

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

F. TALAMUCCI

## Processi di filtrazione in un mezzo poroso con interazioni fra il liquido e la matrice porosa

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 4-B (2001),  
n.2, p. 365–380.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2001\\_8\\_4B\\_2\\_365\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_2_365_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Processi di filtrazione in un mezzo poroso con interazioni fra il liquido e la matrice porosa.

F. TALAMUCCI (\*)

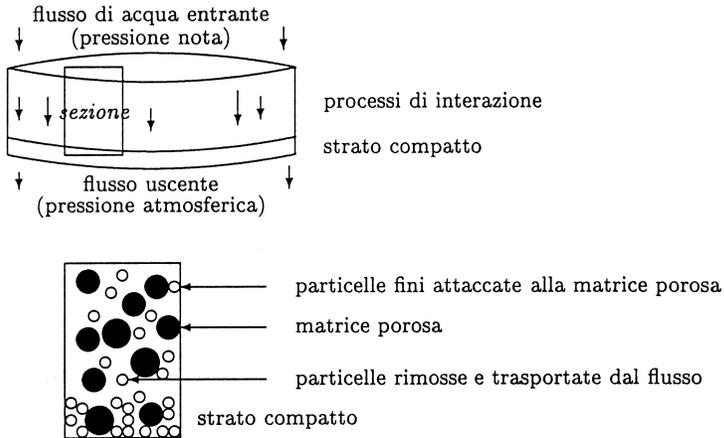
**Summary.** – *A model of filtration in a multispecies porous medium accompanied by a strong interaction between the flow and the porous matrix is presented. The species removed by the flow are both fine particles and other substances which diffuse in the liquid. The accumulation of the migrating particles in proximity of the outflow surface gives rise to the formation of a compact layer with high hydraulic resistance. The corresponding mathematical model consists in a set of partial differential equations of hyperbolic and parabolic type, to be solved in a free domain: the free boundary is the surface separating the compact layer from the rest of the medium. Under specific assumptions, which are expressive from the physical point of view, a result of existence (globally in time) and uniqueness of the solution can be proved, by means of fixed point techniques. Finally, some qualitative aspects of the solution are examined.*

### 1. – Il problema fisico.

Il modello matematico di filtrazione in un mezzo poroso è stato formulato nell'ambito di un programma di ricerca in collaborazione con la illicaffè di Trieste. Lo scopo è stato quello di comprendere i complessi fenomeni che hanno luogo durante la filtrazione di acqua attraverso uno strato di caffè macinato, posto all'interno di una macchina espresso. La caratteristica principale del processo consiste in una forte interazione di tipo chimico e meccanico tra il liquido che percorre il mezzo poroso e i componenti del mezzo stesso.

(\*) Comunicazione presentata a Napoli in occasione del XVI Congresso U.M.I.

La situazione sperimentale può essere schematizzata nel modo rappresentato dalla seguente figura:



Nella illustrazione, il cilindro schematizza lo strato di caffè macinato posto nella macchina espresso, il rettangolo rappresenta una sezione trasversale.

Viene indotto un flusso di acqua a temperatura elevata ( $90^{\circ}\text{C}$ ) mediante una pressione sul lato superiore del mezzo (tipicamente 9 bars). Il passaggio del liquido provoca la rimozione e l'estrazione di sostanze dal mezzo poroso e infine fuoriesce dalla parete opposta. Se la temperatura dell'acqua viene abbassata a pochi gradi ( $4^{\circ}\text{C}$ ), il processo di estrazione risulta drasticamente ridotto e l'aspetto puramente meccanico di filtrazione viene messo in evidenza. Tuttavia, anche in questo caso il fenomeno risulta particolarmente complesso: l'approccio sperimentale ha messo in luce dei comportamenti decisamente non-standard rispetto a processi di filtrazione di tipo Darcy.

La ragione principale delle atipicità riscontrate vengono attribuite al cambiamento strutturale che provoca il passaggio del liquido attraverso il mezzo: si è potuto infatti osservare che durante la filtrazione le componenti più fini vengono rimosse dalla matrice porosa ([6]). L'accumulazione di esse in prossimità della parete di uscita dà luogo alla formazione di uno strato compatto, caratterizzato da una elevata resistenza idraulica, in cui lo spazio poroso è quasi interamente occupato dai componenti fini rimossi.

## 2. - Il modello matematico.

Lo scopo principale del modello qui presentato è quello di riunire vari aspetti del processo analizzati separatamente in modelli precedenti [2, 3, 8], rimuovendo al tempo stesso alcune ipotesi semplificatorie.

