Umberto Bottazzini

I geometri italiani e i Grundlagen der Geometrie di Hilbert

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-B** (2001), n.3, p. 545–570.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_3_545_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
(8) 4-B (2001), 545-570

I geometri italiani e i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert.

UMBERTO BOTTAZZINI (*)

Introduzione.

Cent'anni fa, nel giugno del 1899, Hilbert dava alle stampe i *Grundlagen der Geometrie*, un'opera che ha segnato una svolta epocale nelle ricerche intorno ai fondamenti della geometria e nella concezione stessa del metodo assiomatico, e sta sullo sfondo della celebre lista di problemi «per le generazioni future» presentati da Hilbert al Congresso Internazionale dei Matematici, che si tenne a Parigi nel 1900. Quando apparve lo scritto di Hilbert, i fondamenti della geometria erano un campo di ricerca particolarmente coltivato in Italia. Da Peano, a Segre, a Veronese, a Pieri, a giovani che si affacciavano al mondo della ricerca come Fano e Enriques, numerosi furono infatti i matematici italiani che, con metodi e intenti diversi, nell'ultimo decennio dell'Ottocento si dedicarono a questioni di fondamenti della geometria. Si può considerare l'opera di Hilbert come un termine di paragone e la chiave di lettura dei lavori dei matematici italiani impegnati in analoghe ricerche. Quali erano le loro motivazioni e i loro obiettivi? Quale influenza essi esercitarono su Hilbert?

La risposta a queste domande può forse contribuire a comprendere meglio un aspetto importante della storia della geometria italiana, e fornire qualche elemento per rispondere a domande analoghe che si possono sollevare per altri campi della matematica italiana, che tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del nuovo secolo seguirono un'analoga parabola.

1. Se le *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) di Moritz Pasch costituirono il testo di riferimento e il termine di confronto degli studi sui fondamenti e gli assiomi della geometria, che si svilupparono nell'ultimo decennio dell'Ottocento, Felix Klein fu l'interlocutore privilegiato di molti dei geometri che, soprattutto in Italia e in Germania, allora s'impegnarono in questo campo di ricerca. Nel 1890, a quasi vent'anni dai lavori su quelle che egli aveva chia-

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 18 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

mato le 'cosiddette' geometrie non euclidee (Klein 1871, 1873), per la prima volta da quando si era trasferito a Gottinga scelse di tenere un corso di lezioni sulla geometria non euclidea (1). La scelta di Klein coincideva con una generale ripresa di interesse per le questioni di fondamenti della geometria.

Proprio allora Corrado Segre, giovanissimo professore di Geometria superiore a Torino, aveva proposto al collega tedesco di «consentire» alla traduzione italiana del cosiddetto *Programma di Erlangen*. Quel lavoro, osservava Segre, non era «abbastanza noto ai *giovani geometri italiani*» [in: Klein 1890a, 1] e lo stesso Klein non sembra avesse fatto molto per diffonderlo [Hawkins 1984]. Quella proposta faceva seguito alla pubblicazione nel 1889 della *Geometria di posizione* (*Geometrie der Lage*) e dei primi capitoli dei *Beiträge* di von Staudt, nella «limpida traduzione» [Levi 1913, 773] che Mario Pieri aveva effettuato su invito di Segre, arricchita di un saggio introduttivo dello stesso Segre. Tra le cose «non sufficientemente conosciute e studiate dai giovani» contenute nel *Programma* Segre ricordava le «tante giuste osservazioni» intorno ad alcune teorie tra «le più discusse, come quella delle varietà più volte estese, e la geometria non euclidea».

Da parte sua, Klein aveva «accondisceso tanto più volentieri» alla proposta del collega italiano in quanto, a suo dire, la pubblicazione della *Theorie der Transformationsgruppen* di Engel e Lie, di cui erano apparsi i primi due volumi (1888 e 1890) poteva contribuire ad accrescere l'interesse dei geometri per le idee contenute nel *Programma*. Per quanto riguardava in particolare la geometria non euclidea, si annunciava prossima la pubblicazione (postuma) del II volume delle *Vorlesungen über Geometrie* (1891) di Clebsch, curate da Lindemann dove — affermava Klein — la teoria era presentata «da un punto di vista che non è molto diverso dal mio».

La traduzione italiana del *Programma* ad opera di Gino Fano — un allievo di Segre, allora a Gottinga per un periodo di studio con Klein — rappresentò l'inizio della sua effettiva circolazione negli ambienti matematici europei. Nel giro di pochi anni apparvero infatti la traduzione francese (1891), quella inglese (1893), la ristampa nei «Mathematische Annalen» (1893) e in seguito, tra il 1895 e il 1897, le traduzioni in polacco, russo e ungherese.

Il corso sulle geometrie non euclidee fornì inoltre a Klein l'occasione per pubblicare nei «Mathematische Annalen» un articolo di sintesi [Klein 1890b] delle moderne ricerche nel campo. Klein cominciava con un'esposizione dettagliata delle idee di Clifford (la teoria delle «parallele sghembe» dello spazio ellittico e lo studio delle proprietà della quadrica di Clifford) e una discussione del «problema di Clifford-Klein» di determinare tutte le varietà bidimensionali a curvatura costante ovunque regolari. Dopo aver presentato gli elementi

(1) Quelle lezioni furono poi pubblicate in due volumi litografati a cura di F. Schilling [Klein 1892].

della geometria di posizione di von Staudt in una maniera «essenzialmente più intuitiva», nell'ultima parte dell'articolo egli si soffermava sul significato di «quella concezione della geometria non euclidea che comincia con la geometria proiettiva», che lo stesso Klein aveva proposto nei suoi lavori del 1871 e 1873, e affrontava «più esplicitamente che mai in passato» il problema dei fondamenti.

Aggirando una questione lasciata aperta da von Staudt, in quei lavori Klein aveva mostrato come si potessero definire le coordinate dei punti con metodi puramente proiettivi, e dunque sviluppare la geometria proiettiva prima di risolvere il problema di determinare la metrica. «In che senso — si chiedeva ora Klein [1890b, 380] — risulta psicologicamente corretto trattare la geometria proiettiva prima della geometria metrica (*Geometrie des Masses*), e addirittura considerare la prima come fondamento della seconda?» Secondo Klein, la ragione ultima risiedeva nella distinzione tra le proprietà «meccaniche» e quelle «ottiche» dello spazio. Per Helmholtz bisognava assumere come fondamentali le proprietà meccaniche, che «trovano nella libera mobilità dei corpi la loro espressione matematica». Ma «i miei lavori — obiettava Klein — mostrano che si può cominciare altrettanto bene dalle proprietà ottiche», e assumere dunque come fondamento «l'intuizione proiettiva».

Quanto alla natura degli assiomi geometrici, Klein respingeva la concezione «generalmente diffusa» secondo la quale essi «formulano i "fatti" dell'intuizione spaziale» in maniera così completa da rendere superfluo ogni ulteriore ricorso all'intuizione. Al contrario, ribadiva Klein, nel «vero pensiero geometrico» ci soccorre ad ogni passo «l'intuizione spaziale». Al punto che, egli scriveva, «in ogni caso per me è impossibile condurre un ragionamento geometrico in termini puramente logici, senza avere continuamente davanti agli occhi la figura alla quale ci si riferisce» (Klein [1890b, 381]). Questa perentoria affermazione appare ancor più significativa se si pensa alle concezioni radicalmente opposte allora sostenute da Peano e dai suoi allievi e, in seguito, da Hilbert.

L'intuizione è «qualcosa di *essenzialmente* impreciso», era pronto ad ammettere Klein. «Ora, l'assioma per me è la richiesta (*Forderung*) mediante la quale stabilire nell'intuizione imprecisa degli enunciati precisi». Gli assiomi costituiscono quindi una specie di «saldo substrato logico» su cui appoggiare le considerazioni intuitive (Klein 1890b, 381). Ci poteva essere una certa «tolleranza» nella scelta di differenti sistemi di assiomi, affermava Klein, ma il grado di arbitrarietà degli assiomi doveva comunque essere compatibile con l'intuizione spaziale. Quanto all'origine degli assiomi, Klein si limitava ad affermare che il processo di astrazione da esperienze empiriche, che porta alla loro formulazione, avviene «in maniera involontaria». Ovvero, «scaturisce da una esigenza della nostra propria natura», come egli aveva detto a lezione (Klein 1892, I, 357).

Lo stesso Klein riprenderà l'analisi del problema degli assiomi geometrici nel rapporto scritto per la Società fisico-matematica di Kazan in occasione dell'attribuzione a Lie del Premio Lobacevskij. In questo scritto relativamente poco noto, Klein (1898) faceva precedere il proprio punto di vista dalla rassegna delle diverse posizioni sul problema dei fondamenti, che erano emerse a partire dai lavori di Riemann ed Helmholtz fino ai più recenti contributi di Lie, di Pasch, di Veronese e dei geometri italiani che avevano proposto sistemi assiomatici per la geometria proiettiva «astratta».

«Da dove vengono gli assiomi?» si chiedeva Klein. Dopo gli sviluppi della geometria non euclidea non era più condivisibile l'opinione che era stata di Kant, che gli assiomi rispondano a «delle necessità dell'intuizione interiore» (Klein 1898, 386). Secondo Klein invece, «l'essenza vera e propria» degli assiomi risiedeva nella «idealizzazione dei dati empirici». Si trattava poi di assicurarsi che gli enunciati corrispondessero ai fatti dell'esperienza, e che fossero esenti da contraddizioni. Come ciò si potesse fare Klein non dice, e neppure cerca di chiarire cosa egli intenda con «intuizione», un termine che, corredato da diversi aggettivi (»proiettiva», «spaziale», «geometrica», «interiore», ecc.) appare tanto vago nella definizione quanto fondamentale nella visione di Klein.

