viene menzionato è per applicarlo alla ricerca di piccole radici e potenze di specifici numeri complessi. Non c'è alcun collegamento con la ciclotomia, la costruibilità di poligoni o con identità algebriche e trigonometriche.

Queste sono generalizzazioni ed esistono notevoli eccezioni a ciascuna di esse. Ad esempio, la maggior parte degli insegnanti della mia generazione non ha imparato virtualmente nulla di tecnologia all'università ma, per conto proprio, si è fatta un'immensa esperienza in quest'area. E conosco molti insegnanti che sono veri matemati-

([2]) Naturalmente queste capacità sono molto importanti. Il punto è che i programmi di aggiornamento professionale vi dedicano un'attenzione enormemente maggiore di quella dedicata ai contenuti.

ci, i quali continuano a studiare matematica lungo tutto il corso della propria carriera e che hanno un vero talento per aiutare gli studenti a sviluppare il proprio pensiero matematico. D'altra parte, i problemi appena descritti non sono esclusivo appannaggio di insegnanti scarsamente preparati o di insegnanti che lavorano in un settore diverso da quello in cui sono laureati. Sto parlando di insegnanti con una laurea in matematica conferita da una buona università — insegnanti che potrebbero aver studiato con voi. La sola ragione per la quale ho stilato una lista come questa è che questo è il tipo di problemi seri che, credo, si possono far risalire ai corsi di matematica che gli insegnanti hanno seguito all'università e che possono essere affrontati cambiando alcune cose nella preparazione matematica degli insegnanti. Mi rifaccio alla massima del «si insegna come ci hanno insegnato» ben sapendo che si tratta di una semplificazione eccessiva. Ci sono altri fattori che influiscono sulla matematica che si fa nelle classi delle superiori. Tra quelli importanti c'è il materiale (testi, esercizi, software e così via) che gli insegnanti utilizzano. Per una complessa serie di motivi che hanno più a che fare con l'economia che con l'istruzione, i grandi editori hanno prodotto materiali di livello davvero infimo i quali, a propria volta, hanno alimentato molti dei problemi che ho elencato.

Cosa si può fare?

La maggior parte dei problemi descritti nel precedente paragrafo sono non banali. *Non si potranno risolvere riorganizzando gli argomenti di un programma o aggiungendo argomenti ad un piano di studi universitario già dilatato.* Non serve neppure stilare liste di argomenti che gli insegnanti dovrebbero conoscere quando si laureano. Certo, gli insegnanti hanno bisogno di conoscere «i fatti». Ma come possiamo aiutare i futuri insegnanti, oltre che ad imparare qualcosa sui risultati della matematica, anche a sperimentare il *fare* matematica? Come possiamo aiutarli a sviluppare gusto matematico? Come possiamo far loro sviluppare la percezione di quali siano le questioni davvero importanti che hanno condotto a conseguire risultati importanti? Come possiamo aiutarli a sviluppare la capacità di capire cosa enfatizzare ai propri studenti delle superiori? Come possiamo aiutare gli insegnanti a sviluppare una passione per la disciplina che si protragga dopo la laurea? Ecco alcuni principi generali che affrontano queste questioni e che si potrebbero utilizzare per riprogettare parte dell'esperienza universitaria dei futuri insegnanti.

Costruire nessi con la matematica della scuola.