L'approccio utilizzato è quello della meccanica dei continui. Si assume che il processo possa essere descritto da un modello unidimensionale, come suggerisce il processo fisico, in cui la filtrazione risulta essere predominante nella direzione verticale.

### 2.1. Definizione delle variabili del modello.

L'ipotesi di base consiste nel poter individuare nel mezzo poroso una parte indeformabile che non interagisce con il liquido, sulla quale sono attaccate varie specie di particelle e sostanze che possono essere rimosse dal flusso. Per indicare la concentrazione (massa per unità di volume dell'intero sistema) delle  $n$  specie presenti, conviene utilizzare due notazioni differenti: con  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  si indica la concentrazione della specie  $i$  quando è attaccata alla matrice porosa ( $b$  sta per «bound»), con  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si indica la concentrazione della specie  $i$  quando è trasportata dal flusso ( $m$  sta per «moving»).

In termini volumetrici, si introducono le variabili

$$(1) \quad \begin{cases} \theta_i = b_i/\varrho_i, & i = 1, \dots, n, \\ \eta_i = m_i/\varrho_i, & i = 1, \dots, n, \\ \eta_w = m_w/\varrho_w & \text{acqua,} \end{cases}$$

dove  $\varrho_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  indica la densità specifica della sostanza (massa per unità di volume della medesima sostanza),  $\varrho_w$  quella dell'acqua.

Si introduce la seguente suddivisione fra le  $n$  specie:

- gli indici  $i = 1, \dots, k < n$  si riferiscono a particelle solide fini, trasportate convettivamente dal flusso se rimosse;
- gli indici  $i = k + 1, \dots, n$  sono relativi a sostanze di tipo oleoso che, una volta rimosse, si dissolvono nel liquido come soluti o gocce.

La porosità, in base all'ipotesi di saturazione del mezzo, viene definita da

$$(2) \quad \varepsilon = \eta^{(k)} + \eta_w \quad \eta^{(k)} = \sum_{i=k+1}^n \eta_i.$$

Chiamando poi con  $V_{m_i}$  and  $V_w$  le velocità delle specie  $m_i$  e dell'acqua rispettivamente, troviamo la seguente espressione per la velocità volumetrica complessiva del liquido:

$$(3) \quad q = \eta_w V_w + \sum_{i=k+1}^n \eta_i V_{m_i}.$$

Si definiscono inoltre le frazioni volumetriche cumulative

$$(4) \quad \eta_{(k)} = \sum_{i=1}^k \eta_i, \quad \theta_{(k)} = \sum_{i=1}^k \theta_i, \quad \theta^{(k)} = \sum_{i=k+1}^n \theta_i,$$

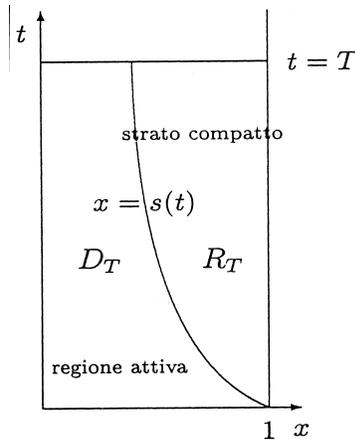
e  $\theta_0 = \theta_0(x)$  come frazione di volume (rispetto al volume unitario del sistema totale) dello scheletro poroso rigido. Il volume complementare a (2), occupato dai componenti solidi, è dunque

$$(5) \quad 1 - \varepsilon = \eta_{(k)} + \theta_0 + \theta^{(k)} + \theta_{(k)}.$$

La formazione dello strato compatto comporta l'introduzione nel modello di una frontiera libera  $s(t)$  che separa le due zone

$$(6) \quad \begin{aligned} D_T &= \{(x, t): 0 < x < s(t), 0 < t < T\} \\ R_T &= \{(x, t): s(t) < x < 1, 0 < t < T\} \end{aligned}$$

corrispondenti rispettivamente alla parte del mezzo dove avviene la rimozione e allo strato compatto. Lo spessore del mezzo poroso è posto pari a 1.



Chiamiamo ora  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  le concentrazioni delle particelle fini in  $R_T$ . Un modo semplice ma ragionevole di caratterizzare la configurazione compatta dello strato consiste nel porre

$$(7) \quad \sum_{i=1}^k \frac{M_i}{\varrho_i} = \Theta,$$

con  $\Theta$  quantità costante e nota che rappresenta il massimo volume a disposizione occupato dalle particelle fini.