«È inutile dire che solo dopo la redazione del rapporto precedente si è avuto l'intero sviluppo della moderna assiomatica», osservava Klein in una nota aggiunta al rapporto nel 1923, al momento dell'edizione delle sue *Gesammelte Abhandlungen*. Ma proprio per questo le idee contenute in quello scritto sono tanto più significative. Un anno dopo la redazione di quel rapporto Hilbert darà alle stampe i *Grundlagen der Geometrie* (in seguito, *GG*) introducendo un punto di vista completamente diverso che, in parte contro le intenzioni del suo autore, finirà per destinare alle discussioni dei filosofi il problema della natura dell'intuizione, così come quello dell'origine e della natura degli assiomi della geometria e la loro adeguatezza a dar conto dei fatti dell'esperienza. E sarà appunto vestendo gli abiti del filosofo che ne parleranno Poincaré ed Enriques nei primi anni del Novecento.

Di fatto, dopo la pubblicazione dei *GG*, Klein non interverrà più nel dibattito sui fondamenti della geometria. Si può forse dire con Freudenthal che «Klein non ha rifiutato l'indirizzo assiomatico; ma non ha capito i suoi problemi». Anche per questo è significativo è il rinvio, posto da Klein in chiusura di quella nota, all'articolo *Prinzipien der Geometrie* (1907) di Enriques apparso nell'Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Un articolo ispirato alle idee dello stesso Klein, più che alle concezioni di Hilbert.

2. Tra gli elementi caratterizzanti il punto di vista assiomatico «moderno», presentato da Hilbert nei *GG*, viene di solito annoverata l'affermazione che gli enti fondamentali della geometria (punti, rette, piani) sono «oggetti» di cui non si precisa la natura. Hilbert si limita infatti a richiedere che essi soddisfino agli assiomi che vengono enunciati di seguito, ciò che costituisce una definizione implicita degli enti stessi. Tuttavia, il punto di vista adottato da Hilbert non doveva riuscire nuovo ai geometri italiani familiari coi lavori di Peano, Segre e i loro colleghi e allievi.

Una diecina d'anni prima dell'apparizione dei *GG*, Peano aveva pubblicato *I Principii di geometria logicamente esposti* (Peano 1889b) che facevano seguito ad una analoga trattazione per i principi dell'aritmetica (Peano 1889a), entrambi saggi della potenza del nuovo simbolismo logico che il matematico torinese andava elaborando ([2]). *I Principii* rispondevano ad una questione che era stata sollevata da Pasch (1882, 90): «Se si vuole che la geometria sia veramente deduttiva il processo deduttivo deve essere totalmente indipendente dal significato dei concetti geometrici, così come deve essere indipendente dalle figure». Il simbolismo di Peano eliminava appunto ogni ricorso a figure e rendeva trasparente il processo deduttivo dagli assiomi ai teoremi.

«Quali fra gli enti geometrici si possono definire e quali occorre assumere senza definizione?» si chiede Peano (1889b, 56) in apertura di quell'opuscolo. «E fra le proprietà, *sperimentalmente vere* [cors. U.B.], di questi enti, quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza?» L'avvertenza che bisogna seguire «onde non fare lavoro vano», continua Peano, è di «attenersi rigorosamente» a due «regole» di natura logica: «usare nelle nostre proposizioni solo termini di valore pienamente determinato; ben precisare cosa si intenda per definizione e per dimostrazione» (Peano 1889b, 56).

In matematica tutte le definizioni sono nominali, afferma Peano qui e ribadirà ancora nel 1921 nell'ultimo articolo sull'argomento. Sono cioè proposizioni della forma $x = a$, dove x è il segno (o il termine) che si vuol definire e a è un insieme di segni (o termini) noti. Per i termini che appartengono al linguaggio comune, o alla logica, Peano rimanda ai propri *Arithmetices principia* dove ha presentato il «numero limitatissimo di convenzioni» (Peano 1889b, 57) — dieci in tutto, anche se non tutte necessarie — che permettono di esprimere tutte le relazioni logiche di cui egli si serve nei *Principii.* Le proposizioni risultano così formulate «sotto forma rigorosa», nel simbolismo peaniano. Quanto ai termini geometrici, Peano assume come enti non definiti «punto» e «retta limitata» (segmento). Così *I Principii* si aprono con l'avvertenza: «Il segno 1 leggasi punto» e «se a, b sono punti, con ab intenderemo la classe formata dai punti interni al segmento ab» (Peano 1889b, 61).

In quell'opuscolo Peano si limita ai fondamenti della geometria di posizione (come allora si chiamava, seguendo von Staudt, la geometria proiettiva), in cui non figura quindi il concetto di «moto» (o trasporto) che sta alla base del concetto di congruenza. Che neppure il postulato delle parallele sia soddisfatto in

([2]) Per le ricerche sui fondamenti nella scuola di Peano si veda Borga-Freguglia-Palladino (1985) e Lolli (1985).

quella geometria Peano lo mostra in appendice con un contresempio: Se il segno 1 indica i punti interni ad una sfera (o un solido convesso) e *ab* conserva il solito significato di «segmento», allora sono soddisfatti tutti gli assiomi enunciati, ma non il postulato delle parallele.

Partendo dai concetti non definiti di punto e segmento egli definisce «la retta illimitata, il piano e le sue parti, come pure le parti dello spazio», (Peano 1889b, 57) ed enuncia le proposizioni che «esprimono le più semplici proprietà degli enti considerati», cioè gli assiomi, ciascuno seguito dai teoremi che ne sono conseguenza.

I primi 11 assiomi dei *Principii* caratterizzano la geometria della retta e coincidono essenzialmente con quelli di Pasch, come riconoscerà in seguito lo stesso Peano (1894, 127), rivendicando tuttavia, rispetto al geometra tedesco, l'aver ridotto da tre (punto, segmento rettilineo, porzione di piano) a due i concetti primitivi. «È chiaro che non tutti gli enti si possono definire», osserva Peano (1889b, 78) nelle note poste a commento del proprio lavoro ([3]). «Ma è importante in ogni scienza ridurre al minimo numero gli enti non definiti», pur con la consapevolezza che questa riduzione «presenta alcuna volta dell'arbitrario».

Ridurre al minimo il numero dei concetti primitivi e degli assiomi è preoccupazione costante di Peano fin dal suo primo lavoro di logica, le «Operazioni della logica deduttiva», ispirate all'*Operationskreis* (1877) di Schröder e poste in apertura del *Calcolo geometrico* (Peano 1888). Come Schröder, anche Peano dà un'esposizione assiomatica dell'algebra della logica, introducendo una serie di identità che assume come assiomi. «In numero di nove», egli commenta soddisfatto in una nota manoscritta aggiunta alla sua copia del *Calcolo geometrico*, «invece lo Schröder ne ha 13» (in: Bottazzini 1994, 238).

Minore è il numero di concetti primitivi e di assiomi, più profonda è l'analisi. È una convinzione condivisa non solo nella scuola di Peano ma anche da Hilbert. «La questione del minimo numero di assiomi che possa servire a descrivere i fenomeni geometrici del mondo esterno non sembra ancora al giorno d'oggi risolta», scrive Hilbert a Klein nel 1893. Del resto, una lettura attenta delle pagine dei *GG* o della relazione sui problemi matematici che Hilbert presentò al Congresso di Parigi rivela quanto sia parziale l'immagine di Hilbert come matematico «formalista». «L'esposizione degli assiomi della geometria e l'indagine sui loro mutui rapporti», si legge ad esempio nella introduzione ai *GG*, «porta» non già alla messa in secondo piano dell'intuizione, come spesso si

([3]) Le proprietà fondamentali dei concetti primitivi sono determinate da «proposizioni primitive», gli assiomi, che «fungono in un certo modo come definizioni delle idee primitive» dirà Peano (1921, 433) a commento del lavoro di Pieri (1898-99) basato sulle idee primitive di «punto» e «distanza fra due punti». Peano non cita Hilbert, ma lo stesso si può dire per gli «oggetti» primitivi dei *GG*.

dice bensì, «all'analisi logica della nostra intuizione dello spazio», afferma Hilbert (1899), che rinvia in nota all'appendice di Veronese (1894) e a Klein (1898). Per Peano una tale analisi rivela «l'inutilità del termine *spazio*», come dirà in un pungente commento alle idee che «nei comuni trattati si dànno come primitive», osservando che «l'esempio di Euclide e di tanti altri che non ne parlano affatto è del tutto convincente» (Peano 1894, 117). Anche se in quell'articolo egli continua «ad usare il termine *spazio* nel significato usuale», Peano fa osservare che pure i concetti di solido, superficie e linea sono «alquanto indeterminati», come egli stesso ha mostrato con l'esempio di una linea che riempie un quadrato e di curva in cui ogni arco riempie un volume.

Gli assiomi XII-XVI dei *Principii* introducono la geometria di posizione del piano e dello spazio. In particolare, l'assioma XV asserisce che «dato un piano, esistono dei punti non contenuti in esso» e l'assioma XVI che «dato un piano, e due punti da bande opposte del piano, allora ogni punto dello spazio o sta sul piano dato, ovvero uno dei segmenti che lo uniscono ai punti dati incontra il piano» (Peano 1889b, 89). In altri termini, lo spazio dato ha tre dimensioni. Infine, in appendice egli enuncia l'assioma di continuità della retta, «necessario in molte altre questioni», sotto la forma:

«Assioma XVII Se h è una figura convessa, e se a e b sono punti, il primo appartenente h, il secondo non, allora si può determinare un punto x appartenente al segmento ab, o ai suoi estremi, in guisa che il segmento ax sia contenuto in h, e il segmento bx sia tutto fuori di h» (4).