Un modo per aiutare gli insegnanti in attività a sviluppare l'abitudine di «scavare» negli argomenti che insegnano per estrarne la matematica importante è quello di adottare esplicitamente tale abitudine nei corsi universitari. Ad esempio, si potrebbe cominciare da diversi argomenti tratti dai testi scolastici delle superiori e utilizzarli come punto di partenza per arrivare alla matematica più avanzata che li collega. È proprio ciò che ho fatto io con un gruppo di insegnanti delle medie inferiori e superiori nell'ambito di una sperimentazione sul campo relativa ad un programma di aggiornamento professionale [10]. Abbiamo cominciato con attività che potrebbero utilizzare con i propri studenti: contare i percorsi in «taxicab geometry» e contare le partizioni ordinate degli interi positivi. Nel corso di entrambe le indagini è emerso il triangolo di Pascal, perciò abbiamo cercato le somiglianze strutturali tra i due problemi che giustificassero questo fatto. Questo ha condotto a discutere di ricorsione, induzione matematica, teorema del binomio, sistemi di algebra computazionale, partizioni e, infine, funzioni generatrici. Alla fine del corso (di dieci ore) ogni insegnante aveva visto un po' di matematica nuova e aveva individuato nuovi collegamenti tra gli argomenti. Sono convinto che il percorso che siamo riusciti a compiere sia dipeso in modo cruciale dal fatto che la matematica di cui discutevamo ruotasse attorno alla matematica delle medie e delle superiori. E ci sono centinaia di moduli come questo, che attendono solo di essere sviluppati: sequenze che cominciano e finiscono con la matematica della scuola, ma che nel loro svolgimento portano gli studenti ben addentro l'ambito della matematica universitaria. Esistono altri modi per fare dei collegamenti con ciò che gli insegnanti insegneranno. Un'idea promettente è quella chiamata talvolta del «seminario ombra». I futuri insegnanti di un classico corso, per esempio, in algebra lineare frequenterebbero un seminario settimanale che potrebbe essere progettato da un matematico, da un insegnante in attività e da un docente di una scuola di preparazione all'insegnamento. Il seminario accompagnerebbe il corso, mostrando in che modo si potrebbero rendere le idee del corso affrontabili per gli studenti delle superiori ovvero come gettino luce su altri argomenti di algebra e di geometria dei programmi scolastici. Esistono molte varianti di questa idea. Ad esempio, Carole Greenes e suoi colleghi di magistero e di matematica alla Boston University stanno progettando un «corso parallelo» per futuri insegnanti volto ad aiutarli a collegare l'algebra astratta, l'algebra lineare e la teoria dei numeri con la matematica delle scuole superiori. Un altro modo per collegarsi alla matematica della scuola è quello di mostrare applicazioni della matematica all'arte di insegnare. Ad esempio, Hyman Bass tiene un corso sul *task design* alla University of Michigan che verte sulla progettazione delle attività degli studenti sia dal punto di vista matematico sia da quello psicologico. Il corso di Bass costituisce una trattazione approfondita di ogni aspetto della progettazione delle attività degli studenti. Ma uno sforzo più modesto potrebbe essere incorporato nei corsi di matematica per futuri insegnanti. Ad esempio, si può trovare la motivazione e l'applicazione di molta della matematica universitaria classica in «meta-problemi» sui quali gli insegnanti si interrogano in continuazione quando inventano problemi per i propri studenti (per maggiori informazioni su questo tema si veda [11]). Questo genere di matematica potrebbe comprendere domande come queste:

- (Come) si possono generare terne pitagoriche?
- (Come) si possono generare triangoli con un angolo di 60° aventi i lati di lunghezza pari a numeri interi?
- Se due poligoni hanno la stessa area, (come) se ne può tagliare uno per ottenere l'altro?
- (Come) si possono trovare punti nel piano che determinino un triangolo avente i lati di lunghezza pari a numeri interi?

• (Come) si possono generare polinomi cubici in $\boldsymbol{Z}[x]$ aventi estremi e radici razionali distinti?

• (Come) si può generare il grafico di $y = \sin x$ tramite software geometrico dinamico?

Applicazioni della matematica a scienza, finanza e sport sono divenute la materia prima di molti corsi universitari. Perché non includere applicazioni della matematica all'insegnamento della matematica?

Prendere in considerazione modi diversi di fare lezione.

