Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Raffaella Franci

Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2002), n.2, p. 293–328.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_2_293_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. V-A, Agosto 2002, 293-328

Il *Liber Abaci* di Leonardo Fibonacci 1202-2002.

RAFFAELLA FRANCI

Ottocento anni fa Leonardo Fibonacci completava la stesura di un ponderoso trattato di aritmetica e algebra intitolato *Liber abaci,* destinato ad avere una notevole influenza nello sviluppo della matematica occidentale.

Il nome dell'autore, tuttavia, è attualmente forse più noto per essere legato a quello di una successione di numeri naturali che, sebbene si trovi per la prima volta nella risoluzione di uno dei problemi contenuti nel *Liber abaci*, è però del tutto marginale nel contesto dell'opera.

Rileggere quest'antico trattato nell'ottavo centenario della sua composizione collocandolo nel contesto culturale e sociale dell'epoca, valutarne il ruolo nella diffusione e nello sviluppo della matematica, non è un esercizio di retorica celebrativa ma un'esigenza culturale e scientifica.

Leonardo Fibonacci: la vita e le opere.

Le poche notizie relative alla vita di Leonardo Fibonacci, detto anche Leonardo da Pisa o Pisano ([1]), ci provengono da alcuni riferimenti autobiografici contenuti nelle sue opere e da due documenti coevi: un atto notarile del 1226 e una delibera del Comune di Pisa databile tra il 1233 e il 1241, [23], [5].

Sono ignote le date di nascita e di morte, mentre il 1202 come anno di composizione del *Liber abaci* è indicato nei manoscritti che lo

([1]) Leonardo, che gli storici della matematica hanno la consuetudine di indicare con l'appellativo di Pisano, è invece più noto ai matematici come Fibonacci, i suoi concittadini lo denominavano invece Bigollo.

tramandano, molti dei quali esordiscono: *Incipit liber Abaci Compositus a leonardo filio Bonacij Pisano In anno M°cc°ij°* (Fig. 1). Siamo così informati anche del luogo di nascita, Pisa, e della casata, quella dei figli di Bonaccio, da cui la volgarizzazione Fibonacci. Il nome del padre, *Guilielmus*, è invece indicato nell'atto notarile sopraindicato, relativo ad una cessione di beni immobili, nel quale è menzionato anche un fratello di Leonardo di nome *Bonaccinghus*.

Negli anni intorno al 1185 Guglielmo Fibonacci era pubblico scrivano della Repubblica di Pisa presso la dogana di Bugia, un importante porto commerciale dell'Africa settentrionale. In quegli anni come è noto Pisa assieme a Genova, Venezia ed Amalfi aveva il monopolio del commercio marittimo nel Mediterraneo.

Il commercio dopo molti secoli di stagnazione, dall'anno Mille aveva avuto una notevole ripresa ed aveva assunto di nuovo carattere internazionale. Il commercio internazionale aveva due bacini principali: l'Europa settentrionale che forniva lana, panni, legname, ferro ed altri metalli e i paesi dell'Africa settentrionale e del vicino oriente che esportavano principalmente spezie, seta e gioielli. Nonostante il frazionamento politico, la diversità dei costumi e delle lingue parlate i paesi di entrambi i poli erano caratterizzati da una religione comune e da una comune lingua letteraria: il cristianesimo e il latino per i primi, l'islamismo e l'arabo per gli altri.

Il legame commerciale fra questi due mondi era per la maggior parte fornito da mercanti italiani che alle fiere, che si tenevano lungo tutto l'arco dell'anno in alcune località della Francia, acquistavano prodotti trasportati poi per nave nei porti dell'Africa settentrionale o della Siria, dove erano venduti o scambiati con le merci dei più lontani entroterra pervenute tramite le carovane.

La continuità e l'ampiezza dei commerci fra le città marinare italiane e alcuni porti arabi portarono alla costituzione in questi ultimi di quartieri i cui abitanti provenivano tutti da una stessa città e ai quali erano concessi speciali privilegi. Si trattava di vere e proprie zone franche rette da pubblici ufficiali che applicavano nell'amministrarle le leggi delle rispettive repubbliche, [9], [30]. Bugia, all'epoca un'importante città dell'Africa settentrionale, era uno dei porti nei

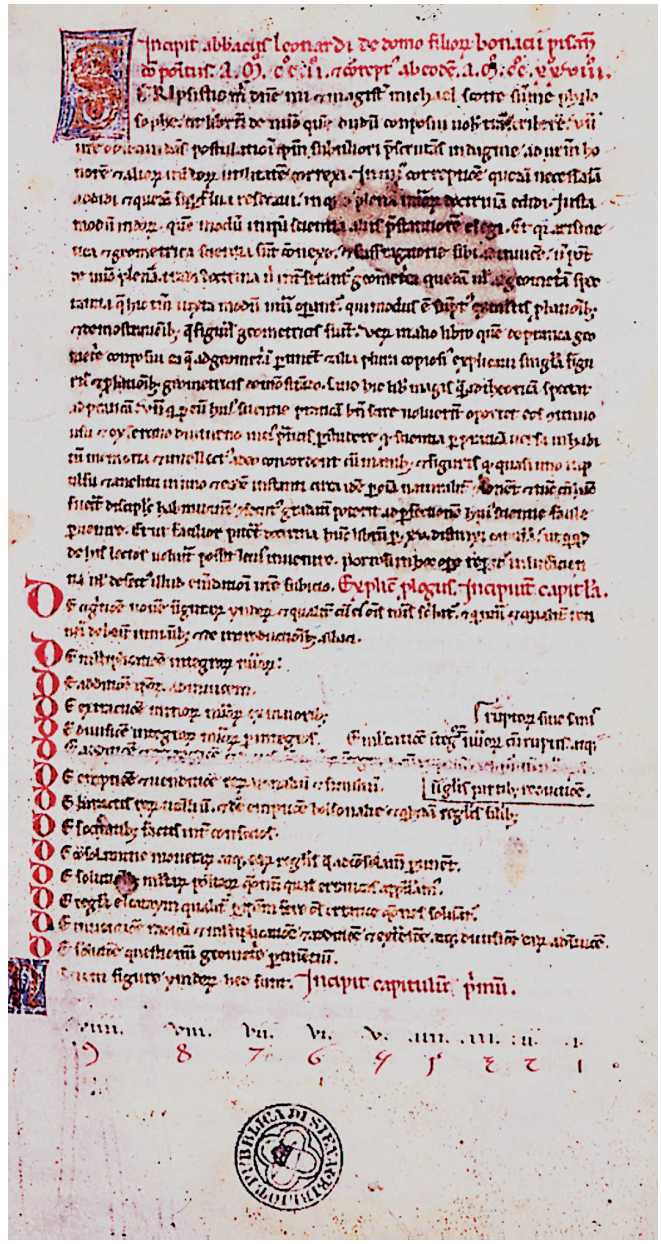


Fig. 1. – Pagina iniziale del *Liber abaci* dal manoscritto L.IV.20 della Biblioteca Comunale degli Intronati di Siena. Il manoscritto è uno dei più completi e più antichi che ci sono pervenuti. Nell'ultima riga sono rappresentate le cifre dal nove all'uno. Si noti come la forma di alcune di esse sia diversa da quella attuale.

quali Pisa aveva un suo «stabilimento», che negli anni attorno al 1185 era presieduto da Guglielmo Fibonacci. È probabile che i Fibonacci fossero una famiglia di mercanti allora, infatti, la classe mercantile aveva assunto il governo delle città e i suoi appartenenti ricoprivano a turno le cariche pubbliche.

Guglielmo, mentre era in servizio a Bugia, decise di chiamare a sé il figlio Leonardo, ancora fanciullo, per completarne l'educazione.

All'epoca la formazione di un giovane destinato alla mercatura prevedeva varie fasi, la prima delle quali avveniva in una scuola, spesso annessa alla cattedrale, in cui si insegnava a leggere e scrivere in latino, e i primi rudimenti dell'aritmetica. Successivamente era previsto un periodo di tirocinio presso la bottega di un mercante, dove si apprendevano anche le tecniche del computo commerciale, completavano l'istruzione una serie di viaggi effettuati insieme a mercanti già esperti.

Quando Leonardo giunse a Bugia quasi certamente aveva già concluso la prima fase della sua educazione. Il padre, infatti, lo mandò a studiare l'abaco, termine con il quale erano indicati sia uno strumento a tavoletta per eseguire le operazioni aritmetiche, sia il complesso delle tecniche commerciali. Nella scuola di Bugia Leonardo venne a conoscenza del sistema posizionale usato dagli arabi per scrivere i numeri e ne restò affascinato. Ricordiamo che allora, in Europa il sistema usato per rappresentare i numeri era ancora quello romano e i calcoli erano eseguiti con l'ausilio dell'abaco a tavoletta, mentre nel mondo arabo già da qualche tempo si era affermato il sistema di numerazione posizionale, elaborato dagli Indiani, con i relativi algoritmi per eseguire le operazioni aritmetiche. Questo sistema, il nostro di oggi, è molto più agevole per l'esecuzione dei calcoli ed è verosimile che avesse attirato l'attenzione dei mercanti italiani che da qualche tempo frequentavano i mercati arabi. Probabilmente fu proprio perché Leonardo imparasse questo modo nuovo di fare i conti che il padre lo aveva chiamato a Bugia. Aldilà delle ipotesi resta in ogni modo il fatto che il giovane Fibonacci si appassionò alla matematica al punto che durante la terza fase della sua educazione, quella dei viaggi commerciali, ne approfittò per ampliare le sue

conoscenze in materia, sia studiando che discutendo le nozioni apprese con i maestri dei vari paesi che visitava.

Gli studi approfonditi e comparativi fra i vari sistemi aritmetici allora in uso convinsero Leonardo della superiorità del sistema indiano cosicché, una volta tornato in patria, sul finire del secolo, si dedicò alla compilazione di un trattato allo scopo di divulgare presso la *gens latina* questo sistema. Il trattato intitolato *Liber abaci* fu completato nel 1202, nell'introduzione l'autore enuncia i motivi che l'hanno spinto a scrivere l'opera e traccia un interessante profilo autobiografico.