## 2.2. Lo schema completo delle equazioni del modello.

Si scrivono ora le equazioni del modello, che saranno brevemente commentate appena sotto (per maggiori dettagli, vedi [4]):

$$(8) \quad \frac{\partial m_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( m_i \frac{q}{\varepsilon} \right) = - \frac{\partial b_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, k, (x, t) \in D_T,$$

$$(9) \quad \frac{\partial m_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -D_i \varepsilon \frac{\partial m_i}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( m_i \frac{q}{\varepsilon} \right) = - \frac{\partial b_i}{\partial t},$$

$$i = k + 1, \dots, n, \quad (x, t) \in D_T \cup R_T,$$

$$(10) \quad q = -K(b, m, \varepsilon) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (x, t) \in D_T \cup R_T,$$

$$(11) \quad \frac{\partial b_i}{\partial t} = -F_i(q, b) G_i[b_i - \beta_i(q, b)]^+, \quad i = 1, \dots, k, (x, t) \in D_T$$

$$(12) \quad \frac{\partial b_i}{\partial t} = -H_i(q, b), \quad i = k + 1, \dots, n, (x, t) \in D_T \cup R_T,$$

$$(13) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} \theta^{(k)}, \quad (x, t) \in D_T \cup R_T,$$

$$(14) \quad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^k \left( \alpha_i \eta_i \frac{q}{\varepsilon} \right) = 0, \quad (x, t) \in D_T \cup R_T.$$

Le incognite del problema (8)-(26) sono le concentrazioni  $b_i(x, t)$ ,  $m_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  (o, equivalentemente, i volumi specifici  $\theta_i$ ,  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , in base a (1)), il flusso volumetrico  $q(x, t)$ , la porosità  $\varepsilon(x, t)$ , la pressione del liquido  $p(x, t)$  e la frontiera libera  $s(t)$ .

Le equazioni (8) e (9) sono i bilanci di massa per le  $n$  specie. Per le particelle fini (eq. (8)) si assume che vengano trasportate in modo convettivo alla velocità  $V = q/\varepsilon$ . Le rimanenti specie  $i = k + 1, \dots, n$  possono diffondersi nel liquido con un coefficiente di diffusione  $D_i > 0$  supposto costante (eq. (9)). Mentre la rimozione di particelle fini avviene solamente in  $D_T$ , il processo di diffusione ha luogo anche nello strato compatto  $R_T$ .

L'equazione costitutiva (2) regola il flusso di liquido in funzione del gradiente di pressione. Dal punto di vista modellistico, è importante la dipendenza della conducibilità idraulica  $K$  dalla porosità e da tutte le concentrazioni  $b = (b_1, \dots, b_n)$  e  $m = (m_1, \dots, m_n)$ . Si assume inoltre che  $K \equiv K_c$ , con  $K_c$  costante positiva, se  $(x, t) \in R_T$ .

Le equazioni (11) e (12) regolano la cinetica di rimozione delle specie: un punto cruciale del modello consiste nell'introduzione delle concentrazioni di soglia  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , che dipendono in modo decrescente dal flusso  $q$ . Le funzioni empiriche  $F$ ,  $G$  e  $H$  dipendono da tutto il vettore delle concentrazioni per via di possibili interazioni fra specie differenti.

Le equazioni di bilancio di tipo cumulativo (13) e (14) sono ottenute utilizzando i singoli bilanci di massa (8) e (9) e le relazioni volumetriche (1), (2) e (5). In particolare, (13) esprime in sostanza la saturazione del mezzo, dato che la variazione della porosità è dovuta solo al flusso entrante o uscente e alla dissoluzione delle specie diffusive  $i = k + 1, \dots, n$ . La (14) è la conservazione del flusso totale (flusso  $q$  e flusso di particelle fini).