Mi è difficile parlare di questo. Adoro andare ai seminari, e una conferenza ben fatta per me è altrettanto piacevole quanto un concerto ben eseguito. Ma il fatto è che la maggior parte dei miei studenti non la vede così. Hanno bisogno di lavorare ai problemi *durante la lezione*. Hanno bisogno di scambiare idee con i propri compagni. Molti di loro fanno molta fatica ad imparare qualcosa ascoltando me che gliela espongo. D'altra parte imparano moltissimo quando io lavoro assieme a loro ad un problema, e adorano esporre qualcosa essi stessi, specialmente se hanno avuto qualche idea brillante. Non è questo il modo in cui l'insegnamento universitario fu impartito a me, e mi occorsero diversi anni d'insegnamento per trovare modi efficaci per far fare della matematica ai miei studenti. Se vogliamo che i futuri insegnanti siano efficaci *e* che insegnino come è stato insegnato loro, dovremmo organizzare le nostre lezioni universitarie attorno a ciò che i matematici *fanno* piuttosto che attorno a ciò che *dicono*.

Voglio che gli insegnanti vedano come i risultati della matematica vengono ottenuti piuttosto che come vengono esposti. Tutti noi sappiamo che si tratta di cose diverse. Quando chiudiamo la porta dello studio per cominciare a lavorare su un problema, ciò che accade non assomiglia affatto al contenuto dell'articolo che appare un anno e mezzo più tardi. Quello che facciamo a porte chiuse è pieno di false partenze, abbondanti calcoli, esperimenti e casi particolari. Riconduciamo le cose a lemmi dei quali non abbiamo alcuna dimostrazione, sospendiamo il lavoro su questi lemmi e su altri dettagli fino a quando vediamo se siano di una qualche utilità, calcoliamo e giochiamo con i passaggi logici per ore e speriamo che da tutta questa immersione emerga un qualche ordine, qualche anello mancante, qualche collegamento nuovo con vecchie idee. Non ci preoccupiamo della verità o della bellezza o della persuasività o della purezza del metodo deduttivo. Cerchiamo soltanto degli indizi. Studiando quanto diciamo in pubblico, alcuni studenti sono in grado di imparare a fare ciò che noi facciamo dietro la porta dello studio. *Sono molti di più quelli che non ne sono in grado*. Questo non significa che non possano diventare insegnanti con un senso profondo della matematica. Significa semplicemente che dobbiamo essere onesti con loro. Dobbiamo mostrare loro in che cosa consista davvero la matematica; dobbiamo incentrare e organizzare le nostre lezioni attorno allo stile di lavoro utilizzato dai matematici anziché attorno ai risultati di quel lavoro. Bisogna che gli studenti vedano e sperimentino tanto gli ingredienti di una soluzione di un problema quanto il risultato finale. Bisogna che sperimentino tutto quel gingillarsi che ha luogo *prima* che abbia inizio la rifinitura della dimostrazione.

Inquadrare le idee matematiche in contesti più ampi.

L'esperienza dei corsi universitari per futuri insegnanti potrebbe fare molto per garantire che gli argomenti di matematica della scuola vengano inquadrati in contesti più ampi, in modo che i futuri insegnanti abbiano la possibilità di riflettere su questioni come «di che cosa è un esempio questo?» Ad esempio, immaginate corsi universitari in cui si discutessero esplicitamente questioni come queste:

- Esistono altre funzioni che si comportano come il valore assoluto sui numeri razionali? Che cosa significa «comportarsi come il valore assoluto?»

- Esistono altri modi ragionevoli di misurare la distanza tra punti del piano? Che cosa comporta questo per la geometria piana?

- Esiste una disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in algebra lineare e una disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in statistica. È soltanto una coincidenza?

- La probabilità geometrica ([3]) suggerisce l'esistenza di un nesso tra probabilità e area. C'è qualcosa di più di una somiglinza superficiale?

- Tutti i libri dicono che la teoria di Galois riguarda la soluzione di equazioni. Che cosa intendono esattamente?

- La formula della deviazione standard assomiglia molto alla formula della distanza. È una coincidenza?

- Se si prende il quadrato di un intero gaussiano, le parti reale e immaginaria sono le gambe di una terna pitagorica. *Questa* è una coincidenza?