> Quando mio padre, scrivano pubblico presso la dogana di Bugia per conto dei mercanti pisani, fu incaricato di dirigerla, essendo io ancora fanciullo mi fece andare presso di lui. Essendosi reso conto dell'utilità e dei vantaggi che me ne sarebbero venuti in seguito, volle che là per un certo tempo stessi a studiare l'abbaco e su esso venissi istruito. Ivi fui introdotto in tale arte da un mirabile insegnamento per mezzo delle nove figure degli Indi. La conoscenza di tale arte molto mi piacque rispetto alle altre. Successivamente con studio assiduo e impegnandomi in discussioni, giunsi a comprendere quanto di essa si studiava in Egitto, Siria, Bisanzio, Sicilia e Provenza, luoghi che ripetutamente visitai per i miei viaggi commerciali. Per questo considerai l'algoritmo e gli archi di Pitagora quasi un errore in confronto al procedimento degli Indi.
>
> Riassunto in breve tale procedimento degli Indi, studiandolo più attentamente e aggiungendovi qualcosa di mia iniziativa e altro ancora apponendovi delle sottigliezze dell'arte geometrica di Euclide, mi sono impegnato a comporre nel modo più chiaro possibile questo libro diviso in 15 capitoli, presentandovi con dimostrazioni quasi tutto quello che ho inserito. E questo perché coloro che sono attirati da questa scienza ne vengano istruiti in modo perfetto, e i popoli latini non se ne trovino esclusi come è stato fino ad oggi ([2]).

([2]) Cum genitor meus a patria publicus scriba in duana bugee pro pisanis mercatoribus ad eam confluentibus constitutus preesset, me in pueritia mea ad se venire faciens, inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per aliquot dies stare voluit et doceri. Ubi ex mirabile magisterio in arte per novem figuras Indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit, et intellexi ad illam, quod quidquid studebatur ex ea apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis postea peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum. Qua re amplectens strictius ipsum modum indorum, et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens, et quedam etiam ex sub-

I manoscritti che ci tramandano l'opera successiva di Leonardo, la *Pratica geometriae*, la dicono composta nel 1220 o 1221. Il trattato, secondo quanto dichiara l'autore ha lo scopo di essere utile sia ai pratici che agli appassionati delle *subtilitates*. I suoi modelli sono da un lato Erone e gli *Agrimensores,* dall'altro Euclide e Archimede.

Nulla sappiamo dell'attività di Fibonacci nei circa venti anni trascorsi dalla composizione del suo trattato precedente. La *Pratica* non contiene riferimenti autobiografici ed è dedicata ad un certo Maestro Domenico che ne aveva sollecitato la composizione, come si apprende dalla lettera dedicatoria:

> Amico Domenico e venerando maestro mi chiedesti di scrivere per te un libro di geometria pratica: quindi spinto dalla tua amicizia, per soddisfare le tue preghiere, ho pubblicato tale e quale per tuo piacere un'opera che avevo già iniziata ([3]).

La figura di Maestro Domenico è pressoché ignota agli storici. Egli tuttavia è il protagonista dell'altro grande evento nella vita di Leonardo, la sua presentazione all'imperatore Federico II. Questa circostanza suggerisce l'ipotesi che facesse parte della corte imperiale.

Federico II di Svevia (1194-1250), imperatore del Sacro Romano Impero e re di Sicilia, è ricordato non solo per le sue notevoli capacità politiche e militari ma anche come infaticabile promotore delle scienze, della filosofia, delle arti e della letteratura. Animato da un grande desiderio di conoscere e comprendere, Federico II suggeriva e commissionava opere e traduzioni ai più rinomati sapienti dell'epoca. Discuteva delle questioni che più gli stavano a cuore con i numerosi dotti presenti nella sua corte. Intratteneva, infine, un intenso dialogo epistolare con quegli studiosi latini, arabi, greci

tilitatibus euclidis geometrice artis apponens, summam huius libri, quam intelligibilius potui, in XV capitulis distinctam componere laboravi, fere omnia que inserui, certa probatione ostendens, ut extra, perfecto pro ceteris modo, hanc scientiam appetens instruantur, et gens latina de cetero, sic hactenus, absque illa minime inveniatur.

([3]) Rogasti amice Dominice et reverende magister, ut tibi librum in pratica geometriae conscriberem; igitur amicitia tua coactus, tuis precibus conscendens, opus iam dudum inceptum taliter tui gratia edidi.

ed ebrei con i quali non poteva prendere contatto direttamente, [22], [31].

L'incontro di Leonardo con l'imperatore avvenne nel luglio del 1226 a Pisa, dove Federico si era fermato durante un viaggio che lo riportava in Sicilia. Questo avvenimento è ripetutamente ricordato negli scritti successivi di Fibonacci, tutti in qualche modo legati a questo evento, che nella memoria del matematico pisano sembra essere l'unico degno di nota assieme a quello del suo incontro giovanile con il sistema di numerazione indiano.

Leonardo discusse alla presenza di Federico questioni di aritmetica con il filosofo di corte Maestro Giovanni da Palermo, come lui stesso ci riferisce nel *Flos* e nel *Liber quadratorum*, un trattato che ebbe origine proprio dalle questioni discusse in presenza dell'imperatore, dove l'incontro è ricordato così:

> Quando Maestro Domenico a Pisa mi condusse ai piedi di vostra altezza, principe illustrissimo signore F., essendo presente Maestro Giovanni da Palermo, mi propose il problema scritto più sotto appartenente alla geometria non meno che all'aritmetica (4).

Il problema proposto da Maestro Giovanni chiedeva di trovare un numero quadrato tale che aggiungendogli e sottraendogli il numero cinque si ottenesse ancora un numero quadrato. Leonardo trovò che il numero 11+2/3+1/144, quadrato di 3+1/4+1/6, è una soluzione del problema e la comunicò al suo interlocutore. Egli tuttavia continuò a meditare sul problema e più in generale sulle proprietà dei numeri quadrati, pervenendo a una serie di importanti risultati raccolti nel *Liber quadratorum* che dedicò all'imperatore.

L'incontro di Pisa con gli studiosi della corte imperiale dette inizio a un importante scambio di lettere scientifiche fra Fibonacci, l'imperatore e Maestro Giovanni cui si aggiunsero successivamente altri due interlocutori: Maestro Teodoro e Michele Scoto.

Maestro Teodoro è ricordato alla fine del *Liber quadratorum* per

(4) Cum Magister Dominicus pedibus celsitudinis vestre princeps gloriosissime domine F. me Pisis duceret presentandum, occurrens Magister Johannes panormitanus, questionem mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem.

aver posto un quesito sui numeri quadrati ed è anche destinatario di una piccola opera oggi nota proprio come *Epistula ad Magistrum Theodorum* ([5]). In essa vengono risolti alcuni problemi di analisi indeterminata detti problemi degli uccelli perché nelle formulazioni più note riguardano l'acquisto di volatili. Leonardo aveva già presentato alcuni problemi di questo tipo alla fine del capitolo XI del *Liber abaci* ma, per soddisfare le esigenze di un amico che li aveva trovati troppo difficili, aveva elaborato nuovi procedimenti risolutivi dei quali mandò una copia anche a Maestro Teodoro.

Michele Scoto, noto come l'astrologo di corte di Federico II, fu la figura più eminente della vita scientifica della corte imperiale ([6]). Di origine scozzese, soggiornò a lungo a Toledo dove tradusse dall'arabo in latino importanti opere scientifiche e filosofiche. Alla corte di Federico dove arrivò nel 1227, compose alcune opere originali di astrologia e di scienze che ebbero ampia diffusione. Per lui fu composta nel 1228 la seconda edizione del *Liber abaci.*

È probabile che Michele Scoto, giunto alla corte palermitana nel 1227, avesse sentito parlare dei rapporti scientifici che l'Imperatore ed alcuni dei suoi dignitari intrattenevano con Leonardo e, per essere meglio al corrente delle questioni, abbia scritto al matematico pisano per avere una copia del suo trattato. Quest'ultimo decise per l'occasione di apportarvi alcune correzioni, di aggiungere alcuni argomenti che riteneva necessari e di toglierne altri considerati superflui.

Il destinatario di quella che sembra essere l'ultima opera composta da Leonardo, il *Flos*, è un eminente personaggio della curia romana, il Cardinale Ranieri Capocci, diacono della chiesa di Santa Maria in Cosmedin ([7]). Nell'introduzione al piccolo trattato leggiamo che il Cardinale aveva richiesto a Fibonacci una copia delle sue ope-

([5]) Maestro Teodoro, di probabile origine greca, mandato alla corte di Federico dal sultano di Egitto, fece traduzioni dal greco e dall'arabo, compilò anche oroscopi per l'imperatore.

([6]) Egli è così ricordato da Dante Alighieri: «Quell'altro, che ne' fianchi è così poco, /Michele Scotto fu, che veramente/ delle magiche frode seppe il gioco.» *Inferno*, canto XX, versi 115-117.

([7]) È verosimile che il Cardinale avesse avuto notizia del matematico pisano da membri della corte imperiale con la quale era in frequente contatto per motivi diplomatici.

re, e quest'ultimo, oltre a soddisfare la richiesta, aveva composto anche un nuovo trattatello riunendo insieme, *compositum florem*, le soluzioni di alcuni problemi che gli erano stati proposti dall'imperatore e da altri studiosi, e che erano stati oggetto degli scambi epistolari sopra ricordati.

Il trattato si compone di varie parti, la prima delle quali è dedicata alla discussione di uno dei problemi propostigli a Pisa da Maestro Giovanni. Il quesito concerne la risoluzione dell'equazione $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Leonardo ritiene che la risposta possa venire da quanto contenuto nel X libro degli *Elementi* di Euclide del quale offre pertanto una sintesi in chiave aritmetica, passando poi a dimostrare che nessuna delle quindici linee considerate in questo libro possono essere soluzione dell'equazione considerata, ovvero, come diremmo nel linguaggio attuale, che l'equazione non può essere risolta per radicali quadratici. Leonardo fornisce infine un valore approssimato, espresso in gradi sessagesimali, dell'unica soluzione reale positiva dell'equazione senza però specificare il modo con cui l'ha ottenuto. Le altre parti del *Flos* riportano due lettere indirizzate all'Imperatore, solo la parte finale è più specificamente dedicata al Cardinale.

Mentre siamo abbastanza informati sull'attività scientifica di Leonardo, nulla conosciamo del lavoro che svolgeva per vivere. Si può supporre che esercitasse la mercatura, attività per la quale aveva svolto l'apprendistato in gioventù, ma è altrettanto verosimile che si dedicasse all'insegnamento. Nulla esclude infine che esercitasse entrambe le attività. Esempi di mercanti che insegnavano si trovano, infatti, nei secoli successivi.

Qualche informazione sull'attività di Leonardo dopo il suo ritorno in patria ci viene da una delibera del Comune di Pisa, inclusa nelle addizioni del 1241 al *Constitutum Pisanum legis et usus* del 1233. Gli ufficiali del Comune dopo essersi compiaciuti degli alti onori derivati alla città dalla fama scientifica del maestro Leonardo Bigollo, e averne lodato l'opera assidua e competente di consulenza prestata nei confronti degli ufficiali comunali, deliberano di attribuirgli un salario annuo di venti lire di denari affinché prosegua in detta attività. La versione integrale del

documento, trovato da Francesco Bonaini e da lui pubblicato nel 1857, è la seguente:

> Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi Bigolli, in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit, conferuntur; ut eidem Leonardo, merito dilectionis et gratiae, atque scientie sue prerogativa, in recompensationem laboris sui quem substinet in audiendis et consolidandis estimationibus et rationibus supradictis, a Comuni et camerariis publicis, de Comuni et pro Comuni, mercede sive salario suo, annis singulis, libre XX denariorum et amisceria consueta dari debeant (ipseque pisano Comuni et eius officialibus in abbacatione de cetero more solito serviat), presenti costitutione firmamus.