Le condizioni iniziali e al bordo sono le seguenti:

$$(15) \quad m_i(x, 0) = m_{i,0}(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in [0, 1],$$

$$(16) \quad \varepsilon(x, 0) = \varepsilon_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$(17) \quad b_i(x, 0) = b_{i,0}(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in [0, 1],$$

$$(18) \quad m_i(0, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$(19) \quad D_i \varepsilon(0, t) \frac{\partial m_i}{\partial x}(0, t) = \frac{q(0, t) m_i(0, t)}{\varepsilon(0, t)}, \quad i = k + 1, \dots, n, \quad 0 < t < T,$$

$$(20) \quad [p] = 0, \quad x = s(t),$$

$$(21) \quad \left[ \frac{m_i}{\varepsilon} \right] = 0, \quad x = s(t), \quad i = k + 1, \dots, n,$$

$$(22) \quad \left[ D_i \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{m_i}{\varepsilon} \right] = 0, \quad x = s(t), \quad i = k + 1, \dots, n,$$

$$(23) \quad (\Theta - (\eta_{(k)} + \theta_{(k)})) \dot{s} = - \frac{q}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k \alpha_i \eta_i, \quad x = s(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$(24) \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{m_i}{\varepsilon}(1, t) = 0, \quad i = k + 1, \dots, n,$$

$$(25) \quad p(0, t) = p_0(t) > 0, \quad p(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$(26) \quad s(0) = 1.$$

Le condizioni (15)-(18), (20), (25) e (26) non necessitano alcun commento.

L'equazione (19) corrisponde ad assumere che le velocità  $V_i$ ,  $i = k + 1, \dots, n$  siano nulle per  $x = 0$  (parete di entrata), mentre (21) significa che le concentrazioni delle specie  $i = k + 1, \dots, n$  nel liquido sono continue attraverso la frontiera  $x = s(t)$ . Il simbolo  $\llbracket \chi \rrbracket$  denota il salto di  $\chi$  attraverso  $s(t)$ :

$$\llbracket \chi \rrbracket = \lim_{x \rightarrow s(t)^+} \chi(x, t) - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} \chi(x, t).$$

Le condizioni (22) e (23) derivano entrambe dal bilancio di massa sulla frontiera

$$(27) \quad \llbracket m_i + b_i \rrbracket \dot{s}(t) - \llbracket m_i V_{m_i} \rrbracket = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

In particolare, la (22) esprime la continuità del flusso diffusivo all'interfaccia  $s(t)$ , mentre la (23) è ottenuta richiamando le (2), (5) e (7).

Infine, mediante la condizione la bordo (24) si assume che la diffusione è assente alla parete di uscita  $x = 1$ .

La funzione  $\theta_0(x)$  (cfr. (2.5)) può essere calcolata utilizzando le (15)-(17):

$$(28) \quad \theta_0(x) = 1 - (\varepsilon_0(x) + \eta_{(k),0}(x) + \theta_{(k),0}(x) + \eta_0^{(k)}(x)).$$

Ovviamente, i dati iniziali in (28) sono fisicamente consistenti solo se  $0 < \theta_0(x) < 1$ .

*OSSERVAZIONE 2.1. - Dalle condizioni (27) e da (1), (2) si trova che il flusso volumetrico  $q$  non è continuo attraverso la frontiera  $s(t)$  se la porosità  $\varepsilon$  è discontinua:*

$$(29) \quad \llbracket \varepsilon \rrbracket \dot{s}(t) = \llbracket q \rrbracket.$$

### 3. - L'indagine matematica.

Si descrive in questa sezione l'analisi matematica compiuta sul sistema (8)-(26). Il risultato principale, che afferma l'esistenza e unicità della soluzione del sistema, è contenuto nel paragrafo 3.4. Per i dettagli delle dimostrazioni, rimandiamo a [4].

#### 3.1. Le ipotesi sulle funzioni assegnate.

Coerentemente al problema fisico in esame, assumiamo che le funzioni che compaiono nelle equazioni costitutive (10)-(12)  $K(b, m, \varepsilon)$ ,  $F_i(q, b)$ ,  $G_i(\eta)$ ,  $\beta_i(q, b)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $H_i(q, b)$ ,  $i = k + 1, \dots, n$  siano non negative. Per quanto

riguarda la loro regolarità, si richiede che queste funzioni siano  $C^1$  rispetto ai loro argomenti e che