Nelle note esplicative, poste a conclusione dell'opuscolo, Peano ribadisce il carattere arbitrario attribuito agli enti primitivi. «*Il lettore* — scrive Peano (1889b, 77) — *può intendere col segno* 1 *una categoria qualunque di enti, e con* $c \in ab$ *una relazione qualunque fra tre enti di quella categoria; avranno sempre valore tutte le definizioni che seguono e sussisteranno tutte le proposizioni* [cors. U.B.]». E tuttavia questa ribadita arbitrarietà della natura degli enti primitivi sembra soddisfare più a un desiderio di generalità che a una convinzione reale, e male si accorda con l'iniziale richiesta di verità «sperimentale» delle proprietà assunte come assiomi. A ragione Fano (1892, 108) scriverà che Peano «parte dalle idee intuitive (o supposte tali)» di punto e segmento rettilineo e Pieri (1896, 84) accomunerà Peano a Pasch nell' «indirizzo *fisico-geometrico*», secondo il quale gli assiomi derivano dall'osservazione del mondo esterno e «sono identificati con le idee che si acquistano per via d'induzione

(4) In seguito Peano farà osservare che l'assioma si può enunciare nella forma equivalente:

«Dati due punti a e b, e una classe k di punti, classe effettivamente esistente, e contenuta nel segmento ab, allora si può determinare un punto x appartenente al segmento ab, o coincidente con b, tale che nessun punto della classe k appartenga al segmento xb, ma tale che comunque si prenda il punto y fra a ed x, sempre esistono punti della classe k compresi fra y e b» (Peano 1894, 140-141).

sperimentale» da fatti empirici. Pasch (1882, ii) aveva apertamente affermato che «i concetti geometrici originariamente corrispondono proprio agli oggetti empirici». Non dissimili erano le idee di Peano. Da parte sua, Pieri «prescinde da ogni interpretazione fisica delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza* e *intuitività* geometrica».

Presa alla lettera, infatti, l'affermazione di Peano sull'arbitrarietà degli enti primitivi avrebbe richiesto prove di indipendenza e di non-contraddittorietà degli assiomi, come cercherà di fornire Hilbert nei *GG*. Per quanto riguarda l'indipendenza, nei *Principii* Peano si limita a dichiarare che la prova è affidata all'ordine in cui sono sono enunciati gli assiomi. Dall'ordine discende il loro «valore», afferma Peano (1889b, 57), «e si è moralmente certi della loro indipendenza». Una certezza «morale» che ai nostri occhi poco si accorda con «l'assoluto rigore» rivendicato da Peano (1889b, 58).

La non-contraddittorietà degli assiomi è poi per Peano questione irrilevante, e non è neppure menzionata nei *Principii*. Ancora nel 1906, dopo la scoperta di paradossi nella teoria degli insiemi, mentre infuriano le polemiche sui fondamenti della matematica, egli scrive (in *latino sine flexione*): «Proba que systema de postulatos de Arithmetica, aut de Geometria, non involve contradictione, non es, me puta, necessario. Nam nos non crea postulatos ad arbitrio, sed nos sume ut postulatos propositiones simplicissimo, scripto in modo explicito aut implicito, in omni tractatu de Arithmetica, aut de Geometria. Nostro analysi de principios de ce scientias es reductione de affirmationes commune ad numero minimo, necessario et sufficiente» [...] Proba de coexistentia de systema de postulatos pote es utile, si postulatos es hypothetico, et non respondentes ad factu reale» (Peano 1906, 343).

Le parole di Peano chiariscono e delimitano la natura delle sue ricerche sui fondamenti: si tratta di mostrare, servendosi della logica matematica, come si possano organizzare in un sistema assiomatico le nozioni geometriche che sono comunemente presentate nei manuali di geometria (o di aritmetica) elementare. Insomma, è «un'analisi delle proposizioni fondamentali fatta con gli strumenti della logica matematica» (Peano 1894, 119). Nello stesso lavoro, in una «osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati» egli aggiunge che chiunque può premettere le ipotesi che vuole e svilupparne le conseguenze logiche. «Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche». Se i postulati corrispondono a «fatti reali», non c'è bisogno di alcuna prova di coerenza. Ma d'altra parte, la rinuncia all'arbitrarietà degli assiomi («nos non crea postulatos ad arbitrio»), finisce col contraddire l'affermazione tante volte ribadita sulla natura «qualunque» degli enti primitivi.

Del resto, il confronto con le tesi allora sostenute da Hilbert dà la misura dell'estraneità di Peano (e della sua scuola) dai temi della ricerca che Hilbert aveva delineato non più di un paio d'anni prima al Congresso Internazionale dei Matematici ad Heidelberg (1904) dove la questione della non-contraddittorietà degli assiomi dell'aritmetica, annoverata nel 1900 tra i problemi aperti in matematica, era stata posta da Hilbert come *il* problema decisivo da affrontare nelle ricerche sui fondamenti. *Et pour cause*, poiché la dimostrazione della coerenza relativa degli assiomi della geometria data da Hilbert nei *GG* consisteva nella costruzione di un modello (l'ordinaria geometria delle coordinate) che si traduceva in ultima analisi nella necessità di una dimostrazione di non contraddittorietà dell'aritmetica.

3. Nei *Principii* Peano si era limitato ad affermare che gli assiomi XV e XVI consentono di ricavare il teorema di Desargues «e le sue innumerevoli conseguenze» (che costituiranno invece una parte essenziale dei *GG* di Hilbert). Peano osservava tuttavia che, senza ricorrere agli assiomi XV e XVI, si poteva dimostrare che «i piani che uniscono un punto e con due rette ab e cd d'uno stesso piano non passante per e s'incontrano secondo una retta». Questa proposizione e l'assioma XV sono sufficienti a stabilire il teorema dei triangoli omologici nello spazio, come egli stesso mostrerà qualche anno più tardi (in: Peano 1894, 139). (5)

Se *I Principii* di Peano si affiancavano a un lontano lavoro di De Paolis (1881) nel fornire una trattazione assiomatica dello spazio proiettivo ordinario, lasciavano invece aperta l'analoga questione per gli spazi ad un numero r qualunque di dimensioni, che l'anno successivo Segre proponeva ai suoi studenti del corso di *Geometria sopra un ente algebrico*: «Definire lo spazio S_r non già mediante coordinate, ma con una serie di proprietà dalle quali la rappresentazione con coordinate si possa dedurre come conseguenza» (in: Fano 1892, 106). Contrariamente a Peano, Segre vede le questioni dei fondamenti della geometria nella prospettiva della ricerca geometrica più avanzata. Non si tratta di analizzare con tutto il rigore della logica peaniana le proposizioni fondamentali della geometria elementare, bensì di definire in maniera rigorosa un sistema di assiomi indipendenti per un iperspazio proiettivo S_r, che agli occhi di Segre è l'ambiente «naturale» in cui si devono collocare le ricerche geometriche.

Segre ritorna sulla questione in una breve nota, indirizzata ai suoi studenti e apparsa nel primo numero della «Rivista di Matematica» fondata da Peano.

(5) In quell'occasione Peano osserverà che anche il teorema di Desargues nel piano è conseguenza dell'assioma XV «e quindi è un teorema di Geometria solida». Con un controesempio dimostra poi che quel teorema non è in generale conseguenza degli assiomi I-XIV. Infatti, «se per p intendiamo i punti di una superficie, e se con $ceab$ intendiamo di dire che il punto c sta sull'arco di geodetica che unisce i punti a e b, allora sono verificati tutti i postulati dall'I al XIV, e non sussiste sempre la proposizione sui triangoli omologici. Questa proposizione però continua a valere per le superficie a curvatura costante» (Peano 1894, 139).

«Accade tuttora, anche in Italia, che non si sappia collocare la geometria ad n dimensioni al suo giusto posto», osserva Segre (1891, 407). Inoltre, «non è ancora stato assegnato e discusso un sistema di postulati *indipendenti* che serva a caratterizzare lo spazio lineare a n dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questo con coordinate».

Allo scopo si poteva estendere «il linguaggio geometrico al caso di un numero qualunque di valori (*coordinate* del punto) di n variabili», e definire un iperspazio come «l'insieme di tutti questi punti o gruppi di valori». Ma in questo modo, osserva Segre, gli enti considerati si riducono ad essere «essenzialmente analitici» e il contenuto geometrico passa in secondo piano. Per esempio, la geometria proiettiva per tali spazi «non è altro in sostanza che l'algebra delle trasformazioni lineari».

Altrimenti, seguendo la via indicata da Plücker, si potevano considerare come punti di uno spazio a più dimensioni enti dello spazio ordinario pensati come dipendenti da un numero qualsiasi di parametri. Tuttavia, così facendo «la geometria degli iperspazi non presenta più alcuna novità di concetto». Infine c'era la proposta di Veronese (1891) di definire lo spazio ad n dimensioni «allo stesso modo di quello ordinario, solo che si tolga il postulato delle tre dimensioni» (e si modifichino quindi alcuni postulati relativi alla retta e al piano). Tutte queste distinzioni non avevano per Segre grande rilevanza. La mancanza di una soddisfacente teoria assiomatica degli spazi a n dimensioni, egli osserva, non impedisce al geometra di «lavorare negli iperspazi senza fissare quale sia tra le varie definizioni quella che [...] sceglie», e «addirittura [di] tenerle tutte».