- Esiste un'equazione caratteristica in algebra lineare e un'equazione caratteristica utilizzata per risolvere equazioni alle differenze. Sono collegate?

Credo che, se si sollevassero regolarmente questioni come queste, vedremmo una somiglianza molto più stretta tra materie con lo stesso nome trattate nella scuola e all'università.

Inserire un'esperienza di ricerca nella preparazione degli insegnanti.

Esistono poche cose di validità assoluta nel campo dell'istruzione ma c'è una cosa di cui sono assolutamente sicuro: *I migliori insegnanti delle superiori sono quelli che hanno avuto in matematica un'esperienza analoga alla ricerca.* Non intendo ricerca nel senso di produzione di nuove conoscenze. I problemi alla frontiera dello stato dell'arte richiedono un immenso retroterra. Ma i *metodi* utilizzati dai matematici che fanno ricerca sono largamente accessibili (i miei colleghi ed io riteniamo che siano accessibili agli studenti delle

([3]) Nella matematica della scuola la «probabilità geometrica» concerne il calcolo della probabilità che un punto scelto a caso cada in una data regione tramite il calcolo di rapporti di aree.

superiori). E il fatto di lavorare per un periodo di tempo prolungato su un problema per il quale apparentemente non c'è alcun approccio o soluzione ha effetti profondi su come viene percepita la natura di tale attività. Gli insegnanti che hanno svolto questo genere di ricerca sono molto meno inclini a pensare alla matematica come ad un corpo di conoscenze definitive di quanto lo siano quelli che hanno semplicemente seguito una serie di corsi. Sono più inclini a rimanere impegnati in matematica dopo aver cominciato ad insegnare. Ed è molto più probabile che incentrino le proprie lezioni su indagini di rilievo piuttosto che su esercizi di basso livello. Esistono molte aree di indagine promettenti alle quali gli studenti universitari si possono dedicare senza possedere un bagaglio tecnico eccessivo — problemi «senza soglia, senza tetto» che permettono loro di lavorare da matematici per una parte della loro esperienza universitaria. In un programma ideale di preparazione di un insegnante il genere di assimilazione organizzata dei risultati matematici principali che si ottiene dai corsi si combina con le esplorazioni ben più pasticciate che si conducono lavorando con un mentore e affrontando le difficoltà di un progetto di ricerca.

Alcuni esempi.