$$\begin{aligned}
 & 0 < K_m \leq K(b, m, \varepsilon) \leq K_M \\
 & \|\Phi\| < \infty, \quad \|H\| < \infty \\
 (30) \quad & |S_i(q_1, b) - S_i(q_2, b)| \leq L_{S_i}^q |q_1 - q_2| \\
 & |S_i(q, b^{(1)}) - S_i(q, b^{(2)})| \leq L_{S_i}^b \max_{1 \leq j \leq n} |b_j^{(1)} - b_j^{(2)}| \\
 & \left| \frac{\partial S_i}{\partial q}(q_1, b) - \frac{\partial S_i}{\partial q}(q_2, b) \right| \leq L_{S_i q}^q |q_1 - q_2| \\
 & \left| \frac{\partial S_i(q, b^{(1)})}{\partial b_j} - \frac{\partial S_i(q, b^{(2)})}{\partial b_j} \right| \leq L_{S_i b_j}^b \max_{1 \leq r \leq n} |b_r^{(1)} - b_r^{(2)}|
 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned}
 (31) \quad S &= (F_1 G_1, \dots, F_k G_k, H_{k+1}, \dots, H_n) = \\
 &= (\Phi_1, \dots, \Phi_k, H_{k+1}, \dots, H_n) \\
 \Phi &= \sum_{i=1}^k \Phi_i = \sum_{i=1}^k F_i G_i, \quad H = \sum_{i=k+1}^n H_i
 \end{aligned}$$

e considerato la norma  $\|\Psi\| = \sup_{q \geq 0, 0 \leq b_i \leq b_{i,0}} |\Psi(q, b)|$ .

Si assume poi che le funzioni corrispondenti ai dati iniziali e al bordo  $\varepsilon_0(x)$ ,  $m_{i,0}(x)$ ,  $b_{i,0}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $p_0(t)$  siano  $C^1$  con derivate limitate. Inoltre, si richiede che

$$\begin{aligned}
 & 0 < p_0^m \leq p_0(t) \leq p_0^M \\
 & m_{i,0}(x) \neq 0, \quad b_{i,0}(x) \neq 0, \quad x \in [0, 1] \\
 (32) \quad & m_{i,0}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, k
 \end{aligned}$$

$$(33) \quad \eta_{(k),0}(x) + \theta_{(k),0}(x) < \Theta < 1 - (\theta_0(x) + \theta_0^{(k)}(x)), \quad x \in [0, 1].$$

La condizione (32) rende compatibile il dato iniziale (15),  $i = 1 \dots, k$ , con quello al bordo (18). Dal punto di vista matematico, comunque, questa ipotesi può essere rimossa per arrivare ai medesimi risultati. La condizione (33) significa da una parte che la concentrazione iniziale di particelle fini è al di sotto di quella critica di saturazione in ogni punto del mezzo poroso, dall'altra che il volume critico  $\Theta$  non può superare lo spazio a disposizione.

La combinazione di (33) con (5) e (28) implica il seguente vincolo per la po-

rosità al tempo iniziale:

$$(34) \quad 1 - (\Theta + \theta_0(x) + \theta_0^{(k)}(x)) < \varepsilon_0(x) < 1 - \theta_0(x), \quad x \in [0, 1].$$

Ponendo

$$(35) \quad \varepsilon_0^m = \min_{x \in [0, 1]} (1 - (\Theta + \theta_0(x) + \theta_0^{(k)}(x))), \quad \varepsilon_0^M = \max_{x \in [0, 1]} (1 - \theta_0(x))$$

(si noti che  $0 < \varepsilon_0^m < \varepsilon_0^M < 1$ ), si deduce da (34):

$$(36) \quad 0 < \varepsilon_0^m < \varepsilon_0(x) < \varepsilon_0^M < 1, \quad x \in [0, 1].$$

### 3.2. La procedura di punto fisso.

La prova di esistenza e unicità della soluzione di (8)-(26) si basa su un argomento di punto fisso. Si parte dall'osservare che, se è noto che la coppia di funzioni  $(q(x, t), s(t))$  è soluzione del problema, allora tutte le altre incognite sono calcolabili mediante la seguente procedura:

- si determinano le funzioni  $b_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , usando le (11), (12) insieme alle condizioni iniziali (17);
- si risolvono le equazioni differenziali (13), (16) per trovare la porosità  $\varepsilon(x, t)$ ;
- si trovano le concentrazioni  $m_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, k$  dai problemi al bordo di tipo iperbolico in  $R_T$  costituito dalle equazioni (8), (15) ( $i = 1, \dots, k$ ), (18) e le concentrazioni  $m_i(x, t)$ ,  $i = k + 1, \dots, n$  dai problemi parabolici di tipo diffrazione in  $R_T \cup D_T$  dato dalle equazioni (9), (15) ( $i = k + 1, \dots, n$ ), (19), (21), (22), (24);
- si calcola infine la pressione  $p(x, t)$  mediante le (10), (25).