Agli occhi di Segre le indagini sui fondamenti hanno interesse solo se consegnano al matematico strumenti di ricerca più efficaci. Quando si tratta di «scoprire la verità», afferma Segre, la «purezza del metodo» passa in secondo piano e talvolta anche il rigore, come era accaduto altre volte nella storia della geometria, per esempio per gli elementi immaginari, gli enti «impropri» o il «principio di continuità» di Poncelet.

L'atteggiamento pragmatico di Segre provoca l'immediata reazione di Peano, che in alcune *Osservazioni del Direttore* aggiunte allo scritto del collega rivendica l'esigenza di un «rigore assoluto». Un ricercatore «può fare le ipotesi che più gli piacciono», ma una volta fatta la scelta, «spetta alla matematica», che per Peano non è altro che «una logica perfezionata», dedurre le conseguenze in maniera assolutamente rigorosa. L'ironia è sferzante: «Chi enuncia delle conseguenze che non sono contenute nelle premesse, potrà fare della poesia, ma non della matematica» (Peano 1891a, 67). La diversa concezione che i due hanno del rigore e del suo ruolo in matematica balza agli occhi, e questo è l'aspetto della polemica che è stato più volte sottolineato. Per quanto importante, la questione del rigore mette tuttavia in secondo piano la sostanza matematica che è in discussione: come lavorare negli iperspazi? Segre ha in mente il metodo sintetico della proiezione (e della sezione) da uno spazio S_r in un altro di dimensione inferiore (in particolare S_3), la cui fecondità Veronese (1882) ha mostrato in un lavoro che «ha fatto veramente epoca». Con le parole di Segre (1891, 410), l'idea fondamentale di Veronese è che «certe configurazioni dello spazio ordinario si ottengono quali sezioni della configurazione determinata da un numero qualsiasi di punti di un iperspazio qualunque». È un'idea che Segre fa propria nei suoi lavori di geometria iperspaziale, a partire dalla sua tesi di laurea.

«La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi n di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della matematica» aveva scritto allora Segre (1883a, 26). Anche quando «l'elemento o punto di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che fa lo stesso come un ente analitico costituito dai valori di n quantità variabili), ma bensì come un ente a sé, *la natura intima del quale si lascia indeterminata* [cors. U.B.], non si può rifiutare di ammetterla come scienza, in cui tutte le proposizioni sono rigorose, perché dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro». La definizione di spazio lineare data da Segre si presta a critiche dal punto di vista del rigore, come farà osservare Peano ([6]). Critiche che tuttavia non toccano la correttezza dei risultati in questo e negli altri lavori di Segre dedicati alla geometria degli iperspazi.

Lasciare indeterminata la «natura intima» dei punti degli iperspazi apre la via alla possibilità di stabilire isomorfismi tra spazi lineari: «tutti gli spazi lineari ad uno stesso numero di dimensioni, qualunque siano i loro elementi si possono riguardare come identici tra loro» afferma Segre (1883a, 46). Così, per esempio, assumendo come nota la teoria della retta, del piano e dello spazio ordinari, considerati come punteggiati, è possibile utilizzarla «per tutti gli spazi lineari ad 1, 2, 3 dimensioni contenuti nello spazio lineare ad n-1 dimensioni che si vuol studiare in generale». Altrettanto naturale è considerare la geometria della retta come quella di una quadrica a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni, come già avevano insegnato Plücker e Klein, e come egli fa nell'ultima parte della tesi, dove definisce la retta «come l'elemento di una quadrica non specializzata a 4 dimensioni» e aggiunge in nota che «il vantaggio» di questa definizione consiste nel fatto «che, con soli mutamenti di parole, la geometria che fondiamo su questa definizione darà la geometria di qualunque spazio quadratico a 4 dimensioni, in cui l'elemento sia diverso dalla retta ordinaria» (Segre 1883b, 127).

Per quanto influenzato dai suoi metodi, Segre prende le distanze dal punto di vista di Veronese in un articolo del 1885 che, come ha osservato a ragione

([6]) Cfr. Segre (1883, 38), nota * (N.d.R.).

Brigaglia (1994, 250), al di là delle differenze di linguaggio, rivela parecchie (e inaspettate) «affinità tra le affermazioni di Segre e alcune considerazioni di Peano». Dopo aver ribadito «il fatto evidente che tutte quelle proprietà di una varietà che dipendono unicamente dalla sua linearità e dalla sua estensione sussistono pure per tutte le varietà lineari aventi la stessa estensione» fatto che «mette in luce» l'importanza della geometria proiettiva negli iperspazi «quando all'elemento o punto dello spazio in essa considerato non si attribuisca alcun carattere speciale» Segre sottolinea che nelle sue ricerche Veronese «si pone da un punto di vista diverso».

Questo punto di vista sta alla base dei *Fondamenti di geometria a più dimensioni*, il volume che Veronese dà alle stampe nello stesso anno della polemica tra Peano e Segre, ma al quale egli pensava fin dal 1882 «per mostrare elementarmente come la geometria degli spazi a più di tre dimensioni si possa svolgere in modo perfettamente analogo a quella del piano e dello spazio ordinario» (Veronese 1891, v). Quanto «elementari» siano le argomentazioni di Veronese può giudicare chiunque si sia cimentato nella lettura di quel volume (7).

Facendo propria la distinzione di Grassmann tra scienze reali e formali, Veronese (1891) comincia col distinguere tra scienze formali o esatte e scienze sperimentali; le prime riguardano enti astratti, le seconde fenomeni del mondo esterno. La geometria appare così essere una scienza «mista», costituita a partire da premesse empiriche (*gli assiomi*) frutto dell'osservazione degli oggetti del mondo esterno e da *postulati o ipotesi*, ossia da premesse semi-empiriche che hanno origine nell'osservazione empirica ma descrivono oggetti che sfuggono al campo dell'esperienza o da premesse astratte, relative ad oggetti che fuoriescono dal campo dell'esperienza, ma che tuttavia non devono essere in contraddizione con gli assiomi empirici.

Veronese sembra dunque muoversi (8) sul difficile crinale che porta dalle concezioni di Klein a quello che sarà l'assiomatica di Hilbert, prendendo al tempo stesso le distanze dal «signicismo» — come egli chiama il simbolismo peaniano. Infatti, se da un lato àncora l'origine degli assiomi geometrici ad un punto di vista empirista, dall'altro si muove in una direzione hilbertiana, affidando l'esistenza di oggetti astratti alla coerenza con gli assiomi empirici. Così, dopo essersi si dichiarato «pienamente d'accordo» con le vedute di Klein (1890b, 381) intorno alla natura degli assiomi, Veronese aggiunge: «Io mi esprimo invece dicendo che gli assiomi sono il risultato dell'intuizione e dell'astrazione insieme, che così sono formati gli oggetti geometrici, i quali non chiamiamo comunemente astratti ma intuitivi, dando la prevalenza all'intuizione» (Veronese 1891, 586).

(7) Per un'analisi dell'opera di Veronese sui fondamenti della geometria si veda Cantù (1999).
(8) Cfr. Brigaglia (1994, 240) e Cantù (1999, 192-193).

Come aveva detto Klein, anche per Veronese «ogni considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi» (Veronese 1891, 612). E d'altra parte, la costruzione di Veronese degli iperspazi si fonda sul concetto di «spazio generale», che «è dato da un sistema di punti tale che, data o costruita una figura qualunque, vi è almeno un punto fuori di essa le cui proprietà non dimostrabili derivano in parte dall'osservazione esterna ed in parte da principi astratti che non contraddicono alle prime» (Veronese 1891, 211).

Da qui discende la concezione «genetica» degli iperspazi, pensati generati a partire da S_3, che Veronese (1891, 611) ribadisce nei *Fondamenti di geometria*: «Dato lo spazio S_3, e un punto fuori di esso costruiamo lo spazio S_4, così analogamente lo spazio S_n assoggettandolo agli assiomi dello spazio generale». In tali spazi «il punto non è un sistema di numeri, né un oggetto qualsiasi, ma il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario; e gli oggetti composti di punti sono oggetti (figure) a cui applichiamo continuamente l'intuizione spaziale combinata con l'astrazione, e quindi col metodo sintetico».

Ma con ciò, obietta Segre, «mi pare che, mentre scema quella gran fecondità della geometria a più dimensioni, a cui ho accennato, si va incontro all'obbiezione che il punto, quale si concepisce nel nostro spazio, e appunto pel modo con cui lo concepiamo, non è più concepibile fuori di esso, ove potrebbe anche non esistere». Si capisce quindi l'interesse di Segre per la chiarificazione della struttura assiomatica della geometria proiettiva del piano e dello spazio secondo le idee di von Staudt e di Klein e l'estensione alla geometria proiettiva negli iperspazi.

L'obiezione annunciata da Segre sarà resa esplicita da Peano: i punti in un iperspazio non si possono considerare «tali e quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario» come pretende Veronese. Peano stesso aveva mostrato nei *Principii* che per passare da due a tre dimensioni occorre un opportuno assioma. Analogamente accade per le dimensioni superiori. Di più, nella recensione dei *Fondamenti di geometria* di Veronese, Peano (1892, 143) mette in luce l'assurdità logica insita nel «principio fondamentale» sul quale Veronese appoggia la sua definizione di spazio generale, che sta alla base della sua concezione «genetica» degli iperspazi, e conclude: «si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro tolgono ad esso ogni valore» (Peano 1892, 143).