Nel documento Leonardo è indicato con l'appellativo di Bigollo che doveva essere quello con il quale era meglio conosciuto in città e che troviamo anche nell'atto notarile già menzionato e all'inizio del *Flos*: «Incipit Flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus quarundam questionibus».

A questo soprannome fu dato, in passato, da alcuni storici il significato dispregiativo di bighellone. La sua presenza in un documento, dove l'opera sia scientifica che professionale di Leonardo viene altamente apprezzata e ricompensata, toglie ogni valore a questa interpretazione negativa. Ci sembra invece più pertinente il significato di «trottola» che il *Grande Dizionario Italiano* diretto da S. Battaglia attribuisce al sostantivo «bigollo».

Sulla base del documento sopra ricordato, gli storici pongono la morte di Leonardo dopo il 1241, mentre la data di nascita calcolata induttivamente in base a quella di composizione del *Liber abaci* viene posta attorno al 1170.

Se gli elementi biografici relativi a Fibonacci sono scarsi, fortunatamente la sua produzione scientifica ci è giunta quasi integralmente. Oltre alle opere che abbiamo fin qui ricordato: *Liber abaci*, *Liber geometriae*, *Liber quadratorum*, *Flos*, *Epistula ad Magistrum Teodorum*, sembra che Leonardo avesse composto altri due trattati. In un manoscritto del quindicesimo secolo essi sono ricordati come il *Libro di merchaanti detto di minor guisa* e il *Libro so-*

pra il 10° di Euclide ([8]). La prima delle opere sopra citate è menzionata anche da Fibonacci nella *Differentia Sexta* dell'undicesimo capitolo del *Liber abaci* dove si legge: «Est enim alius modo consolandi, quem in *libro minoris guise docuimus*». Di quest'opera che poteva essere una versione ridotta e semplificata del *Liber abaci* e quindi più adatta alla consultazione dei mercanti, non è stata finora trovata traccia e sembra essere definitivamente perduta. Diversa è la situazione del *Libro sopra il 10° di Euclide*. Esso, infatti, scritto in un primo tempo come trattato a sé stante potrebbe essere poi confluito nella seconda redazione del *Liber abaci*, l'unica che ci è pervenuta, nel cui quattordicesimo capitolo figura un'ampia silloge aritmetica del libro euclideo.

L'autorità scientifica di Leonardo rimase viva per diversi secoli. Così per esempio l'anonimo autore della *Praticha d'arismetricha* (ca. 1450) contenuta nel codice Ottoboniano latino 3307 della Biblioteca Vaticana, non solo dichiara in varie parti della sua opera di avere tradotto dal testo di Leonardo, ma ne traccia anche una breve biografia e indica dove si possono consultare le sue opere.

> Anchora abbiamo allegato Lionardo Pisano el quale Lionardo, chome si manifesta nel trattato suo di Praticha d'arismetricha, fu dal suo padre tirato a ssé, che era scrittore nella ghabella di doghana di Bruggia. E, quindi, in Egitto et Chaldea et India, navighando et per alchuno tempo riposandosi, usò le schuole loro; e in tanta perfectione venne che fu quello che diè lume al mostrare questa praticha in Italia. … E truovasi di luj molti librj de' qualj quellj che ò veduti, sono questi, cioè: la Praticha d'arismetricha intitolata a Michele Scoto, e la Praticha di geometria intitolata a messer ⟨*spazio bianco*⟩, e il Fioretto intitolato a ⟨*spazio bianco*⟩, e anchora el Libro de' numerj quadrati intitolato a ⟨*spazio bianco*⟩; e bene che chonponessi altrj librj è quali non ò veduti. E sono queste opere in Santo Spirito e in Santa Maria Novella, e anchora nella Badia di Firenze e in particularità l'ànno molti nostri cittadinj.

Anche Maestro Benedetto da Firenze, autore di una *Pratica d'arismetricha* (1463) che si può ritenere il miglior compendio delle

([8]) Vedi ms. Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze, c. 433v.

matematiche d'abaco attualmente noto ([9]), presenta la traduzione di numerose parti del *Liber abaci* e quella integrale del *Liber quadratorum*, e nell'incipit dichiara di aver «*tratto di Lionardo Pisano e d'altri auctorj*» (Fig. 2).

Il nome di Leonardo è anche tra quelli citati da Luca Pacioli all'inizio della *Summa de arithmetica proportioni et proportionalità* (1494), tuttavia dalla lettura dell'opera non sembra che l'autore abbia avuto conoscenza diretta del *Liber abaci.*

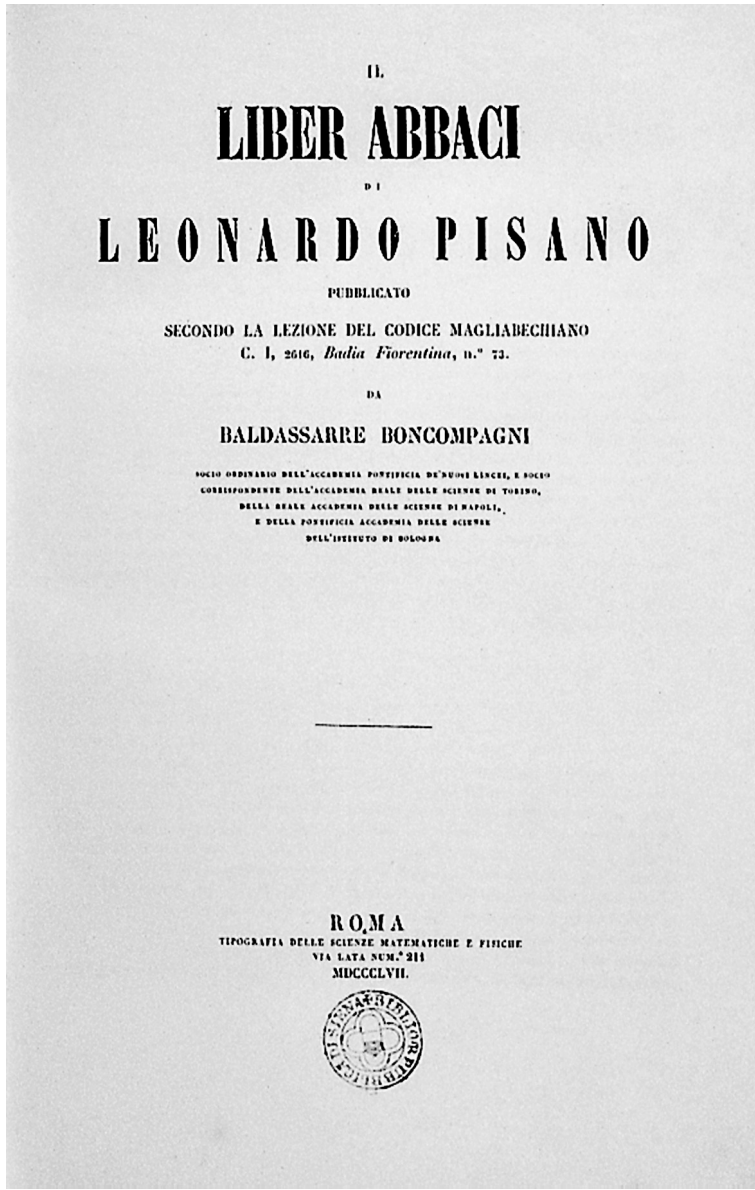
Le opere di Leonardo dopo un primo periodo in cui furono studiate e trascritte vennero progressivamente dimenticate. La loro memoria rimase legata solo alle citazioni che ne venivano fatte in alcuni trattati a stampa del sedicesimo secolo. Fu soltanto alla fine del diciottesimo secolo che lo storico della matematica Pietro Cossali, nel corso delle sue ricerche bibliografiche per la composizione di una storia dell'algebra, [10], rinvenne alcuni manoscritti contenenti il *Liber abaci* che gli permisero di datare correttamente l'opera che allora alcuni studiosi ascrivevano agli inizi del quindicesimo secolo. Cossali tuttavia non riuscì a trovare copia del *Liber quadratorum* del quale aveva trovato esplicita menzione nella *Summa* di Luca Pacioli. Risultate vane le sue ricerche, egli ne tentò una ricostruzione sulla base delle informazioni di Pacioli.

Qualche decennio dopo Guglielmo Libri nella sua *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* dichiarava che è Leonardo colui al quale «nous devons la connaissance de l'algèbre, c'est lui qui a introduit ou au moins répandu chez le Chrétiens, le système arithmétique des Hindous» ([17], 2, p. 20). Libri, a sostegno delle sue affermazioni, pubblicava la trascrizione dell'intero capitolo quindicesimo del *Liber abaci*, quello dedicato all'algebra ([17], 2, pp. 307-346).

Grande interesse all'opera di Leonardo manifestò anche lo storico della matematica Baldassarre Boncompagni che nel 1853, nella Biblioteca Ambrosiana di Milano nel codice E 75 P. sup. trovò non solo l'originale latino del *Liber quadratorum* ma anche quelli del *Flos* e della *Epistula ad Magistrum Teodorum* dei quali all'epoca si

([9]) Il manoscritto più completo di quest'opera è conservato nella Biblioteca Comunale degli Intronati di Siena con la segnatura L. IV. 21.

Fig. 2. – Pagina iniziale della *Praticha d'arismetrica* di Maestro Benedetto dal manoscritto L.IV.21 della Biblioteca Comunale degli Intronati di Siena. Nelle prime righe vergate in inchiostro rosso si legge: «Inchomincia ... del trattato di praticha d'arismetrica tratto da libri di lionardo pisano e d'altrj auctorj. Conpilato da .b. a uno suo charo amicho negl'annj di Xp0 Mcccc° Lxiii».



II.

LIBER ABBACI

DI

LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO
C. I, 2616, *Badia Fiorentina*, n.° 73.

DA

BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI, E SOCIO
CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO,
DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
VIA LATA NUM.° 211
MDCCCLVII.

Fig. 3. – Frontespizio dell'edizione a stampa del *Liber abaci.*

era persa la memoria. Li pubblicò l'anno successivo, [7]. Sempre nel 1854 Boncompagni raccolse in un volume alcuni suoi studi sulle opere di Leonardo già apparsi negli Atti dell'Accademia Pontificia dei

Nuovi Lincei, [6], cui fece seguito nel 1857 il primo volume degli scritti contenente il *Liber abaci* (Fig. 3) e nel 1862 il secondo con la *Pratica geometriae* e di nuovo i tre opuscoli da lui rinvenuti, [8].