Nel corso degli anni, molte persone hanno realizzato alcuni tra questi ed altri suggerimenti al fine di migliorare la preparazione degli insegnanti. Eccone alcuni di cui sono a conoscenza. Sono sicuro che ce ne sono molti altri. Forse le *Notices* sono una sede in cui potrebbe trovare spazio la discussione di approcci innovativi. Il primo esempio è vecchio di quasi trent'anni. Nel 1972, seguii un corso estivo tenuto dal defunto Ken Ireland (di Ireland-Rosen memoria [12]) presso il Bowdoin College. Il corso ebbe un'enorme influenza sulla mia vita. Il presupposto di Ireland era che esistono dozzine di famosi risultati matematici che fanno parte del «folclore» della matematica elementare. Alcuni di questi risultati risalgono ai Greci, altri provengono dall'aritmentica e dalla teoria dei numeri e altri ancora concernono l'algebra e l'analisi classiche (ne sono esempi l'impossibilità di certe costruzioni con riga e compasso e la trascendenza di π). Sono parte del folclore nel senso che la maggior parte degli insegnanti conoscono gli *enunciati* dei risultati, ma pochi ne conoscono le dimostrazioni o financo la storia. Lo scopo del corso era di porre rimedio a questo; in sei settimane molto intense, Ireland ci aiutò a sviluppare il retroterra matematico necessario a capire le dimostrazioni di questi fatti famosi, come fossero collegati gli uni agli altri e dove si situassero nella storia della matematica. Il corso si basava su circa 200 problemi, distribuiti a ondate, e accompagnati da lezioni quotidiane che erano tutto tranne che didascaliche e che cambiarono per sempre le mie opinioni su cosa costituisse un insegnamento efficace. È incredibile quanto questo corso precorresse i suoi tempi. Venivamo incoraggiati a lavorare insieme sui problemi (e perfino a fornire soluzioni di gruppo), un'idea inaudita a quel tempo ma che è divenuta un cardine dell'attuale movimento di riforma dell'istruzione matematica. Le lezioni erano concepite per darci i nessi di cui avremmo avuto bisogno per progredire nella soluzione dei problemi, non per fornirci schemi che avremmo potuto utilizzare per risolverli. Questa enfasi sul «docente come allenatore» è un altro ingrediente fondamentale dell'odierno movimento di riforma, ma rammento quanto fosse inquietante per molti di noi nel 1972. Quel corso estivo mi fece assimilare l'idea che fosse possibile progettare un consistente corso di matematica incentrato su argomenti sottostanti la matematica della scuola, utilizzando uno stile d'insegnamento che lascia che sia il cimentarsi con i problemi a indicare la strada. Anche il prossimo esempio è vecchio. La sua origine risale al programma Ross alla Ohio State di quarant'anni fa. Glenn Stevens e David Fried, assieme a Marjory Baruch e a Steve Rosenberg, hanno trasportato una versione migliorata di quel programma alla Boston University, dove è stato attivo per più di un decennio sotto il nome di PROMYS (Program in Mathematics for Young Scientists, Programma in Matematica per Giovani Scienziati). Per quasi tutto questo tempo il programma è stato frequentato da insegnanti (futuri e in attività) che hanno trascorso sei settimane per due estati immersi nella teoria dei numeri e in altra matematica. Quel programma per insegnanti è un esempio perfetto di come l'immersione nella matematica costituisca un'efficace preparazione e sviluppo professionale degli insegnanti. È incentrato su tre attività:

1. *I corsi.* Gli insegnanti seguono un corso intensivo di sei settimane di teoria dei numeri assieme agli studenti del programma. Come il corso di Ireland, è incentrato su problemi; insiemi di problemi organizzati con cura vengono distribuiti, corretti e restituiti durante cicli di una giornata. Stevens tiene una lezione al mattino ma, come egli dice, «Faccio in modo di non discutere mai un argomento a meno che l'uditorio non ci si sia già cimentato per tre giorni».

2. *L'esperienza di ricerca.* L'esperienza di teoria dei numeri è pianificata con cura e i gruppi di problemi conducono a risultati specifici. A completamento di ciò, ciascun insegnante lavora ad un progetto di ricerca con tre studenti. Ai partecipanti vengono dati suggerimenti («circoli di idee» come li chiamano al PROMYS) a partire dai quali essi pianificano e studiano un progetto per tutta l'estate. I progetti sono di facile accesso ma possono condurre (e spesso conducono) gli insegnanti e gli studenti in territori davvero nuovi ed avanzati ([4]).

3. *I seminari durante l'anno accademico.* Tra un'estate e l'altra gli insegnanti frequentano cinque seminari di una giornata presso l'Education Development Center nel corso dei quali si lavora per tradurre l'esperienza del PROMYS nella pratica dell'aula scolastica. Si cercano nessi tra gli argomenti del PROMYS e la matematica della scuola. Si cercano anche modi per praticare un metodo di insegnamento basato sul permettere agli studenti di esplorare un argomento prima che gli insegnanti lo presentino in aula.