Pur nella radicale diversità dei toni, le opinioni di Peano intorno alla definizione di Veronese degli iperspazi non sono dissimili da quelle di Segre, che infatti considera «legittima» l'obiezione mossa da Peano, mentre a suo avviso quell'obiezione «si toglie» se gli iperspazi si definiscono ricorrendo alle altre due definizioni che lo stesso Segre aveva ricordato. Le idee di Peano e Segre divergono invece sul modo di trattare gli iperspazi. Mentre Segre rivendica la fecondità dei metodi sintetici di Veronese in geometria iperspaziale, per Peano gli iperspazi non sono altro che varietà n-dimensionali, insiemi di n-ple di numeri, da studiare con le tecniche dell'algebra lineare.

Insieme ai fondamenti della geometria degli iperspazi, il contributo più noto del volume di Veronese consiste nell'analisi di un continuo non archimedeo, e nella possibilità dunque di considerare una geometria non archimedea. Questo è l'aspetto che Hilbert ha in mente quando nei *GG* parla del «profondo lavoro» di Veronese, che egli conosce in traduzione tedesca (Hilbert 1899, 48). Ma prima della pubblicazione dei *GG*, che sanciscono definitiva legittimità alla geometria non archimedea, una tra le possibili geometrie-*non* (non-arguesiana, non-pascaliana, non legedriana e così via) che si moltiplicano nelle pagine di Hilbert, la proposta di Veronese alimenta reazioni polemiche non solo da parte di Peano. La breve nota (Peano 1892a) sull'impossibilità di esistenza di segmenti infinitesimi attuali si inserisce infatti in una discussione più ampia e vivace che, com'è noto, coinvolge su posizioni diverse Cantor, Vivanti, Bettazzi e Levi-Civita.

Il volume di Veronese appare quando è ormai in stampa un lavoro di Fano, che insieme ad un analogo articolo di Amodeo (1891), raccoglie l'invito di Segre a fornire una trattazione assiomatica della geometria proiettiva negli iperspazi.

4. «A base del nostro studio — scrive Fano (1892, 108-109) ispirandosi apertamente a Segre — noi mettiamo una *varietà* qualsiasi di enti di qualunque natura, enti che chiameremo, per brevità, *punti* indipendentemente però, beninteso, dalla loro stessa natura». Fano introduce con un postulato la retta passante per due punti, definisce il piano come «l'insieme di tutti i punti contenuti nelle rette che congiungono i singoli punti di una retta data con un punto fisso ed assegnato ad arbitrio fuori dalla retta stessa» (Fano 1892, 109) ossia è ottenuto proiettando i punti della retta da questo punto fisso, e infine postula che la retta determinata da due punti di un piano sta tutta nel piano e che due rette di uno stesso piano hanno sempre un punto in comune. Stabilite le proprietà del piano, i successivi spazi S_3, S_4, …, S_r si possono ottenere ciascuno «come proiezione del precedente da un punto esterno ad esso» come in fondo aveva fatto Veronese «il tutto senza che occorra alcun nuovo postulato» osserva Fano (1892, 111), che si limita a rinviare al lavoro di Amodeo (1981) per i dettagli.

Un passo fondamentale nella costruzione di Fano è l'esistenza del quarto armonico. Egli se ne serve per definire il concetto di «sistema armonico» e di «serie armonica» e introdurre poi le coordinate su una retta (e poi nel piano e negli iperspazi) seguendo la via che era stata indicata da De Paolis (1881), «salvo alcune modificazioni» dovute essenzialmente al fatto che De Paolis si limitava allo spazio proiettivo ordinario mentre Fano ha in vista «un ordine di idee più generale».

Per dimostrare l'indipendenza dei postulati via via introdotti, in quel lavoro Fano si serve in maniera sistematica di esempi divenuti celebri. Lo scopo è diverso, ma la tecnica è la stessa che — all'oscuro del lavoro di Fano — Hilbert adotterà in maniera altrettanto sistematica nei *GG*. Così, per esempio, definito il concetto di gruppo armonico su una forma semplice fondamentale (una retta punteggiata o un fascio) Fano mostra che quarto armonico di tre elementi ABC o è per tutte le terne di elementi distinti un quarto elemento distinto D da essi oppure, per tutte le terne, coincide con C. La dimostrazione che quest'ultima possibilità è indipendente dai postulati enunciati è data dalla costruzione del celebre esempio di piano di 7 punti e 7 rette, che proiettato da un punto esterno ad esso dà luogo ad una configurazione spaziale di 15 punti, 15 piani e 35 rette. L'ipotesi che $C \equiv D$ è esclusa da un nuovo postulato: «esiste un gruppo armonico ABCD costituito da quattro elementi distinti» (Fano 1892, 115).

Analogamente, dati quattro punti allineati e distinti ABCD, Fano dimostra che è possibile che sia la quaterna data sia la quaterna ADBC siano entrambe armoniche, costruendo una configurazione di 13 punti e 13 rette per cui sono verificati tutti i postulati relativi al piano: «su ogni retta stanno 4 punti, per ogni punto passano 4 rette; gli uni e le altre, considerati in un ordine qualsiasi, formano sempre un gruppo armonico» (Fano 1892, 116). Da qui l'introduzione di un nuovo postulato per escludere questa possibilità, e così via.

Nello stesso anno, la questione dell'indipendenza dei postulati (nel caso della retta) viene ripresa da Giovanni Vailati, un altro giovane che gravita intorno alla figura di Peano. La tecnica adotttata da Vailati si basa sull'ordinamento dei punti della retta. Attraverso la relazione binaria «il punto b segue il punto a» Vailati (1892) riesce a esprimere la relazione ternaria «il punto c giace tra a e b» e le sue proprietà a partire da tre proposizioni primitive. «Ma questa riduzione non è applicabile ai punti dello spazio», osserva Peano (1894, 127) quando ritorna sulla questione che ne *I Principii* aveva ritenuto di risolvere facendo appello all'ordine in cui sono enunciati gli assiomi.

Come aveva esibito concretamente Fano, anche secondo Peano «si puo' provare l'indipendenza di alcuni postulati da altri mediante esempi». Allo scopo, egli attribuisce ai segni non definiti, che qui sono 1 e $c \in ab$, «dei significati affatto qualunque; e se si trova che i segni fondamentali, in questo nuovo significato, soddisfano ad un gruppo di proposizioni primitive, e non a tutte, si dedurrà che queste non sono conseguenze necessarie di quelle» (Peano 1894, 127). Quindi «per provare l'indipendenza di n postulati bisognerebbe portare n esempi di interpretazione dei segni non definiti, ciascuno dei quali soddisfi a $n-1$ postulati, e non al rimanente». Se in questo modo egli era riuscito a dimostrare l'indipendenza dei propri assiomi per i numeri naturali (Peano 1891b, 87), «qui invece siamo ben lungi dall'avere completata questa prova» (Peano 1894, 127). Peano fornisce alcuni esempi di interpretazione degli assiomi della retta, ma conclude che «in questo istante noi possiamo solamente affermare che non si sanno scomporre le proposizioni assunte per postulati in altre più semplici; né si è provata la loro indipendenza» (Peano 1894, 129).

Nell'ultima parte di questo lavoro Peano introduce la geometria metrica, in cui compare il concetto di figure congruenti, definisce gli assiomi del «moto» e, attraverso di esso, introduce la simmetria assiale, le traslazioni e le rotazioni. L'intento pedagogico di Peano è chiaro: la fiducia che «alcune delle osservazioni fatte possano essere utili per la pubblicazione di trattati elementari» si accompagna alla speranza che il suo lavoro possa contribuire a «rendere più esatte le definizioni e le dimostrazioni di Geometria elementare» (Peano 1894, 157).

Non dissimile è lo spirito con cui Peano nel 1898 sviluppa la teoria dei vettori a partire dalle idee primitive di punto, equidifferenza fra quattro punti (su cui si basa la definizione di vettore) e prodotto scalare di due vettori. «Poiché con questa teoria si può trattare l'intera Geometria, egli osserva ne deriva la possibilità teorica di sostituire alla Geometria elementare stessa, la teoria dei vettori» (Peano 1898, 187), Questo lavoro viene riprodotto nel tomo IV del *Formulaire Mathématique* apparso nel 1902. Nello stesso anno, in una breve nota Peano (1902) mostra come si possa tradurre nella teoria dei vettori la geometria elementare, che Pieri (1900, 254) aveva affermato potersi basare sulle sole idee primitive di punto e distanza di due punti. Come avviene per l'aritmetica, anche per i fondamenti della geometria le ricerche di Peano culminano nel *Formulario*, l'impresa che a cavallo del secolo impegna il logico torinese e i suoi allievi, una specie di enciclopedia delle teorie matematiche, espresse nel simbolismo peaniano e nel *latino sine flexione*.

5. Tra i «giovani geometri italiani» ai quali Segre si era rivolto presentando la traduzione del *Programma di Erlangen*, Federigo Enriques fu certo uno dei più pronti a cogliere le idee contenute in quello scritto e a metterle in pratica nei suoi primi lavori sulle trasformazioni birazionali del piano (Enriques 1893a, 1893b). Alle idee di Klein si ispira anche il piano di un corso di geometria negli spazi n-dimensionali che egli tiene su richiesta degli studenti e delinea in una lettera a Castelnuovo del novembre 1894: le lezioni «s'informerebbero ad un principio generale che completa quello di Klein (Programm) per far rientrare in quell'ordine d'idee vari altri tipi di ricerche (per esempio la geometria sull'ente) che ad esso sfuggono, almeno direttamente».