La pubblicazione delle opere di Leonardo attirò l'attenzione di alcuni matematici tra cui ricordiamo: A. Genocchi, E. Lucas, O. Terquem, F. Woepke che concentrarono in particolare i loro studi sul *Liber quadratorum* mettendone in evidenza l'originalità e la profondità dei risultati.

In quegli stessi anni la figura di Leonardo attrasse anche l'attenzione dei pubblici amministratori toscani. Nel 1859 il governo toscano, presidente del consiglio Bettino Ricasoli, decretò che fosse commissionata una «statua di Leonardo Fibonacci instauratore degli studi algebrici in Europa, da erigersi in Pisa». La statua eseguita dallo scultore fiorentino Paganucci fu collocata nel Cimitero monumentale. Spostata successivamente davanti ai Banchi rivolta verso il Ponte di Mezzo, fu danneggiata durante la seconda guerra mondiale. Restaurata fu sistemata nel Giardino Scotto. Da pochi anni è tornata nella sua collocazione originale. È invece rimasta sempre al suo posto la lapide nella quale è riprodotto il testo del *Costitutum* del 1233 e che fu fatta murare nel 1865 nella sede dell'Archivio di Stato di Pisa.

Il *Liber abaci*.

Leonardo negli opuscoli si riferisce più volte a un suo *Liber de numero* o *Liber maior de numero*. La tradizione manoscritta ci ha consegnato un grosso trattato di aritmetica pratica e algebra scritto in latino e intitolato *Liber abaci*. Baldassarre Boncompagni ha inequivocabilmente dimostrato che i due diversi titoli si riferiscono ad un'unica opera per la quale è prevalsa la seconda denominazione, [6]. Credo che un lettore moderno dopo aver preso visione del suo contenuto preferirebbe il titolo con cui lo designava il suo autore. Per noi, infatti, la parola *abaco* rievoca solo quegli strumenti di varie fogge usati, in varie epoche e in vari luoghi, per eseguire i calcoli aritmetici. Questo vocabolo però ai tempi di Fibonacci aveva un valore semantico più ampio. Oltre ad indicare il particolare strumento di

calcolo in uso all'epoca, cioè l'abaco a tavoletta di derivazione greco-romana, denotava anche l'insieme delle operazioni contabili connesse con l'esercizio del commercio. Questo secondo significato ovviamente derivava ed era strettamente connesso al primo, essendo l'abaco lo strumento allora usato per eseguire i calcoli.

La mancata conoscenza di questa accezione più ampia del vocabolo «abaco» ha indotto alcuni storici a giudicare sbagliato e fuorviante il titolo del trattato. Per esempio C.B. Boyer, autore di una delle storie della matematica attualmente più diffuse in Italia, asserisce che il trattato di Fibonacci «ha un titolo inesatto», ([4], p. 296). Tale affermazione è errata. Il lettore cui era rivolto il *Liber abaci*, infatti, comprendeva senza equivoci che si trattava di un testo legato alla contabilità commerciale. A questo proposito ricordo che nel documento con cui il Comune di Pisa conferiva uno stipendio a Leonardo ci si riferisce ad «abbacandis estimationibus», che nel caso in questione sono quasi certamente operazioni di revisione dei bilanci pubblici.

Il *Liber abaci* nell'edizione a stampa occupa 439 pagine, non è quindi facile rendere conto in breve del suo contenuto. Mi limiterò perciò a illustrare in modo più esteso quelle parti che hanno maggiormente influito sullo sviluppo successivo della matematica.

L'obiettivo del trattato, enunciato esplicitamente dall'autore nell'introduzione, è quello di portare a conoscenza della *gens latina* le cifre indoarabiche, della cui superiorità nell'eseguire i calcoli rispetto ai metodi allora in uso nel mondo occidentale Leonardo era convinto assertore. Per raggiungere il suo scopo Fibonacci dichiara di voler esporre in modo sistematico quanto aveva appreso in numerosi anni di studio e di colloqui con sapienti di tutti i paesi visitati, fornendo non solo i risultati ma anche le dimostrazioni.

L'opera è divisa in quindici capitoli, i titoli dei quali, elencati dall'autore medesimo subito dopo l'introduzione, sono i seguenti:

1. Le nove cifre indiane; come si calcoli per mezzo di esse. Quali numeri ed in qual modo si possono rappresentare con le mani. Introduzione all'Abaco.
2. Moltiplicazione dei numeri interi.
3. Addizione dei numeri interi.
4. Sottrazione di numeri da numeri maggiori.

5. Divisione di numeri interi per altri.
6. Moltiplicazione di numeri interi per frazioni.
7. Addizione, sottrazione e divisione di numeri interi e frazioni. Scomposizione di interi in parti.
8. Acquisto e vendita di cose venali e simili.
9. Baratti di cose venali, acquisto di bolsonalie ([10]) e altre regole simili.
10. Società fatte fra consoci.
11. Miscuglio di monete e regole simili.
12. Soluzione di questioni dette «erraticas».
13. Regola «elcataym» ([11]), come per essa si possono risolvere quasi tutte le «erraticas questiones».
14. Determinazione delle radici quadratiche e cubiche mediante moltiplicazioni e divisioni, ossia estrazione di esse. Trattato dei binomi e dei recisi e delle loro radici.
15. Regole relative alle proporzioni geometriche. Questioni di algebra e almuchabala.

I primi sette capitoli, che nell'edizione a stampa occupano ottantadue pagine, sono dedicati alla presentazione del nuovo sistema di numerazione e dei relativi algoritmi per eseguire le quattro operazioni aritmetiche.

Leggiamo direttamente, in traduzione italiana, come Leonardo introduce le cifre indiane ([12]).

Le nove figure degli Indiani sono queste

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Pertanto con queste nove figure, e con questo segno 0, che gli Arabi chiamano zefiro, sarà scritto qualunque numero, come sarà mostrato più sotto. Infatti il numero è una raccolta o un aggregato di unità, che per i suoi gradi cresce all'infinito. Fra i quali il primo è formato dalle unità, che sono da uno fino a dieci. Il secondo dalle decine che sono da dieci fino a cento. Il terzo dalle centinaia che sono da cento fino a mille. Il quarto dalle migliaia che sono da mille a diecimila, e così la sequenza dei gradi all'infinito, ciascuno consta del decuplo del suo antecedente. Nella scrittura dei numeri il primo grado comincia da destra. Il secondo invero, segue il primo verso sinistra. Il

([10]) Si tratta di un tipo di monete.
([11]) Si tratta della Regola di doppia falsa posizione.
([12]) Per lasciare al lettore il gusto dello stile espositivo dell'autore si è optato per una traduzione molto letterale.

terzo segue il secondo. Il quarto il terzo, e il quinto il quarto, e sempre così verso sinistra un grado segue un grado. Pertanto la figura che si trova nel primo grado rappresenta se stessa, cioè se nel primo grado ci sarà la figura dell'uno essa rappresenta uno; se quella del due, due; se quella del tre, tre; e così nell'ordine che seguiranno fino a nove. Anche nel secondo grado ci saranno nove figure ed esse rappresentano tante decine quante nel primo unità, cioè se la figura dell'uno occupa il secondo grado denota dieci, se due venti, se tre trenta, se nove novanta. La figura poi che sarà nel terzo grado indica tante centinaia .... La stessa pertanto che sarà nel quarto grado denota tante migliaia .... E affinché quello che è stato detto finora risulti più chiaro, lo stesso mostreremo con figure. Se la figura del sette fosse nel primo grado e quella del tre nel secondo, entrambe insieme danno 37, ovvero al contrario: se la figura del tre è nel primo e quella del sette nel secondo, denoteranno 73. ... Se poi vorrai scrivere settanta, poni nel primo grado 0, e dopo di esso poni la figura del sette così: 70. ...

Il testo prosegue illustrando la scrittura di numeri sempre più grandi, l'ultimo esempio considerato è relativo ad un numero con quindici cifre. Il capitolo termina con una tavola comparativa di numeri scritti nei due sistemi romano e indiano (Fig. 4).

Prima di esporre gli algoritmi per eseguire le operazioni aritmetiche fra interi, Leonardo richiama un modo per rappresentare i numeri con le mani in uso da lungo tempo fra i mercanti (Fig. 5), e presenta una tavola in cui sono scritte le tabelline della moltiplicazione da 2 a 10 e quelle dell'addizione delle unità da 1 a 9 e delle decine da 10 a 90.

La prima delle operazioni aritmetiche illustrate è la moltiplicazione. Dopo aver insegnato a moltiplicare un numero di più cifre per uno ad una cifra Leonardo passa ad esporre una *regola universale*. La regola che nei secoli successivi fu detta «moltiplicazione in croce o a crocetta», è esposta dapprima teoricamente cominciando con numeri di due cifre, poi di tre, quattro e più cifre. Numerosi sono gli esempi che seguono ogni enunciazione teorica. Questo metodo, ormai da lungo tempo dimenticato, non richiede l'esecuzione di addizioni ausiliarie e offre immediatamente il risultato, tutti i calcoli intermedi vengono, infatti, eseguiti mentalmente ([13]).

([13]) Per l'illustrazione di questo metodo vedi p.e. [15], p. 43.