Gli insegnanti trovano travolgente l'esperienza del PROMYS. Vedono com'è fare della matematica vera — trovarsi sempre al limite di ciò che si comprende, avere da fare più di quanto sia possibile portare a termine e vedere indizi di connessioni misteriose emergere quasi dal nulla. Vengono fornite vaste strutture di supporto per

([4]) Come esempio del tipo di progetti utilizzati nel programma, si veda il progetto di Michelle Manes per studenti delle superiori e per i loro insegnanti su www2.edc.org/makingmath.

affrontare la frustrazione. Ci sono studenti delle lauree di primo e di secondo livello disponibili a fungere da consiglieri e a condurre sessioni di risoluzione dei problemi e i docenti universitari sono sempre lì per fornire aiuto. Nell'arco di tre settimane, la maggior parte dei partecipanti fa un salto di qualità e comincia a lavorare come i matematici veri. Sviluppano una consapevolezza della natura della matematica che è destinata ad aiutare gli insegnanti ad evitare i problemi che ho descritto in precedenza. I due esempi precedenti hanno il privilegio di non essere confinati alla programmazione in semestri e a corsi dell'anno accademico. Ma anche con queste limitazioni si stanno sperimentando alcuni approcci molto creativi:

• Hung-Hsi Wu ha messo a punto un insieme di principi per progettare corsi per laureandi in matematica che non intendono proseguire con una laurea di secondo livello. Questi principi comprendono molti espedienti concepiti per risolvere i problemi che ho descritto in precedenza (si veda [13] per una lista completa):

– Fare collegamenti espliciti tra gli argomenti del corso e gli argomenti di matematica elementare.

– Porre gli argomenti nel proprio contesto storico.

– Nel corso delle indagini e delle spiegazioni, porre gli argomenti nel loro più ampio contesto matematico.

– Fornire motivazioni ad ogni occasione.

Wu ha messo in opera tutti i suoi principi con un discreto successo in svariati corsi avanzati per laureandi in matematica a Berkeley. Il suo corso di algebra, ad esempio, fa molto per aiutare i futuri insegnanti a collegare l'algebra della scuola e l'algebra come disciplina matematica.

• Bill McCallum descrive (comunicazione personale) un programma presso la University of Arizona, sviluppato, assieme ai testi che lo accompagnano [14, 15], da David Gay e Fred Stevenson. Gli studenti che decidono di insegnare nelle superiori rimpiazzano l'algebra astratta e l'analisi con due corsi innovativi:

– *Introduzione alla teoria dei numeri e all'algebra moderna* parte dai numeri naturali (e dalla teoria elementare dei numeri) e perviene ad una costruzione dei numeri reali. Lungo la strada gli studenti incontrano la teoria degli sviluppi decimali, trovano punti razionali su curve algebriche e studiano vari modi di rappresentare i numeri reali. Il corso, poi, fornisce agli studenti una vasta scelta di progetti che trattano di argomenti che vanno dai numeri di Fibonacci alle frazioni continue.

– *Elementi di geometria* mi appare come un catalogo di quanto ogni insegnante delle superiori deve portare con sé. Misura e misurazione, poliedri, problemi di cammino minimo, caleidoscopi, simmetria e problemi isoperimetrici sono tutti argomenti trattati.

- Joe Rotman ha messo a punto un corso (e un testo che lo accompagna [16]) che egli utilizza alla University of Illinois per dare agli studenti una buona percezione di cosa significhi fare matematica. Il corso aiuta gli studenti a sviluppare fiducia in se stessi nella stesura di dimostrazioni partendo da risultati sui coefficienti binomiali che si possono dimostrare per induzione. Rotman ritiene che ciò di cui gli studenti hanno bisogno non sia fare esperienza di tavole di verità bensì il tempo per sviluppare la capacità di produrre dimostrazioni convincenti, e utilizza molto del tempo del suo corso per fare in modo che gli studenti leggano, critichino, sviluppino e presentino dimostrazioni. La parte principale del corso tratta anche la convergenza di successioni e l'algebra dei numeri complessi. Fra gli argomenti collaterali ci sono le terne pitagoriche, la parametrizzazione del cerchio e delle sezioni coniche, una discussione di π che arriva ad una dimostrazione della sua irrazionalità e le formule di risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado.