Assegnando dunque una coppia  $(q(x, t), s(t))$ , si trovano le altre incognite nel modo indicato e si procede poi a calcolare una nuova approssimazione  $\tilde{q}$  and  $\tilde{s}$  utilizzando rispettivamente le (14) e (23), che non sono state utilizzate nello schema iterativo precedente. Un punto fisso  $q = \tilde{q}$ ,  $s = \tilde{s}$  fornisce una soluzione del sistema in esame.

Per formalizzare la procedura descritta, si indica con  $B_T$  il rettangolo  $(0, 1) \times (0, T)$  e si definisce il seguente insieme di funzioni

$$(3) \quad \mathcal{E}_T(u_1, u_2, A_y, A_t, M_y, M_t, s_0, A_s, M_s) = \left\{ (u(y, t), s(t)) \mid u \in C^{1,1}(\overline{B}_T), \right.$$

$$u(y, 0) = q_0(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 < u_1 \leq u(y, t) \leq u_2,$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \right| \leq A_y, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) \right| \leq A_t, \quad (y, t) \in \overline{B}_T,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} u(y_1, t) - \frac{\partial}{\partial y} u(y_2, t) \right| \leq M_y |y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [0, 1],$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u(y_1, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(y_2, t) \right| \leq M_t |y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [0, 1],$$

$$s \in C^1[0, T], \quad s(0) = 1, \quad 0 < s_0 \leq s(t) \leq 1,$$

$$-A_s \leq \dot{s}(t) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad |\dot{s}(t_1) - \dot{s}(t_2)| \leq M_s |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

Per una coppia  $(u, s) \in \mathcal{E}_T$ , si pone  $q(x, t) = u(x/s(t), t)$ ,  $(x, t) \in \bar{D}_T$  e definiamo la mappa  $\mathcal{F}(u, s) = (\tilde{u}, \tilde{s})$ , dove

$$(38) \quad \tilde{u}(y, t) = f(t) \frac{1}{1 + l(s(t), y, t)}, \quad (y, t) \in B_T,$$

$$\tilde{s}(t) = 1 - \int_0^t \frac{l(s(\tau), \tau) q(s(\tau), \tau)}{\Theta - (\eta_{(k)}(s(\tau), \tau) + \theta_{(k)}(s(\tau), \tau))} d\tau, \quad t \in [0, T].$$

In (38) abbiamo posto  $l = \eta_{(k)}/\varepsilon$  e

$$(39) \quad f(t) = q(0, t) = \frac{p_0(t)}{\int_0^{s(t)} \frac{1}{1 + l(\xi, t)} \frac{1}{K(\xi, t)} d\xi + \frac{1 - s(t)}{K_0}}.$$

Le definizioni (38) derivano semplicemente dall'integrazione della (14) e (23), rispettivamente.

A questo punto si definisce  $\tilde{q}(x, t) = \tilde{u}(x/\tilde{s}(t), t)$  in  $\{(x, t): x \in [0, \tilde{s}(t)], t \in [0, T]\}$ .

Se  $(\bar{u}, \bar{s})$  è un punto fisso per la mappa  $\mathcal{F}$  nell'insieme  $\mathcal{E}_T$ , allora  $\bar{q} = \bar{u}(x/\bar{s}, t)$  and  $\bar{s}$  insieme con le corrispondenti funzioni  $(\bar{b}, \bar{m}, \bar{\varepsilon}, \bar{p})$  sono soluzioni del sistema (8)-(26).

Osserviamo che la funzione  $q_0$  che compare nella definizione (37) rappresenta il flusso  $q$  al tempo  $t = 0$ , non assegnato fra i dati iniziali. Esso è comunque calcolabile integrando la (10):

$$(40) \quad q_0(x) = \frac{p_0(0)}{\int_0^1 \frac{1}{1 + l_0(\xi)} \frac{1}{K(b_0(\xi), m_0(\xi), \varepsilon_0(\xi))} d\xi} \frac{1}{1 + l_0(x)}$$

con  $l_0 = \frac{\eta_{(k),0}}{\varepsilon_0}$ , funzione nota.