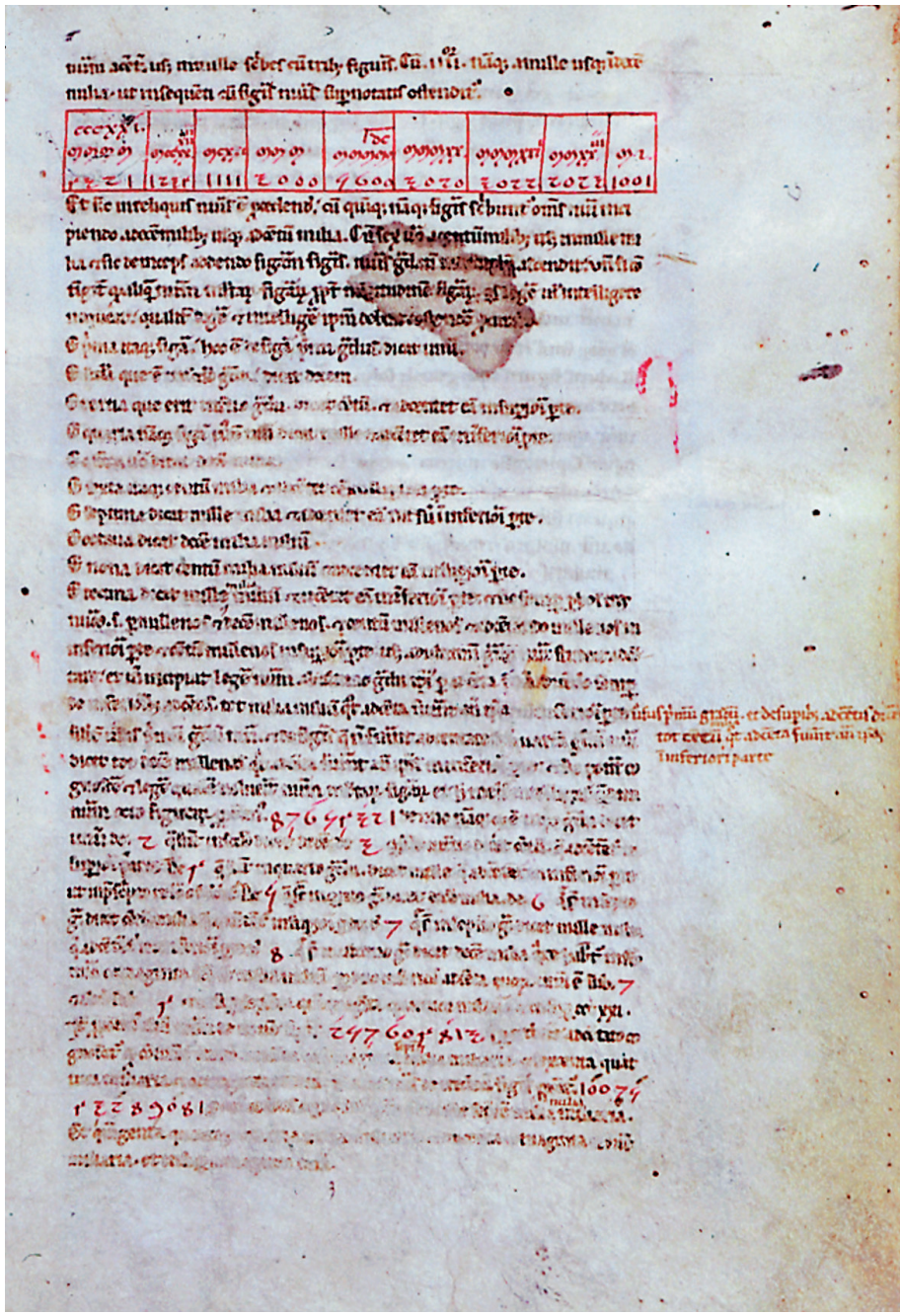


Fig. 4. – Carta 2 recto del manoscritto L.IV.20. Si noti all'inizio della pagina la tabella di conversione tra numeri romani e numeri indiani.

Fig. 5. – Carta 3 recto del manoscritto L.IV.20 che illustra «quali numeri e in che modo si possono rappresentare con le mani». Nella prima colonna sono rappresentate le unità, nelle altre, nell'ordine, le decine, le centinaia e le migliaia.

Gli schemi presentati per eseguire l'addizione e la sottrazione sono quelli attualmente in uso salvo che il risultato è scritto in alto. Grande cura è impiegata nell'insegnare a mettere in colonna, concetto del tutto

nuovo e ovviamente legato alla posizionalità del sistema introdotto. Leonardo presenta anche, mediante un solo esempio, un altro metodo per eseguire la moltiplicazione che, tranne una diversa disposizione dei numeri, coincide con quello attualmente in uso.

Ampio spazio è infine dedicato all'algoritmo della divisione che assieme alla moltiplicazione sono le operazioni più difficili da eseguire con l'abaco. Dopo aver insegnato a dividere un numero di più cifre per uno ad una cifra, Leonardo espone un metodo generale che illustra tramite alcuni esempi. Il metodo differisce da quello attuale principalmente per la diversa disposizione dei numeri e per il modo di calcolare i resti.

In ogni caso gli esempi sono completamente elaborati fin nei minimi dettagli. I risultati sono verificati mediante le prove per 9, 7 o 11. Non ci deve stupire la cura e l'ampio spazio dedicato a questo argomento, esso infatti costituiva un'assoluta novità per i suoi lettori.

Nella parte dedicata alle frazioni, che sono rappresentate secondo l'uso attuale, è introdotto anche il concetto di minimo comune multiplo di più numeri interi e sono inserite alcune tavole di conti già fatti, tra le quali merita di essere ricordata la *Tabula disgregationis* che presenta la decomposizione di numerose frazioni nella somma di frazioni unitarie, le cosiddette frazioni egiziane, delle quali Leonardo fa largo uso.

Dopo aver presentato quella che ritiene una perfetta e meravigliosa macchina per il calcolo, Fibonacci ne mostra l'utilità pratica applicandola alla risoluzione delle questioni che più spesso intervengono nell'esercizio della mercatura. La trattazione si apre con la presentazione della *Regola del tre*, strumento universale per la risoluzione di tutte le questioni che saranno trattate: «In tutte le operazioni commerciali si trovano sempre quattro numeri proporzionali, tre dei quali sono noti, il rimanente è ignoto» ([14]).

Segue la presentazione di numerosi problemi relativi al calcolo dei prezzi delle merci, dei guadagni, degli interessi e sconti, dei cambi fra monete diverse; al computo delle operazioni di scambio

([14]) In omnibus itaque negotiationibus quattuor numeri proportionales semper reperiuntur, ex quibus tres sunt noti, reliquus vero est ignotus.

delle merci (baratti) e quello degli utili o perdite delle società. In questa parte, che costituisce un vero e proprio manuale di ragioneria commerciale, ogni problema è interamente svolto e tutti calcoli sono eseguiti fin nei minimi dettagli ([15]).

I capitoli dodicesimo e tredicesimo, che nell'edizione a stampa occupano le pagine dalla 166 alla 351, costituiscono la parte più estesa del trattato e presentano problemi di vario tipo che l'autore chiama *questiones erratice* volendo forse significare che esse non si riconducono ad una sola regola risolutiva, anche se molte di esse sono risolte con il metodo di semplice e doppia falsa posizione. La maggior parte delle questioni sono del tipo attualmente indicato come «matematica ricreativa», ma che richiedono comunque l'uso di strumenti matematici anche non banali per la loro risoluzione ([16]).

Prima di passare alla descrizione della parte finale del trattato, è importante sottolineare alcune caratteristiche formali comuni a tutta la trattatistica matematica dell'epoca, ma insolite e curiose per un lettore moderno. Tutti i procedimenti aritmetici e algebrici presentati sono descritti interamente e minuziosamente a parole; gli unici simboli matematici che appaiono nel testo sono quelli per i numeri. Solo nei margini delle pagine, più sistematicamente nella parte dedicata al calcolo aritmetico, in modo occasionale altrove, compaiono schemi di calcoli, tuttavia anche qui cercheremmo invano simboli come $+$, $-$, $\times$, $:$, $=$. Questi segni infatti furono introdotti e divennero di uso comune solo alcuni secoli più tardi.

Un'altra caratteristica stilistica peculiare dell'epoca è la presentazione della risoluzione completamente elaborata di ogni problema subito dopo l'enunciato.

Gli ultimi due capitoli del trattato, che assieme ai primi sono quelli che hanno influito maggiormente sullo sviluppo successivo della matematica, costituiscono nel loro insieme quello che si può considerare il primo trattato d'algebra scritto in lingua latina.

Il capitolo XIV, dedicato al calcolo dei radicali, inizia con la presen-

([15]) Il complesso delle operazioni commerciali dell'epoca è illustrato in [15], pp. 74-99.

([16]) Per una descrizione sintetica ma accurata di questa parte si può vedere [33].

tazione di sei identità aritmetiche che l'autore chiama «chiavi» e che sono la trascrizione aritmetica delle prime sei proposizioni del secondo libro degli *Elementi* di Euclide, ai quali Leonardo rimanda per le dimostrazioni. Di notevole interesse è l'annotazione in cui Fibonacci rileva che alle ultime due identità, quelle corrispondenti alle proposizioni 5 e 6 del testo euclideo, «si riconducono tutte le questioni che sono nell'algebra e almucabala» rivelando così una piena consapevolezza dei legami fra la nuova disciplina l'algebra, che presenterà alla fine del capitolo, e la geometria euclidea. È noto infatti che le proposizioni 5.II e 6.II degli *Elementi* erano usate dai matematici greci per risolvere problemi che successivamente, dopo l'avvento dell'algebra, furono ricondotti alla risoluzione di equazioni di secondo grado. Proprio per questo motivo lo storico della matematica H.G. Zeuthen definì il secondo libro degli *Elementi* come quello dell'*algebra geometrica.*

Il capitolo procede con la presentazione di un algoritmo per il calcolo della radice quadrata e di regole di calcolo per radicali quadratici, e una trasposizione aritmetica di gran parte dei risultati del libro X degli *Elementi*. La parte finale illustra un algoritmo per l'estrazione della radice cubica e alcune regole di calcolo per radicali cubici.

Tutte le regole presentate sono corredate da dimostrazioni geometriche in stile euclideo dove i numeri sono rappresentati con segmenti denotati, a seconda dei casi, con una o due lettere.

Il capitolo finale, il quindicesimo, si articola in tre parti, la prima delle quali è rivolta alla risoluzione di questioni «de proportionibus trium et quattuor quantitatum». La seconda presenta problemi relativi ad applicazioni del teorema di Pitagora e al calcolo del volume di corpi solidi. La terza infine, intitolata *De solutione quarundam questionum secundum modum algebre et almuchabale*, è un trattato d'algebra pressoché indipendente da tutto quanto precede (Fig. 6). Esso è diviso in due parti. Nella prima sono definiti i termini primitivi dell'algebra: il numero semplice (*numerus simplex*), la radice (*radix*), cioè l'incognita, e il suo quadrato (*census*), che sono «agguagliati» in sei modi, tre semplici e tre composti, dando luogo alle sei equazioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} ax = b & ax^2 = bx & ax^2 = b \\ ax^2 = bx + c & ax^2 = c + bx & ax^2 + c = bx\,, \end{array}$$