Lo stesso Castelnuovo (1947, xiii) ricordava che, cominciando dallo stesso anno ad insegnare la geometria proiettiva, Enriques «si avvide che nei fondamenti di quel ramo di geometria [«] sussisteva una lacuna». Enriques ne accenna nelle sue lettere all'amico (in: Bottazzini, Conte, Gario (a cura di) (1996, 149-151) (9) e, nell'intento di colmare tale lacuna, che riguardava la dimostra-

(9) Per brevità citato nel seguito come *Riposte armonie*.

zione di un fondamentale teorema di von Staudt, pubblica il suo primo lavoro esplicitamente dedicato all'analisi dei postulati della geometria. «A fondamento della geometria proiettiva stanno due ordini di concetti, cui si collegano due gruppi di postulati», afferma Enriques (1894, 141). Il primo gruppo riguarda i postulati della geometria di posizione, «ampiamente discussi» da Pasch e Peano nel caso del piano e dello spazio ordinario S_3, e da Veronese, Fano e Amodeo per gli iperspazi S_r. Tali postulati consentono di stabilire teoremi come quello di Desargues (quando $r \geqslant 3$) o di parlare di gruppi armonici e delle loro proprietà.

Ma per stabilire il teorema fondamentale della proiettività, ossia per introdurre le coordinate proiettive senza far ricorso a concetti metrici, occorre far riferimento ad un diverso ordine di concetti che, afferma Enriques (1894, 141), «si deve considerare come il fondamento di una *teoria della connessione* intesa in un senso più generale». A differenza di Fano (1891) e Amodeo (1891), l'intento di Enriques è di «stabilire i postulati desunti dall'intuizione sperimentale dello spazio che si presentano più semplici per definire l'oggetto della geometria proiettiva». E in una nota posta a commento della sua affermazione aggiunge: «Non intendiamo per altro di introdurre di quei concetti intuitivi niente più che le loro relazioni logiche, sicché la geometria così fondata può ancora ricevere una infinità di interpretazioni ove all'elemento «punto» di essa si attribuisca un arbitrario significato. Ci sembra soltanto che l'origine sperimentale della geometria non debba essere dimenticata nella ricerca delle ipotesi su cui essa è fondata» (Enriques 1894, 142).

Sono qui evidenti le tracce sia delle concezioni empiriche di Pasch, Peano e Klein, sia delle preoccupazioni di Segre di mantenere la più ampia libertà d'interpretazione degli enti fondamentali. Come egli ribadisce a Fano nella corrispondenza tra i due [10] che fa seguito a questo articolo, nello stabilire i propri postulati Enriques intende «seguire la via indicata dall'intuizione sperimentale». O meglio, come dirà qualche anno dopo, «contemperare le esigenze dello spirito logico coi vantaggi e colle attrattive che l'intuizione conferisce agli studi geometrici» (Enriques 1898a, v). Da parte sua, Fano è pronto a riconoscere che i suoi postulati «conducono soltanto a una *geometria proiettiva lineare*, e a uno spazio (di punti razionali) che ancora non corrisponde del tutto a ciò che i sensi ci dicono (*o a quello che noi crediamo ci dicano* [sott. U.B.])». Il passo che resta da compiere, concorda Fano, è appunto colmare la «lacuna» segnalata da Enriques.

Richiamate le nozioni preliminari che consentono di ottenere il teorema di Desargues e definire il concetto di gruppo armonico per una forma di prima specie, Enriques (1894, 144) dimostra che «se due forme di prima specie sono

(10) Corrispondenza, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **9** (1895), 79-85.

proiettive, ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponde un gruppo armonico dell'altra». La dimostrazione del teorema inverso dipende tuttavia dalla dimostrazione del teorema (di von Staudt) che «una corrispondenza biunivoca armonica tra due forme di prima specie sovrapposte, avente tre elementi *uniti* (coincidenti con gli omologhi) è *identica*». Da qui discende infatti l'esistenza e l'unicità di tale corrispondenza.

Enriques introduce un postulato per stabilire un ordine su una forma di prima specie e definisce il senso di una disposizione circolare della forma e le relative proprietà. Ma il punto cruciale preliminare alla dimostrazione del teorema di von Staudt — la «lacuna» rilevata da Enriques — è la necessità di un postulato di continuità (equivalente a quello di Dedekind ma indipendente da ogni determinazione metrica) che Enriques (1894, 151) enuncia per una forma di prima specie (una retta). Se un segmento ordinato AB di una tale forma è diviso in due parti tali che 1) ogni punto del segmento appartiene a una delle due parti, 2) l'estremo A appartiene alla prima parte e B alla seconda, 3) ogni elemento della prima parte precede ogni elemento della seconda, allora esiste *un* elemento C del segmento AB tale che ogni elemento (se esiste) di AB che precede C appartiene alla prima parte e ogni elemento (se esiste) di AB che segue C appartiene alla seconda. La dimostrazione del teorema di von Staudt segue poi per assurdo. Il contenuto di questo lavoro sarà poi inserito da Enriques nelle sue *Lezioni di geometria proiettiva* (1898a).

Lo stesso obiettivo di Enriques è perseguito da Pieri in tre successive note apparse tra il 1894 e il 1895. La trattazione di Pieri (1894-95) ha un carattere ben altrimenti sistematico. Nell'enunciare postulati e teoremi Pieri si serve della «nuova Arte Logica» introdotta da Peano. Egli propone un sistema di 19 postulati per la geometria proiettiva intesa come «una scienza deduttiva indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche» (in particolare dagli assiomi della geometria elementare), basata sui concetti primitivi di punto, retta e segmento proiettivi. Se il concetto primitivo di segmento individuato da tre punti consente a Pieri di definire l'ordine naturale e il senso di una retta seguendo una via diversa da quella di Enriques, la continuità è introdotta da Pieri mediante un postulato del tutto analogo a quello enunciato da Enriques (1894).

Adottando lo stesso punto di vista «puramente *deduttivo* ed *astratto*», nel dicembre del 1896 Pieri (1896-1899) ritorna sulla questione dell'assiomatizzazione della geometria proiettiva negli iperspazi, ancora un «soggetto di controversia per molti». Egli presenta un sistema di postulati che, unitamente agli assiomi della logica, sono sufficienti «a sostenere l'intero edifizio della geometria proiettiva astratta» ma non si spinge a discutere questioni di indipendenza e irriducibilità dei postulati, «condizioni queste, che toccano quasi alla perfezione ideale» (Pieri 1896-1899, 84). «Avanzando di un tratto ragguardevole nell'analisi di que' principi», qualche mese più tardi Pieri pubblica una una breve nota per mostrare la possibilità di fondare la «pura» geometria di posizione — e dunque anche le geometrie metriche che ne derivano, come aveva a suo tempo mostrato Klein (1871, 1873) — su due soli enti primitivi, il punto proiettivo e la congiungente due punti proiettivi (Pieri 1896-97). Il sistema di 16 postulati proposti da Pieri consente di stabilire il teorema fondamentale della proiettività (e dunque di introdurre coordinate proiettive) senza ricorrere a concetti come l'ordine naturale dei punti di una retta, come aveva fatto Enriques. In questo modo, conclude Pieri (1896-97, 99) la distinzione tra «proprietà di configurazione» (cioè le proprietà di mutua appartenenza di punti, rette e piani) e «proprietà di connessione» — come Enriques (1894) aveva chiamato le proprietà relative al mutuo separarsi degli elementi fra loro — «non risponde più ad alcuna diversità reale intrinseca».

L'ampia memoria (Pieri 1897-1898) in cui, nell'ottobre del 1897, Pieri raccoglie e ordina i risultati delle sue ricerche «in un tutto più coerente ed organico» non contiene risultati essenzialmente nuovi. Per far conoscere i suoi risultati a un maggior numero di studiosi, pur riconoscendo «l'utilità di un buon algoritmo ideografico» quale è quello messo a punto da Peano, Pieri rinuncia al simbolismo peaniano per attenersi «alle consuete forme del dire», il linguaggio naturale insomma. Nel motivare le sue ricerche Pieri prende le distanze dalla concezione empirista per affermare «un più moderno criterio», che conduce ad una geometria proiettiva «in tutto speculativa e astratta, i cui soggetti sono mere creazioni del nostro spirito, e semplici atti della nostra volontà i postulati», in una parola, «arbitrari gli uni e gli altri» (Pieri 1897-1898, 102). La geometria proiettiva è per Pieri una «scienza *ipotetica*», del tutto indipendente, nel metodo e nelle premesse, dall'intuizione, e che si affida invece «ai canoni del metodo strettamente deduttivo». Ne consegue che «il contenuto ideale delle parole o dei segni, che denotano un qualche soggetto primitivo, è determinato soltanto dalle prop[osizion]i primit[iv]e che versano intorno al medesimo: e il Lettore ha la facoltà di annettere a quelle parole e a que' segni un significato *ad libitum*, purchè questo sia compatibile con gli attributi generici imposti a quell'ente dalle propos[izion]i primit[iv]e» (Pieri 1897-1898, 106). Il rimando di Pieri all'affermazione di Pasch (1882, 90) riportata sopra (§ 2) non attenua la radicale differenza dei loro punti di vista.

Anche il contrasto con le concezioni di Enriques è sottolineato dalla contemporanea pubblicazione delle *Lezioni di geometria proiettiva*, tanto più che in quel trattato Enriques presenta le idee sulla natura dei principi della geometria che egli era venuto elaborando in quegli anni come parte essenziale della sua filosofia «scientifica». Nel maggio del 1896 aveva comunicato infatti a Castelnuovo di aver cominciato ad occuparsi di una «questione che dalla matematica prende solo il pretesto: sentendone il nome tu proverai più orrore che stupore», egli confida all'amico. «Si tratta del "problema filosofico dello spazio"» (*Riposte armonie*, 260).