È necessario fare una precisazione relativa alla procedura di calcolo indicata. La funzione  $\varepsilon$ , calcolata mediante la (13), non necessariamente è derivabile rispetto alla  $x$ . Tuttavia, il calcolo successivo delle specie  $m_i$  (equazioni (8), (9)) richiede questa derivabilità. Per aggirare questo inconveniente, si utilizza la

relazione (14), per ottenere

$$(41) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \varepsilon \left( \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon + \eta_{(k)}} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon + \eta_{(k)}) \right).$$

Richiamando ora la (5), sostituiamo la derivata rispetto a  $x$  di  $\varepsilon + \eta_{(k)}$  con  $-\theta'_0(x) + \partial(\theta^{(k)} + \theta_{(k)})/\partial x$ , quantità che viene calcolata risolvendo il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite  $\zeta_i = \partial\theta_i/\partial x$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = - \frac{\partial \widehat{S}_i}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} - \nabla_{\theta} \widehat{S}_i \cdot \zeta, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\zeta_i(x, 0) = \zeta_0(x) = \theta'_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Utilizzando la (41), si trova la seguente espressione per la funzione  $E(x, t)$ , che gioca il ruolo di  $\partial(q/\varepsilon)/\partial x$ :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon + \eta_{(k)}} \left( \zeta_0 + \sum_{i=1}^k \zeta_i \right).$$

A questo punto, si sostituisce il problema (8) ( $i = 1, \dots, k$ ), (15), (18), nelle incognite  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , con il seguente, nelle incognite  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ :

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \eta_i \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{q}{\varepsilon} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} = - \frac{\partial \theta_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (x, t) \in D_T$$

$$\eta_i(x, 0) = m_{i,0}(x)/\varrho_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in [0, 1]$$

$$\eta_i(0, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Per quanto riguarda invece le rimanenti specie diffusive  $i = k+1, \dots, n$ , si utilizza ancora la (41) per rimpiazzare la funzione  $\partial\varepsilon/\partial x$  con

$$\widetilde{E}(x, t) = \frac{\varepsilon}{q} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial x} \right)$$

e si sostituisce il problema (9), (15) ( $i = k+1, \dots, n$ ), (19), (21), (22), (24) nelle incognite  $m_i$ ,  $i = k+1, \dots, n$ , con il seguente, nelle nuove incognite  $c_i = m_i/\varepsilon$ ,  $i = k+1, \dots, n$  (corrispondenti alle concentrazioni nel soluto):

$$\varepsilon \frac{\partial c_i}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( -D_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + (q - D_i \widetilde{E}) \frac{\partial c_i}{\partial x} - c_i \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial t} = H_i,$$

$$i = k+1, \dots, n, \quad (x, t) \in D_T \cup R_T,$$

$$c_i(x, 0) = m_{i,0}(x)/\varepsilon_0(x), \quad i = k+1, \dots, n, \quad x \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{\varepsilon(0, t)} \left( \frac{q(0, t)}{D_i \varepsilon(0, t)} - \widetilde{E}(0, t) \right) c_i(0, t), \quad i = k+1, \dots, n, \quad 0 < t < T,$$

$$\llbracket c_i \rrbracket = 0, \quad x = s(t), \quad i = k + 1, \dots, n,$$

$$\left\llbracket D_i \varepsilon \frac{\partial c_i}{\partial x} \right\llbracket = 0, \quad x = s(t), \quad i = k + 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x}(1, t) = 0, \quad i = k + 1, \dots, n, \quad 0 < t < T.$$

Esistenza e unicità per il problema parabolico di tipo diffrazione sono garantite dal Teorema 13.1, cap. 6 di [5].

### 3.3. Un risultato di tipo locale

Una proprietà importante della mappa  $\mathcal{F}$  è la seguente:

LEMMA 3.1. – *Definiamo*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0^m - A_y T / s_0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0^M + \varepsilon_0^m + \|\theta_{(k), 0}^{(k)}\|, \quad C_1 = \|\eta_{(k), 0}\| / \varepsilon_0^m + \|\widehat{\Phi}\| u_2 / \varepsilon_2,$$

dove la norma è quella del sup e  $\widehat{\Phi} = \sum_{i=1}^k \frac{\Phi_i}{\varrho_i}(q, \varrho_1 \theta_1, \dots, \varrho_n \theta_n)$  (cfr. (31)). Se valgono le ipotesi

$$(i) \quad \varepsilon_2 C_1 + \|\theta_{(k), 0}\| < \Theta$$

$$(ii) \quad \frac{\|\widehat{\Phi}\|}{\varepsilon_1} K_M p_0^M < 1, \quad p_0^M (1 + C_1)^2 \left| \frac{\partial K}{\partial q} \right| < 1$$

(iii) le costanti di Lipschitz rispetto alla variabile  $x$  delle funzioni assegnate  $\varepsilon_0, \eta_{(k), 0}, \eta_{(k)}^{(k)}, \varepsilon_0', \eta_{(k), 0}'$  e le costanti  $L_{S_i}^q, L^b S_i, i = 1, \dots, n$  che compaiono nelle (30) sono sufficientemente piccole,

allora esiste almeno un insieme di valori positivi  $\{T, u_1, u_2, A_y, A_t, M_y, M_t, s_0, A_s, M_s\}$  (cfr. (37) per  $i$  quali se  $(u, s) \in \mathcal{E}_T$ , allora anche  $(\tilde{u}, \tilde{s}) \in \mathcal{E}_T$ .