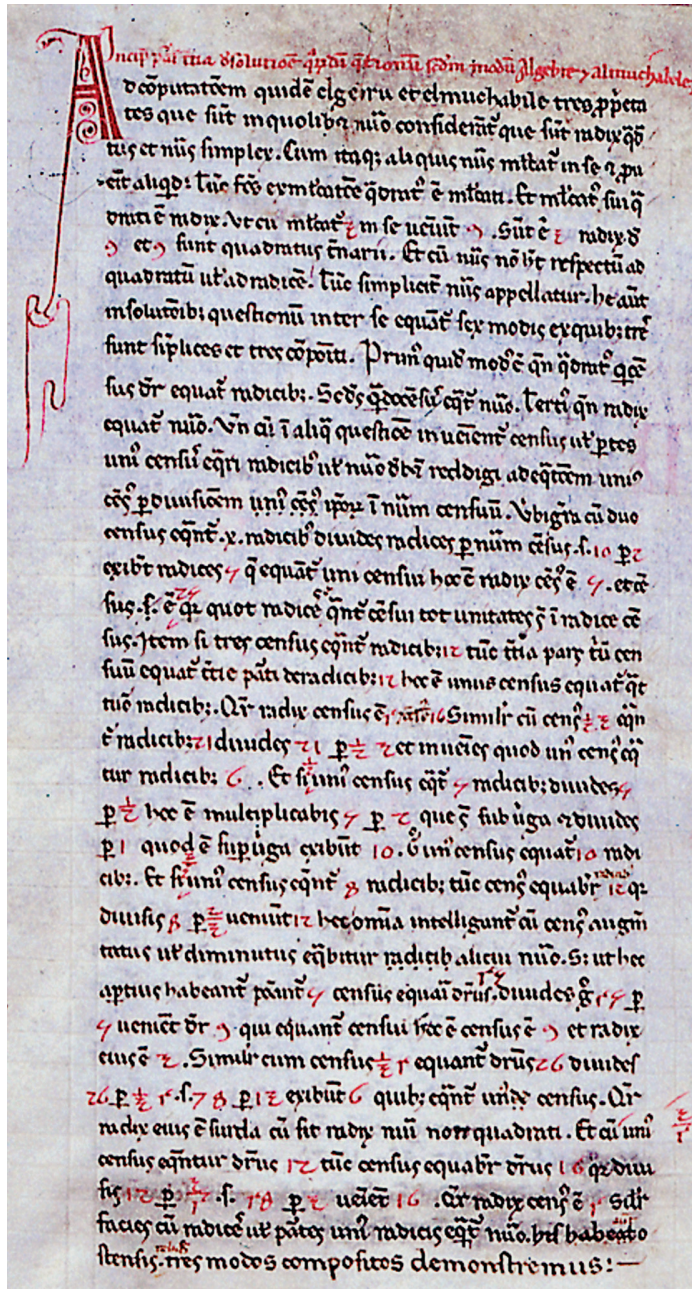


Fig. 6. – Carta 209 verso del manoscritto L.IV.20 contenente l'inizio del trattato d'algebra. Nella prima riga si legge: «Incipit pars tertia de solutione quarundam questionum secundum modum algebre et almuchabale».

che Fibonacci però, secondo il suo stile, enuncia verbalmente. È poi presentato per ciascuna di esse l'algoritmo di risoluzione corredato, per quelle di secondo grado, da giustificazioni geometriche. In questa parte Leonardo segue fedelmente il modello introdotto dal matematico arabo Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi nel suo trattato, il più antico dedicato all'algebra oggi noto, [29]. Nella seconda parte del XV capitolo sono proposti e risolti un centinaio di problemi che si riallacciano all'una o all'altra delle sei equazioni sopra elencate e che sono tratti sia dal testo di al-Khwarizmi che da quelli successivi di Abu Kamil e al-Karagi.

Il *Liber abaci* era ed è un testo complesso e difficile del quale manca a tutt'oggi un'edizione critica, una traduzione in una lingua moderna e un'analisi completa e approfondita. Anche la sua dipendenza dalle fonti arabe non è stata ancora sufficientemente indagata ([17]).

Anche se non siamo in grado di stabilire con esattezza quali sono gli apporti originali di Fibonacci agli argomenti trattati, si può comunque valutare la loro scelta e il modo con il quale essi sono presentati. L'analisi di questi elementi mostra una maturità scientifica ed una padronanza della materia che ci induce a condividere il giudizio di Kurt Vogel, [33], che considera Leonardo il primo grande matematico dell'Occidente cristiano.

L'eredità del *Liber abaci*.

Una valutazione del ruolo del *Liber abaci* nello sviluppo della matematica occidentale è possibile solo sullo sfondo della cultura e della trattatistica dell'epoca.

La caduta dell'Impero romano d'Occidente (476 d.C.) fu seguita da un lungo periodo di decadenza culturale, durante il quale furono dimenticate la maggior parte delle opere letterarie e scientifiche della cultura classica greca e romana. Solo in pochi monasteri era impartita un'istruzione elementare ed erano ricopiati alcuni testi del

([17]) Analisi parziali della dipendenza delle opere di Leonardo da fonti arabe si possono trovare in [1], [28].

periodo classico, dei quali peraltro non si comprendeva quasi più il significato.

Nei secoli dal VII al IX l'insegnamento si svolgeva nei monasteri ed era rivolto ai chierici. Lo schema sul quale era modellata l'istruzione era ancora quello di derivazione greco-romana fondato sulle sette arti liberali: grammatica, retorica, logica, *trivium*, e geometria, aritmetica, astronomia, musica, *quadrivium.* I contenuti erano tuttavia sempre più scarsi, si insegnavano infatti solo le nozioni strettamente necessarie alla comprensione delle sacre scritture e all'esercizio del culto. L'insegnamento della matematica era limitato al far di conto con le dita e con l'abaco e a poche nozioni sulle proporzioni numeriche legate all'insegnamento della musica, alla quale si dava un grande rilevo per ovvi motivi connessi alle funzioni religiose. Grande importanza assumeva anche il *computus*, cioè il calcolo della data della Pasqua.

Neppure il risveglio di interesse verso l'istruzione provocato dalla rinascita carolingia (sec. IX) portò grandi mutamenti nell'insegnamento della matematica. L'unico risultato importante e duraturo di questa riforma scolastica fu l'istituzione delle scuole presso le cattedrali, che ebbe il merito di portare l'istruzione fuori dei conventi e più vicino ai cittadini.

La trattatistica matematica rispecchia pienamente il quadro culturale appena delineato. Venivano compilati compendi sempre più scarni delle discipline del quadrivio, in cui la parte aritmetica era modellata sul trattato omonimo di Boezio (V-VI sec.), che a sua volta era una libera traduzione dell'*Introduzione all'aritmetica* di Nicomaco di Gerasa (I-II sec.). La parte dedicata alla geometria consisteva nella enunciazione di alcune proposizioni dei primi libri degli *Elementi* di Euclide alle quali si aggiungevano alcune formule approssimate per il calcolo delle aree derivate dalla pratica degli agrimensori. Venivano composti anche piccoli trattati dedicati al *computus,* e raccolte di problemi, la più nota delle quali le *Propositiones ad acuendos juvenes*, è attribuita ad Alcuino di York, uno dei maggiori artefici dell'opera di scolarizzazione voluta da Carlomagno, [13]. La lettura di questa operetta ci fornisce un'idea

molto realistica del livello della cultura matematica dell'epoca ([18]).

Mentre in Occidente la cultura raggiungeva i suoi livelli più bassi, in Oriente presso i popoli di lingua araba essa conosceva un'importante fioritura. La rinascita iniziata a Bagdad nella metà dell'ottavo secolo, si estese successivamente a tutta l'Africa settentrionale, alla Sicilia e alla Spagna. Gli Arabi tradussero, studiarono e commentarono le principali opere scientifiche e filosofiche della Grecia classica, e contemporaneamente ebbero scambi culturali con i vicini Indiani dai quali mutuarono importanti nozioni aritmetiche e astronomiche.

Nel corso del XII secolo l'intensificarsi delle relazioni tra Occidente e Oriente portò a un incontro diretto fra le due civiltà: la Sicilia e la Spagna furono i primi punti di contatto fra le due culture. In particolare dopo il 1085, anno in cui i Cristiani conquistarono Toledo, numerosi studiosi di lingua latina si recarono in questa città dove esisteva un'importante biblioteca, per tradurre, con l'aiuto di interpreti ebrei, testi filosofici e scientifici dalla lingua araba in latino. Fu così che vennero immessi nel circuito culturale occidentale sia trattati greci dei quali in Occidente si era persa la memoria, sia testi prodotti dalla recente cultura araba. Tra i primi ricordiamo le opere filosofiche di Aristotele, gli *Elementi* di Euclide, l'*Almagesto* di Tolomeo, fra i secondi i trattati di aritmetica e di algebra di al-Khwarizmi. Questi ultimi sono particolarmente importanti, uno, infatti, è il primo testo arabo in cui viene presentato il sistema posizionale indiano, l'altro è il primo trattato d'algebra oggi noto, tanto che il suo autore viene considerato il fondatore di questa disciplina.

L'attività di Fibonacci si distingue nettamente da quella dei traduttori che si limitavano a volgere in lingua latina un trattato del quale forse non comprendevano interamente il contenuto. Leonardo invece compose la sua opera dopo lunghi anni di studio e discussioni con esperti, scegliendo e organizzando la materia secondo un suo disegno personale.

Il *Liber abaci* anche se non fu il primo trattato in lingua latina a

([18]) L'opera è facilmente reperibile nella traduzione in inglese pubblicata in *The Mathematical Gazzette*, **76** (1992), 102-126.

divulgare il sistema di numerazione indiano, fu sicuramente quello che maggiormente contribuì alla sua diffusione in Occidente. Le traduzioni latine dell'aritmetica di al-Khwarizmi che lo avevano preceduto di qualche decennio, infatti, circolarono in una cerchia assai ristretta di studiosi, mentre il trattato di Leonardo dove la descrizione del nuovo sistema di numerazione è legata alla risoluzione di problemi commerciali risvegliò l'interesse di un più ampio pubblico.

Nel XII secolo il commercio aveva raggiunto uno sviluppo tale che per esercitarlo era necessario saper leggere, scrivere e far di conto con estrema abilità. In un primo tempo la domanda di istruzione della classe mercantile fu soddisfatta dalle scuole capitolari ecclesiastiche, successivamente furono i comuni a organizzare l'insegnamento.

Non sappiamo con certezza quando le scuole pubbliche sostituirono quelle religiose, probabilmente questo avvenne in tempi diversi nelle varie città. È noto però che agli inizi del XIV secolo la maggior parte dei comuni italiani del centro e del nord avevano istituito scuole pubbliche dove l'insegnamento era articolato su due livelli: il primo, *scuola di grammatica*, dedicato all'insegnamento della lettura e della scrittura, il secondo, *scuola d'abaco*, riservato al far di conto e alle tecniche commerciali. È altresì noto che nello stesso periodo nelle scuole d'abaco veniva insegnato il calcolo secondo il metodo degli indiani, così come suggerito da Fibonacci, [11]. Non ci sono però documenti per stabilire quando sia avvenuto il passaggio dal vecchio sistema di calcolo basato sull'uso dell'abaco e dei numeri romani, al nuovo. Si può solo formulare l'ipotesi che Leonardo stesso abbia insegnato a Pisa il nuovo modo e di qui esso si sia diffuso in Toscana e nel resto d'Italia. Vi sono documenti che testimoniano come nei primi anni del Trecento vi fossero maestri d'abaco toscani che insegnavano in alcune città dell'Italia settentrionale.