La geometria, egli scrive nelle *Lezioni*, studia il concetto di spazio «senza porsi il problema (psicologico ma non matematico) della sua genesi» (Enriques 1898a, v). Ma tale problema si presenta nella scelta degli «elementi fondamentali» che è dettata dal criterio di semplicità rispetto all'intuizione psicologica. Rispetto a chi, come Peano (e Pieri), riteneva che dovevano essere il minor numero possibile, Enriques obietta che tale criterio «non ha valore imperativo e non soddisfa sempre il senso psicologico dell'intuizione». È quest'ultimo, prima ancora che l'astrattezza o il rigore, il criterio che secondo Enriques deve orientare la ricerca nelle questioni di fondamenti.

Ispirato ad una «filosofia» diametralmente opposta alle vedute di Pieri è anche il suo progetto di articolo sui «Principi della geometria» per l'Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften, alla quale Enriques è stato invitato a collaborare. Dopo la lettura delle lezioni di Klein (1892), Enriques elabora uno schema che si ispira apertamente delle vedute del geometra di Gottinga: «1) Principi dell'ordinaria Geometria metrica, da Euclide a Legendre, Leibnitz, Bolyai, Lobatschewsky, Veronese. 2) Principi della Geometria proiettiva e subordinazione della metrica. 3) Il problema dei fondamenti secondo Riemann (ds^2). 4) Il problema gruppale Helmholtz-Lie» (*Riposte armonie*, 364).

In questo ambito di problemi, la rilettura della memoria di Riemann (1854) suggerisce a Enriques la seguente ricerca che egli sottopone a Castelnuovo: «Sai che Riemann genera la superficie col moto d'una linea l. Considerando le posizioni di l e le traiettorie m dei punti di essa si ottengono così *per dato*, sopra la superficie, due fasci di linee. Ma è facile persuadersi che (se sulle dette linee non vi è alcuna determinazione metrica) non si può dedurre di qui l'esistenza di alcuna altra linea, e tanto meno introdurre sopra la superficie delle coordinate. Qualche postulato esistenziale occorre all'uopo?

Io credo di poter stabilire che si possono introdurre le coordinate sulla superficie appena si ammette l'esistenza di un *terzo fascio* di linee sopra la superficie» (*Riposte armonie*, 366). Quello che Enriques anticipa qui a Castelnuovo è in contenuto essenziale dell'articolo Enriques (1898b).

Nella corrispondenza con Castelnuovo affiorano tracce del «lavoro interminabile» di Enriques per la redazione dell'articolo per Enzyclopädie. Così per esempio il 28 gennaio 1899 egli scrive all'amico di essersi imbattuto nella «questione se esiste una superficie dello S_3 ordinario sopra la quale valga la Geometria del piano iperbolico o ellittico completo. In proposito ho avuto una corrispondenza col Bianchi che mi ha fatto rilevare tutta la difficoltà del problema (insoluto), che si riattacca alla questione dei limiti degli integrali delle equazioni a derivate parziali» (*Riposte armonie*, 398). È il problema che sarà risolto da Hilbert (1901), in una nota riprodotta come appendice ai *GG* a partire dalla seconda edizione.

In quel «lavoro interminabile» Enriques trova in Klein un interlocutore autorevole e prezioso. A lui sottopone il programma dell'articolo durante una sua visita a Bologna alla fine del marzo 1899 («sono stato lieto di vederlo soddisfatto» scrive Enriques a Castelnuovo). A sua volta, Klein suggerisce a Enriques di rivolgersi a Hilbert. «Il prof. Klein, col quale ho avuto la fortuna di trovarmi nei giorni scorsi — scrive Enriques a Hilbert il 1 aprile 1899 — mi ha incoraggiato a scriverle per domandarle notizia dei più recenti lavori del sig. Minkhowsky [sic] in quanto può interessare i fondamenti della geometria. Desidererei specialmente di sapere se qualche cosa sia stato da lui pubblicato in relazione alla definizione della lunghezza di una linea come quoziente differenziale di due aree (11), concetti di cui il sig. Klein mi ha intrattenuto; giacché non vorrei tralasciare di parlarne nel rapporto che sto redigendo per l'Enciclopedia matematica sui Principi della geometria». (12)

È lo stesso Klein a suggerire ad Enriques «che nell'Introduzione alla Geometria Analitica dello Schur vi sono alcune considerazioni (di cui dovrei tener conto) sui fondamenti della Geometria proiettiva, e segnatamente su ciò che il teorema di Pascal ha relazione colla proprietà commutativa della moltiplicazione» (*Riposte armonie*, 408), un tema che viene ampiamente trattato da Hilbert nel cap. VI dei *GG*. È ancora Klein, con il volumetto di conferenze (Klein 1895) tradotto in italiano da Giudice, a fornire a Enriques l'idea iniziale per il suo volume di *Questioni* (Enriques 1900) dove trovano spazio, per mano di Castelnuovo, le considerazioni che Hilbert svolge nei *GG* sulle costruzioni con riga e compasso e compasso ad apertura fissa. È infatti da Castelnuovo che Enriques ha notizia dell'avvenuta pubblicazione verso la metà di giugno dei *GG*, e l'8 luglio 1899, «incoraggiato dalla gentilezza della sua ultima cartolina» si rivolge direttamente al matematico di Gottinga pregandolo di inviargli una copia della sua «memoria molto importante sui fondamenti della geometria» perché «vorrei (giacché sono in tempo) tenerne conto per il mio articolo dell'enciclopedia».

6. Quando il *Festschrift* in onore di Gauss e Weber — che contiene i *GG* di Hilbert — appare a stampa, Pieri ha da un paio di mesi ultimato la redazione della sua memoria (Pieri 1898-1899) sulla geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo. È naturale che non sia menzionata da Hilbert. I soli autori

(11) Si tratta di un lavoro che Minkowski pubblicherà nel Mathematische Annalen del 1901. In realtà, data una curva C Minkowski considera per ogni suo punto una sfera di raggio r fissato. L'insieme di tutti i punti dello spazio, che costituiscono l'interno o il bordo di almeno una di queste sfere definiscono il «dominio di distanza $\leqslant r$» della curva C. Sia $V(r)$ il suo volume, nel caso esista un volume determinato. Minkowski definisce il lim $V(r)/\pi r^2$ per r che tende a zero (se esiste) come la lunghezza della curva e mostra poi che invece di sfere si possono considerare corpi convessi.

(12) La lettera inedita è conservata nel Nachlass di Hilbert. Colgo l'occasione per ringraziare la Niedersächesiche Stadt-u.Universitätsbibliotek di Göttingen per avermi messo a disposizione copia del carteggio tra Enriques e Hilbert.

moderni citati nell'introduzione alla prima edizione dei *GG* sono Klein (1898) e Veronese (1994). Di Veronese Hilbert ricorda inoltre il tentativo di costruzione di una geometria non-archimedea quando si accinge a dimostrare l'indipendenza dell'assioma di Archimede. Forse meno naturale è il fatto nessun altro lavoro dei geometri italiani sia citato nei *GG*. Anche nei corsi tenuti da Hilbert nel decennio precedente la pubblicazione dei *GG* sono occasionalmente citati solo le traduzioni in tedesco di lavori di Loria (1888) e Peano (1891c) (cfr. Toepell 1986). Cosa concluderne?

Affermare che Hilbert era all'oscuro dell'intenso dibattito sui fondamenti della geometria che si era sviluppato nell'ultimo decennio al di qua delle Alpi risponde probabilmente al vero, ma è una risposta parziale. Il fatto è che le sue motivazioni e i suoi obiettivi erano diversi, così come diversi tra loro erano quelli dei geometri italiani.

Dopo la chiamata a Gottinga fino al 1897 Hilbert si occupa solo di teoria dei numeri. L'interesse per i fondamenti della geometria, argomento di un corso tenuto a Königsberg nell'estate 1894, riappare in un corso di lezioni «sul concetto di infinito» che Hilbert tiene per gli insegnanti di scuole secondarie nelle vacanze pasquali del 1898. Ma al contrario dei geometri italiani, Hilbert non è interessato ai fondamenti della geometria proiettiva, tanto meno alla geometria degli iperspazi. E neppure all'origine intuitiva o psicologica dei postulati geometrici cui pensavano Klein o Enriques. La seconda parte di quel corso sull'infinito è dedicata alla geometria euclidea e lascia intravedere quali siano gli interessi di Hilbert.

A differenza di Peano o di Pieri, Hilbert non si preoccupa di ricercare il minimo numero di assiomi necessari per costruire la geometria euclidea. Egli tratta degli assiomi di conguenza, il trasporto di segmenti e di angoli, e i teoremi di congruenza dei triangoli, mentre lascia aperta la questione della dipendenza del teorema di Desargues dagli assiomi piani di congruenza. La domanda che si pone, e che pone a lezione, è invece: «Come si può mostrare che una proposizione in sé giusta è indimostrabile con certi mezzi?»