Queste idee, corsi ed esempi sono tutti molto diversi tra loro, ma hanno diverse caratteristiche comuni che sono essenziali per preparare insegnanti delle superiori di qualità:

- Hanno un progetto coerente ed uno scopo preciso.
- Mostrano la matematica come qualcosa che si fa piuttosto che come qualcosa che si memorizza.

- Enfatizzano (e descrivono esplicitamente) il pensiero e gli atteggiamenti mentali adottati dai matematici professionisti.

- Portano gli studenti nella cultura della matematica — una cultura con una propria storia, estetica, eleganza e perfino con un proprio umorismo.

- Si concentrano sull'interazione tra gli studenti e tra questi e il docente.

- I problemi precedono l'astrazione, l'esperienza precede le sistemazioni assiomatiche e il pensiero degli studenti è al centro del lavoro.

Ogni volta che stilo una lista come questa mi domamdo perché questo non debba essere il genere di esperienza matematica universitaria che hanno *tutti*. Quando si concepiscono piani di studio di matematica negli Stati Uniti si è soliti concentrarsi su elenchi di argomenti da includere. Siamo diventati bravi a farlo, e si possono trovare elenchi molto ben fatti anche in altri paesi. Ma la mia tesi in questa sede è che tali elenchi sono destinati ad essere inefficaci se non troviamo modi per comunicare lo spirito di fare matematica a coloro che progettano di insegnarla.

I miei sinceri ringraziamenti a coloro che mi hanno aiutato nella stesura di questo articolo. Le prime versioni sono state fortemente migliorate da Paul Goldenberg, Wayne Harvey, Michelle Manes, Dick Askey e da un collega di Dick la cui identità permane un mistero. Le persone citate nell'articolo sono state generose di dettagli attorno al loro lavoro. I recensori e l'editor mi hanno dato aiuto e consigli inestimabili nel rifinire la penultima versione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. Ma, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Mahwah, NJ, Erlbaum (1999).

[2] J. W. Stigler - J. Hiebert, *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*, New York, Free Press (1999).

[3] J. R. C. Leitzel (Ed.), *A Call for Change: Recommendations for the Mathematical Preparation of Teachers of Mathematics*, Washington, DC, Mathematical Association of America (1991).

[4] Mathematical Sciences Education Board (1996). *The Preparation of Teachers of Mathematics: Considerations and Challenges*, A Letter Report. Washington, DC: National Research Council, Center for Science, Mathematics and Engineering Education.

[5] CBMS (2000) CBMS Mathematics education of Teachers Project Draft Report. http://www.maa.org/cbms/metdraft/index.htm

[6] National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

[7] A. Cuoco - E. P. Goldenberg - J. Mark, *Habits of Mind: An Organizing Principle for a Mathematics Curriculum*, Journal of Mathematical Behavior, **15** (4) (1996), 375-402.

[8] A. Cuoco, *What I Wish I Knew About Mathematics When I Started Teaching*, Mathematics Teacher, **91** (5) (1998).

[9] A. Cuoco, *Some Worries about Mathematics Education*, Mathematics Teacher, 88 (3) (1995).

[10] *Connecting with Mathematics.* An NSF-funded materials development project for practicing teachers. For more details, contact Helen Lebowitz (hlebowitz@edc.org).

[11] A. Cuoco, *Meta-Problems in Mathematics*, College Mathematics Journal, to appear (2000).

[12] K. Ireland - M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, New York, Springer-Verlag (1982).

[13] H. H. Wu, *On the Education of Mathematics Majors*, In *Contemporary Issues in Mathematics Education*, vol. **36**, MSRI (1999).

[14] D. Gay, *Geometry by Discovery*, John Wiley, New York (1998).

[15] F. W. Stevenson, *Exploring the Real Numbers*, Prentice-Hall: Upper Saddle, New Jersey (2000).

[16] J. Rotman, *Journey into Mathematics: An Introduction to Proofs*, Prentice Hall: Upper Saddle, New Jersey (1998).

Al Cuoco dirige il Center for Mathematics Education alla EDC.
Il suo indirizzo email è alcuoco@edc.org