La diffusione dell'insegnamento delle cifre indoarabiche e delle relative tecniche di calcolo fu accompagnata dalla compilazione di testi variamente intitolati che attualmente gli storici della matematica chiamano *Trattati d'abaco*. Questi pur traendo ispirazione dal *Liber abaci* erano di solito meno voluminosi, più elementari e scritti nella lingua volgare parlata. Il più antico trattato d'abaco che ci è

pervenuto risale al 1290 circa ed è intitolato *Livero de l'abbecho secondo la oppenione de maiestro Leonardo de la chasa degli figliuogle Bonaçie da Pisa*, [21].

La diffusione e l'importanza dei trattati d'abaco sono testimoniate non solo dal notevole numero che ne rimane ancor oggi, circa trecento ([19]), ma anche dal fatto che il primo testo di matematica ad essere stampato in Italia fu proprio un trattato d'abaco, la cosiddetta *Aritmetica di Treviso*, di autore anonimo, pubblicata a Treviso nel 1478. La maggior parte di questi trattati tuttavia rimase inedita e il ricordo di un'attività eccezionale e unica in Europa andò in gran parte disperso, quello che ne restava rimase per secoli sepolto nel fondo delle biblioteche. Tutto restò affidato a quanto riportato nella *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* di Luca Pacioli, pubblicata a Venezia nel 1494 e ristampata nel 1523.

A seguito della diffusione dell'insegnamento del *Liber abaci* si venne a creare una classe di insegnanti-trattatisti, *i maestri d'abaco*, che possono essere considerati i primi matematici professionisti dell'Occidente, poiché essi derivavano il loro sostentamento interamente dalle loro capacità matematiche. Il loro status sociale ed economico era paragonabile a quello dei piccoli commercianti ed artigiani. La qualità intellettuale di alcuni di essi era però così elevata che possono essere considerati matematici nel senso che si dà attualmente a questa parola. Alcuni di essi, infatti, non si limitarono a riproporre problemi o regole già note, ma apportarono contributi originali che riguardano principalmente lo sviluppo degli algoritmi per eseguire le operazioni aritmetiche e l'algebra.

Abbiamo visto come i modi per eseguire la moltiplicazione e la divisione presentati nel *Liber abaci* differiscano da quelli attualmente in uso. Questi ultimi furono elaborati dai maestri d'abaco che nel corso dei secoli XIV e XV ne svilupparono parecchi fino a pervenire a quelli attuali, che con il tempo vennero considerati i più convenienti, forse per la maggior compattezza dei loro schemi.

L'algebra è comunque il campo in cui gli abachisti dettero i loro

([19]) Un loro elenco e una sommaria descrizione del contenuto si può trovare in [32].

contributi più originali. Essa entrò a far parte dell'insegnamento dell'abaco proprio perché le è dedicato un ampio capitolo nel *Liber abaci*. Il suo insegnamento era comunque riservato agli allievi più dotati, la buona conoscenza di questa materia era altresì segno di distinzione fra i maestri d'abaco.

La ricostruzione dell'evoluzione di questa disciplina nei secoli dal tredicesimo al quindicesimo è possibile solo attraverso la lettura dei capitoli ad essa dedicati nei trattati d'abaco, [16]. Vediamo così come l'attenzione degli abachisti si sposti precocemente dalla risoluzione delle equazioni di secondo grado contenute nel *Liber abaci*, a quelle di terzo e quarto grado. Già nella prima trattazione in lingua volgare dell'algebra, contenuta nel *Tractatus algorismi*, scritto a Montpellier nel 1307 da Jacopo da Firenze, vengono proposte e risolte equazioni di terzo e quarto grado tutte riconducibili a equazioni di secondo grado, come per esempio $ax^3 + bx^2 = cx$, $ax^4 + bx^3 = bx^2$, $ax^4 = bx^2 + c$ etc.. I tentativi di risoluzione di equazioni di terzo e quarto grado proseguono per tutto il XIV secolo anche se con scarsi risultati. Talora, infatti, le soluzioni proposte sono sbagliate, altre volte si tratta di risoluzioni che riguardano solo casi particolari. Durante il XV secolo l'attività degli abachisti sembra concentrarsi più sulla applicazione dello strumento algebrico alla risoluzione di problemi. Anche in questo periodo però la questione della risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo resta sempre sullo sfondo, come appare chiaro dalla lettura della *Summa* di Luca Pacioli, il quale conclude il capitolo dedicato all'algebra osservando che fino ad allora non si erano potute trovare regole generali di risoluzione per le equazioni del tipo $x^3 + px + q = 0$, ma esprimendo la convinzione che il caso potrebbe essere possibile anche se ancora non si era trovato il modo di risolverlo a causa della «improporzionalità» fra i termini che lo rende difficile. La difficoltà fu finalmente superata, circa venti anni dopo, da Scipione dal Ferro di Bologna che trovò, ma non divulgò, la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado del tipo menzionato da Pacioli. La formula fu trovata di nuovo da Niccolò Tartaglia nel 1536 e venne pubblicata da Girolamo Cardano nella *Ars magna* nel 1545. In questo trattato tutto dedicato all'algebra egli inclusе anche la risoluzione delle equazioni di quarto grado che nel frattempo era stata trovata dal suo allievo Ludovico Ferrari.

Da quanto sopra delineato appare chiaro che la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado che gli storici della matematica sono concordi nel riconoscere come l'inizio della matematica moderna avvenne nell'ambito delle scuole d'abaco. Dal Ferro e Tartaglia erano, infatti, due esponenti della matematica dell'abaco, e Cardano pur avendo una formazione culturale più ampia, per quanto riguarda l'algebra rivela una cultura di indubbia matrice abachistica.

I numeri di Fibonacci.

Giunti a questo punti molti lettori si staranno domandando in che modo l'autore del *Liber abaci* è coinvolto nella successione di numeri naturali che porta il suo nome.

Fra i numerosi problemi proposti nel capitolo dodicesimo ce ne è uno nel quale si chiede di calcolare *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinantur* (Fig. 7). È proprio nel corso della risoluzione di questo problema che compaiono i primi dodici termini di quella che sei secoli più tardi verrà denominata *successione di Fibonacci.*

In considerazione del grande interesse e delle notevoli applicazioni che hanno ancora oggi i numeri di Fibonacci ritengo interessante proporre integralmente la versione italiana del problema ([20]).

> *Quante coppie di conigli saranno prodotte in un anno da una coppia.*
> Un tale mise una coppia di conigli in un luogo che era circondato da ogni parte da una parete per sapere quante coppie da essa fossero prodotte in un anno, la loro natura essendo che ogni mese fosse prodotta un'altra coppia e che cominciassero a figliare il secondo mese dopo la nascita. Poiché la coppia soprascritta figlia il primo mese, lo stesso raddoppierai; saranno due coppie dopo un mese. Delle quali una, cioè la prima, figlierà nel secondo mese, e così nel secondo mese saranno 3 coppie. Delle quali in un mese due resteranno gravide e produrranno il terzo mese 2 coppie di conigli, e così in questo mese ci saranno 5 coppie di conigli. Delle quali 3 resteranno gravide, e nel quarto mese saranno 8 paia. Delle quali 5 produrranno altre 5 paia che aggiunte alle 8 fanno 13 nel quinto mese. Delle quali 5 coppie che furono prodotte nello stesso mese, non concepiscono in questo mese, ma le altre 8

([20]) Per la versione originale vedi [8], vol. 1°, pp. 283-4.

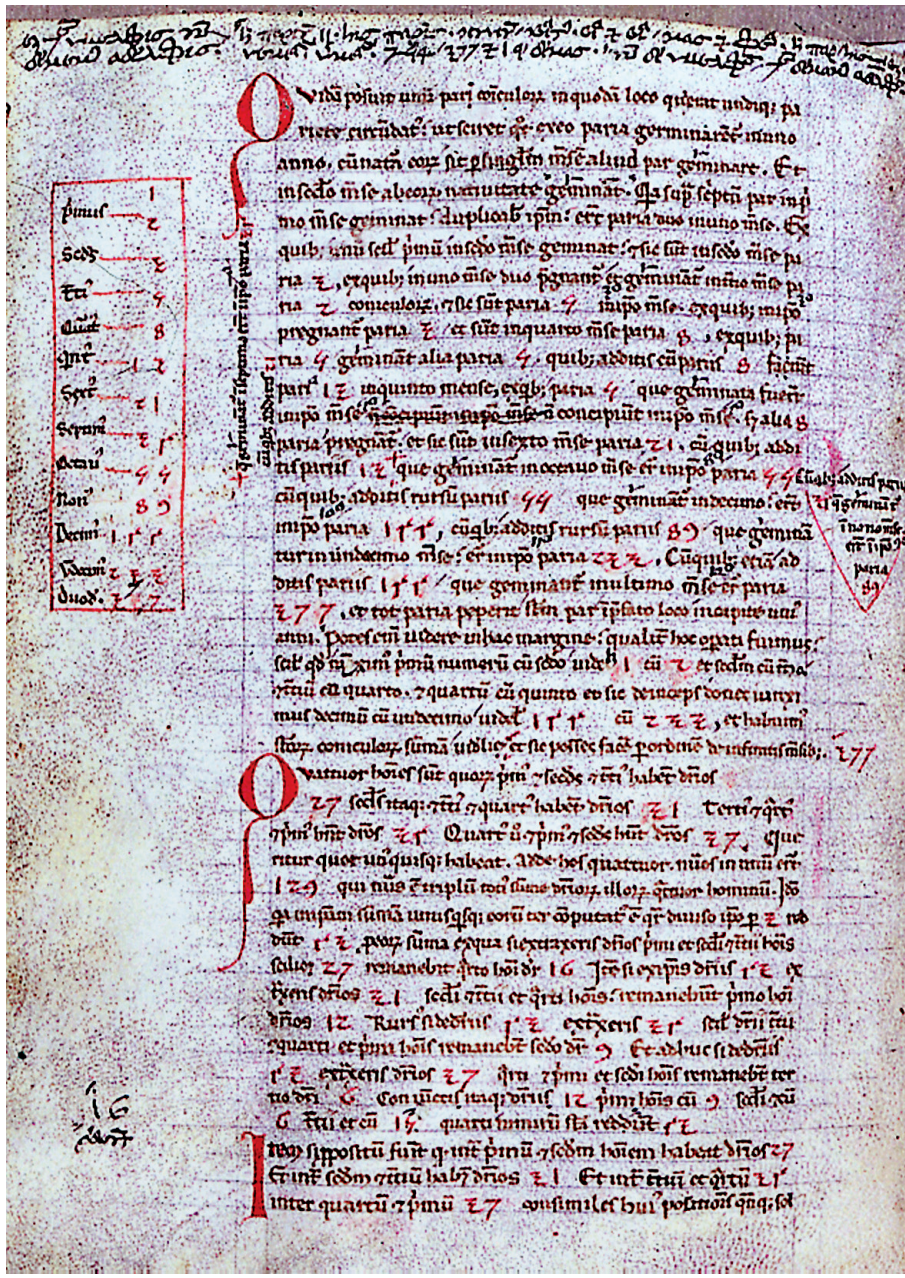


Fig. 7. – Carta 134 verso del manoscritto L.IV.20 contenente il problema dei conigli. Si noti lo schema a margine nel quale sono evidenziati i primi dodici elementi di quella che attualmente è detta successione di Fibonacci.