Nel caso del teorema di Desargues egli trova la risposta nel dicembre 1898. Hilbert sta tenendo un corso sui fondamenti della geometria euclidea (che apparirà litografato nel marzo 1899) e il 31 dicembre comunica a Hurwitz le «scoperte meravigliose» alle quali è giunto. «La più importante — scrive Hilbert — è il risultato che ho trovato di recente e che consiste nel fatto che è effettivamente possibile costruire la geometria euclidea esclusivamente sul fondamento dei teoremi di congruenza piani e dell'assioma delle parallele (dunque della cosiddetta *Schulgeometrie*) in modo tale che anche *senza continuità* (*cioè senza assioma di Archimede* [cors. U.B.]) siano effettivamente dimostrabili tutti i teoremi sull'intersezione di altezze nei triangoli, tutti i teoremi sulle similitudini etc. Che questa dimostrazione non sia a portata di mano, ma veramente nascosta in profondità, lo verificherà se proverà a dimostrare per es. il teorema di

Desargues con l'aiuto dei teoremi di congruenza e dell'assioma di continuità» (in: Toepell 1986, 198-199). Infatti, come Hilbert mostrerà nei *GG,* si può costruire una geometria piana nella quale sono soddisfatti tutti gli assiomi lineari e piani, compresi l'assioma delle parallele e l'assioma di Archimede, fatta eccezione dell'assioma III 5 di congruenza dei triangoli, ma nella quale non vale il teorema di Desargues.

Del resto, il commento di Klein alla pubblicazione del lavoro di Hilbert fu che «lo scopo principale dei *GG* rispetto a ricerche precedenti è di stabilire il significato degli assiomi di continuità per la geometria». Si potrebbe aggiungere, con Freudenthal, che «i cosiddetti assiomi di continuità sono introdotti da Hilbert per mostrare che sono propriamente superflui». Questo era il «fatto straordinario» che Hilbert aveva comunicato per lettera a Hurwitz. Occorre osservare a questo proposito che nella prima edizione dei *GG* l'assioma di continuità era dato dal solo assioma di Archimede. Solo a partire dalla traduzione francese, e poi in tutte le successive edizioni dei *GG* Hilbert affianca all'assioma di Archimede un assioma di completezza. «Del resto, aggiunge Hilbert in nota, nel corso delle presenti ricerche non ci siamo serviti in alcun luogo di questo "assioma di completezza"» (in Hilbert 1971, 44).

La ricerca dei legami profondi che intercorrono tra i teoremi e gli assiomi indispensabili alla loro dimostrazione. È questo l'obiettivo che Hilbert esplicita nei *GG*. Col nuovo secolo le strade di Hilbert e dei matematici italiani, che pure non si erano mai incontrate divergono defintivamente. Così, mentre Peano si consacra alla realizzazione del Formulario, Pieri considera raggiunto lo scopo di minimizzare il numero dei concetti primitivi e degli assiomi, Enriques si dedica all'indagine più filosofica che matematica sull'origine dei postulati, Hilbert indica ai suoi allievi un concreto terreno di ricerca matematica ([13]).

([13]) Come è noto, contrariamente a quanto accadde in altri paesi, la traduzione italiana dei GG si è avuta solo nel 1970, quando l'opera di Hilbert aveva più che altro un interesse storico.

BIBLIOGRAFIA

F. Amodeo, *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno S_r*, Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, **26** (1891), 741-770.

M. Borga - P. Freguglia - D. Palladino, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, 1985.

U. Bottazzini, *Va' pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento*, Bologna, 1994.

U. Bottazzini - A. Conte - F. Gario (a cura di), *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo,* Torino, 1996.

A. BRIGAGLIA, *Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia*, in: *Istituto Veneto di Scienze, Lettere e arti, Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento*, Atti del III seminario di storia delle scienze, Venezia, 1994.

P. CANTÙ, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano, 1999.

G. CASTELNUOVO, *Commemorazione del socio Federigo Enriques*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (8) **2** (1947), 3-21 (F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. 1, iii-xxii).

A. CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie* Bd. 2, hersg. von F. Lindemann, Leipzig, 1891.

R. DE PAOLIS, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, *Memorie dell'Accademia dei Lincei*, **9** (1881), 489-503.

F. ENRIQUES, *Sui gruppi continui di trasformazioni nel piano*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (5), **2** (1893a), 468-473 (F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. 1, 1-7).

F. ENRIQUES, *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (5) **2** (1893b), 532-538 (F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. 1, 9-15).

F. ENRIQUES, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (2) **27** (1894), 550-567 (F. Enriques, *Memorie scelte,* vol. 1, 141-157).

F. ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologna, 1898a.

F. ENRIQUES, *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **12** (1898b), 222-239.

F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, 1900.

F. ENRIQUES, *Prinzipien der Geometrie*, Encykl. Math. Wissenschaften, III, **1**, **1** (1907), 1-129.

G. FANO, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di Matematiche, **30** (1892), 106-132.

T. HAWKINS, *The Erlanger Programm of F. Klein. Reflections on its place in the history of mathematics*, Historia Mathematica, **11** (1984), 442-470.

D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899.

D. HILBERT, *Ueber Flächen von konstanter Gaussscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc., **2** (1901), 87-99.

D. HILBERT, *Fondamenti della geometria*, Milano, 1970.

D. HILBERT, *Les fondements de la géometrie*, Edition critique avec introduction et complemets préparée par Paul Dossier, Paris, 1971.

F. KLEIN, *Ueber die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie I*, Mathematische Annalen, **4** (F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 254-305) 1871.

F. KLEIN, *Ueber die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie II*, Mathematische Annalen **6** (F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 311-343) 1873.

F. KLEIN, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Annali di Matematica pura e applicata (2), **17** (1890a), 307-343.

F. KLEIN, *Zur Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen, **37** (F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 353-383) 1890b.

F. KLEIN, *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*, hrsg. von F. Schilling, 2 Bde, Leipzig, 1892.

F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, hrsg. Von F. Tägert, Leipzig (trad. it.: *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*, Torino) 1895.

F. KLEIN, *Gutachten, betreffend den dritten Band der Teorie der Transformationsgruppen anlässich der ersten Verteilung des Lobacevskij-Preises*, Bull. Soc. Phys. Math. Kasan (2), 8 (F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, 384-401) 1898.

B. LEVI - M. PIERI, *Bollettino di Bibliografia e storia delle scienze matematiche*, **15** (1913), 65-69 (B. Levi, *Opere 1897-1926*, a cura dell'U.M.I., vol. 2, 771-775).

G. LOLLI, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Bologna, 1985.

G. LORIA, *Die hauptsächlisten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwicklung*, Leipzig, 1888.

M. PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882.

G. PEANO, *Arithmetices Principia nova methodo exposita*, Aug. Taurinorum, Ed. Fratres Bocca (G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. 2, 20-55) 1889a.

G. PEANO, *I Principii di geometria logicamente esposti*, Torino, 1889b (G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. 2, 56-91).

G. PEANO, *Sul concetto di numero*, Rivista di Matematica, **1** (1891a), 87-102; 256-267 (G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. 3, 80-109).

G. PEANO, *Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente*, Rivista di Matematica, **1** (1891b), 66-69.

G. PEANO, *Die Grundzüge des geometrischen Kalküls*, Leipzig, 1981c.

G. PEANO, *Recensione al volume di G. Veronese Fondamenti di geometria a più dimensioni*, Rivista di Matematica, **2** (1892), 143-144.

G. PEANO, *Sui fondamentidella geometria*, Rivista di Matematica, **4** (1894), 51-90 (G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. 3, 115-157).

G. PEANO, *Analisi della teoria dei vettori*, Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino **33** (1898), 513-534 (G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. 3, 187-207).

G. PEANO, *La geometria basata sulle idee di punto e distanza*, Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, **38** (1902), 6-10 (G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. 3, 268-272).

G. PEANO, *Super theorema de Cantor-Bernstein*, Rivista di Matematica, 8 (1906), 136-143 (G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I, vol. 1, 337-344).

M. PIERI, *Sui principi che reggono la geometria di posizione. Nota I, Nota II, Nota III*, Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, **30** (1894-1895), 607-641; **31**(1894-1895), 381-399; **31** (1894-1895), 457-470 (M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 13-82).

M. PIERI, *Un sistema di postulati per la geometria proiettiva astratta degli iperspazi*, Rivista di Matematica, **6** (1896-1899), 9-16 (M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 83-90).

M. PIERI, *Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta*, Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino **32** (1896-1897), 343-351 (M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 91-99).

M. PIERI, *I principi della geometria di posizione composti in un sistema logico deduttivo*, Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino (2), **48** (1897-98), 1-62 (M. Pieri, *Opere su i fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 100-162).

M. PIERI, *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto*, Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino (2)

49 (1898-99), 173-222 (M. Pieri, *Opere su i fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 183-234).

M. PIERI, *Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique*, Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, III (1900), 367-404 (M. Pieri, *Opere su i fondamenti della matematica*, a cura dell'U.M.I., 235-272).

E. SCHRÖDER, *Der Operationskreis der Logikkalküls*, Leipzig, 1877.

C. SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino (2), **36** (1883a), 87-157 (C. Segre, *Opere*, a cura dell'U.M.I, vol. 3, 25-126).

C. SEGRE, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino (2), **36** (1883b), 87-157 (C. Segre, *Opere*, a cura dell'U.M.I, vol. 3, 127-217).

C. SEGRE, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, Rivista di Matematica, **1** (1891), 42-66 (C. Segre, *Opere*, a cura dell'U.M.I, vol. 4, 387-412).

M. M. TOEPELL, *Ueber die Entstehung von David Hilberts 'Grundlagen der Geometrie*, Göttingen, 1877.

G. VAILATI, *Sui principi fondamentali della geometria della retta*, Rivista di Matematica, **2** (1892), 71-75.

G. VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschieden Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, Mathematische Annalen, **19** (1882), 161-234.

G. VERONESE, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova, 1891.

G. VERONESE, *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementar Form entwickelt*, Leipzig, 1894.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo
Via Archirati 34 - 90123 Palermo, Italia; e-mail: bottazzi@math.unipa.it