resteranno gravide, e così nel sesto mese sono 21 coppie. Aggiunti ai quali le 13 coppie che nasceranno nel settimo, saranno nello stesso 34 coppie: aggiunte alle quali le 21 coppie che nasceranno nell'ottavo mese, saranno in esso 55 coppie. Aggiunte alle quali le 34 coppie che nasceranno nel nono mese, saranno in esso 89 coppie: aggiunte alle quali di nuovo 55 che nasceranno nel decimo, saranno in esso 144 coppie. Aggiunte alle quali di nuovo 89 coppie che nasceranno nell'undecimo mese, saranno in esso 233 coppie. Aggiunti con questi 144 coppie che nasceranno nell'ultimo mese, saranno 377 paia. E tante paia produrrà la soprascritta coppia nel luogo predetto in capo di uno anno. Puoi infatti vedere in questo margine come abbiamo operato ([21]), vale a dire come aggiungemmo il primo numero con il secondo, cioè 1 con 2, e il secondo con il terzo, e il terzo con il quarto, e il quarto con il quinto, e così via, finché aggiungemmo il decimo con l'undecimo, cioè 144 con 233, e avemmo la somma dei soprascritti conigli, cioè 377. E così puoi fare con ordine per un numero infinito di mesi.

La conclusione del problema mostra come Fibonacci, pur avendo calcolato solo dodici termini della successione, avesse ben chiari sia la legge di generazione che l'infinità del procedimento. In nessun altra parte del trattato viene comunque fatto riferimento alla successione.

Il problema dei conigli, come molti altri, ma forse meno frequentemente di altri, fu riproposto anonimamente nei trattati d'abaco dei secoli seguenti senza suscitare particolare interesse. La successione fu ritrovata in seguito da altri autori in altri contesti. Così per esempio essa appare in un lavoro di Keplero del 1611 in connessione con la fillotassi, cioè lo studio della disposizione delle foglie e dei fiori nelle piante. Pochi anni più tardi Albert Girard in una annotazione alla traduzione francese del quinto e sesto libro dell'*Aritmetica* di Diofanto la pone in relazione con il rapporto aureo. Egli, infatti, osserva che quest'ultimo è approssimato dal rapporto di due termini consecutivi e l'approssimazione è tanto migliore quanto più grandi sono i termini della successione considerati. Questa proprietà viene ritrovata indipendentemente da Eulero un secolo più tardi. In un lavoro pubblicato nel 1844 Gabriel Lamé indica l'applicazione di questa successione alla determinazione di un limite superiore

([21]) Nei manoscritti che ci sono rimasti nel margine figura verticalmente la seguente sequenza: parium / 1 / primus / 2 / secundus / 3 / tercius / 5 / quartus / 8 / quintus / 13 / sextus / 21 / septimus / 34 / octavus / 55 / nonus / 89 / decimus / 144 / undecimus / 233 / duodecimus / 377.

al numero di operazioni che si devono fare nel calcolare il massimo comun divisore fra due numeri con l'algoritmo euclideo. Da quel momento la successione viene indicata con il nome del matematico francese. Tuttavia nel 1877 Eduard Lucas, in un articolo nel quale dimostra profondi risultati sui numeri di Fibonacci e in particolare li usa per dimostrare che il numero 2^{127}-1 è primo, segnala che la successione si trova per la prima volta nel *Liber abaci* e comincia a chiamarla *successione di Fibonacci*, denominazione che è stata in seguito universalmente adottata, [19]. Dopo il lavoro di Lucas gli studi sui numeri di Fibonacci si moltiplicarono; a riprova della loro vitalità segnaliamo che nel 1963 fu fondata una rivista ad essi dedicata, il *Fibonacci Quarterly.*

Epilogo.

La vicenda della composizione e della diffusione del *Liber abaci* è emblematica dell'intreccio tra motivazioni interne ed esterne nello sviluppo della matematica.

Motivi di ordine pratico legate allo sviluppo del commercio sollecitarono nell'undicesimo secolo il mondo occidentale alla acquisizione delle tecniche aritmetiche e commerciali elaborate dalla cultura islamica. Fra i molti che sicuramente avranno cercato di imparare le nozioni di aritmetica mercantile araba ve ne fu uno di grande attitudine per la matematica: Leonardo Fibonacci. In lui l'interesse per la conoscenza fine a sé stessa superava le esigenze applicative al punto da spingerlo ad imparare anche concetti e tecniche estranee ad una diretta utilizzazione pratica. Le sue doti matematiche gli permisero di comporre un trattato di grande forza innovativa, il *Liber abaci*, che pur essendo costruito con materiali noti, non assomigliava a nessuno di quelli che circolavano allora sia nel mondo occidentale che in quello orientale. La circostanza che una parte dei contenuti del trattato rispondessero ad una esigenza reale della società dell'epoca, ne favorì la diffusione nell'ambito delle scuole d'abaco italiane che costituivano uno dei cardini dell'addestramento professionale del mercante.

La presenza in queste scuole di alcuni maestri e allievi dotati di buone capacità matematiche favorì la trasmissione anche delle

parti più teoriche del *Liber abaci* nonché lo sviluppo di alcune di esse, fra cui la più importante è sicuramente l'algebra.

La forte tradizione di aritmetica pratica trasmessa e consolidata dagli abachisti italiani e i risultati innovativi degli algebristi italiani del Cinquecento sono sicuramente uno dei fondamenti dello sviluppo della matematica del secolo successivo, che vide la nascita dell'algebra simbolica, della geometria analitica e del calcolo infinitesimale.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ALLARD, *L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médieval*, in [27], 199-230.

[2] G. ARRIGHI, *Un grande scienziato pisano del duecento*, Rassegna periodica di informazioni, **2** (1966), 27-29.

[3] G. ARRIGHI, *La fortuna di Leonardo Pisano alla corte di Federico II*, in «Dante e la cultura Sveva», Olschki, Firenze, 1970, 17-31.

[4] C. B. BOYER, *Storia della matematica*, ISEDI, Milano, 1976.

[5] F. BONAINI, *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci nuovamente scoperta*, Giornale storico degli Archivi toscani, **1** (1857), 239-246.

[6] B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*, Tipografia delle Belle Arti, Roma, 1854.

[7] B. BONCOMPAGNI, *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, Tipografia Galileana, Firenze, 1854.

[8] B. BONCOMPAGNI (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. I. Il *Liber abaci* secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I, 2616; II. La *Practica Geometriae* secondo la lezione del Codice Urbinate n. 292 della Biblioteca Vaticana. *Opuscoli* secondo la lezione della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E.75 Parte Superiore, Tipografia delle Scienze Matematiche, Roma, 1857-1862.

[9] C. M. CIPOLLA, *Storia economica dell'Europa pre-industriale*, Il Mulino, Bologna, 1980.

[10] P. COSSALI, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra*, Dalla Reale Tipografia Parmense, 1797-1799, 2 voll.

[11] R. FRANCI, *L'insegnamento della matematica in Italia nel Tre-Quattrocento*, Archimede, **40** (1988), 182-193.

[12] R. FRANCI, *Pietro Cossali storico dell'algebra*, in «Pietro Riccardi (1828-1898)» e la storiografia delle matematiche in Italia, Modena, 1989, 199-217.

[13] R. FRANCI, *Il ruolo della matematica nella istruzione carolingia e le* Propositiones ad acuendos juvenes *di Alcuino*, La matematica nella Società e nella cultura, B.U.M.I. (8) **3-A** (1999), 283-295.

[14] R. Franci - L. Toti Rigatelli, *Storia della teoria delle equazioni algebriche,* Mursia, Milano, 1979.
[15] R. Franci - L. Toti Rigatelli, *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento*, Quattroventi, Urbino, 1982.
[16] R. Franci - L. Toti Rigatelli, *Toward a history of algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli*, Janus, **72** (1985), 17-82.
[17] G. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Paris, Voll. 1° e 2° 1838, Vol. 3° 1840, Vol. 4° 1841.
[18] G. Loria, *Leonardo Fibonacci*, in A. Mieli (ed.) «Gli scienziati italiani dall'inizio del Medioevo ai giorni nostri», Roma, 1921-1923, pp. 4-12.
[19] E. Lucas, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d' Arithmétique supérieure*, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, **10** (1877), 129-293.
[20] C. Maccagni, *Leonardo Fibonacci e il rinnovamento delle matematiche*, in «L'Italia e i paesi mediterranei», Nistri-Lischi e Pacini, Pisa, 1988, 91-116.
[21] Maestro Umbro (sec. XIII), *Livero de l'abbecho,* a cura di G. Arrighi, Bollettino della deputazione di storia patria per l'Umbria, **86** (1989), 5-140.
[22] G. Masson, *Federico II di Svevia*, Bompiani, Milano, 2001.
[23] G. Milanesi, *Documento inedito e sconosciuto intorno a Lionardo Fibonacci*, Roma, 1867.
[24] E. Picutti, *Il Libro dei quadrati di Leonardo Pisano e i problemi di analisi indeterminata nel codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze,* Physis, **21** (1979), 195-339.
[25] E. Picutti, *Leonardo Pisano*, Le scienze, n. 164, **15** (1982), 95-105.
[26] E. Picutti, *Il «Flos» di Leonardo Pisano. Traduzione e commenti*, Physis, **25** (1983), 293-387.
[27] R. Rashed (ed.), *Histoire des sciences arabes. 2. Mathématiques et physique*, Seuil, Paris, 1997.
[28] R. Rashed, *Fibonacci e la matematica araba*, in [31], 324-337.
[29] A. Rosen, *The Algebra of Mohammed ben Musa,* London, 1831.
[30] A. Sapori, *La mercatura medioevale*, Sansoni, Firenze, 1975.
[31] P. Toubert - A. Paravicini Bagliani (eds.), *Federico II e le scienze*, Sellerio, Palermo, 1994.
[32] W. Van Egmond, *Practical mathematics in the Italian Renaissance: a catalogus of Italian abbacus manuscripts and printed books to 1600,* Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze, 1980.
[33] K. Vogel, *Fibonacci Leonardo or Leonardo of Pisa*, Dictionary of scientific biography, ad vocem.

Raffaella Franci, Dipartimento di Matematica e Informatica Roberto Magari,
via Del Capitano n. 15, 53100 Siena.
E-mail: franci@unisi.it