La mappa  $\mathcal{F}$  che opera sull'insieme  $\mathcal{E}_T$  chiuso, convesso e limitato ha dunque la proprietà  $\mathcal{F}(\mathcal{E}_T) \subseteq \mathcal{E}_T$ , per un'opportuna scelta delle costanti che definiscono  $\mathcal{E}_T$ .

Una seconda proprietà relativa a  $\mathcal{F}$  è la seguente:

LEMMA 3.2. – *Si assumano le ipotesi del Lemma 3.1, insieme a*

(iv)  $L_{S_{i_q}}^q, L_{S_{i_b}}^b, i = 1, \dots, n$  (costanti che compaiono nelle (30)) sufficientemente piccole.

Allora si può vedere che la trasformazione  $\mathcal{F}$  opera in modo continuo su  $\mathcal{E}_T$  e che l'insieme  $\mathcal{F}(\mathcal{E}_T)$  è relativamente compatto.

Possiamo dunque applicare il teorema di punto fisso di Schauder per affermare che il problema (8)-(26) ha almeno una soluzione. L'unicità è garantita dal fatto che la trasformazione è una contrazione, scegliendo  $T$  opportunamente piccolo.

3.4. *Il risultato di tipo globale.*

Definiamo ora la costante

$$\beta = \frac{\|\widehat{\Phi}\| K_M p_0^M}{\varepsilon_0^m}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0^M + \varepsilon_0^m + \|\theta_0^{(k)}\|$$

e scegliamo  $\bar{C}_1$  come un qualsiasi valore costante tale che

$$\left( \frac{\|\eta_{(k), 0}\|}{\varepsilon_0^m} + \beta \right) (1 - \beta)^{-1} < \bar{C}_1 < \frac{\|\theta_{(k), 0}\|}{\varepsilon_2}.$$

Enunciamo infine il risultato centrale riguardo allo studio del modello:

PROPOSIZIONE 3.1. - *Nelle ipotesi*

(i)a  $\beta < 1$ ,

$$(42) \quad \frac{\varepsilon_2/\varepsilon_0^m}{1 - \beta} \|\eta_{(k), 0}\| + \|\theta_{(k), 0}\| + \varepsilon_2 \frac{1}{1 - \beta} < \Theta,$$

(ii)a  $p_0^M (1 + \bar{C}_1)^2 \left| \frac{\partial K}{\partial q} \right| < 1$

e nelle ipotesi (iii) del Lemma 3.1 e (iv) del Lemma 3.2, il sistema (8)-(26) ha un'unica soluzione

$$(m_1, \dots, m_n, b_1, \dots, b_n, \varepsilon, q, p, s)$$

per ogni tempo  $t \geq 0$ .

La dimostrazione si basa sul fatto che le condizioni (i)a, (ii)a, più restrittive delle (i) e (ii) del Lemma 3.1, permettono di trovare un valore  $T > 0$  e una soluzione locale per  $0 \leq t \leq T$ .

In [4] si mostra che la soluzione trovata verifica le seguenti proprietà:

(1) la frontiera libera  $s(t)$  è limitata dal basso dalla quantità

$$s_{\min} = 1 - \frac{\bar{m}_0}{\Theta}, \quad \bar{m}_0 = \int_0^1 (\eta_{(k), 0} + \theta_{(k), 0}) dx$$

che dipende solo dalla distribuzione iniziale delle particelle fini;

(2) la frazione di volume di particelle fini è al di sotto del volume critico di formazione dello strato compatto in ogni punto:

$$(43) \quad \eta_{(k)} + \theta_{(k)} < \Theta, \quad (x, t) \in D_T;$$

(3) la porosità  $\varepsilon$  al tempo  $t = T$  è limitata dalle medesime quantità che compaiono in (36):

$$\varepsilon_0^m < \varepsilon(x, T) < \varepsilon_0^M, \quad x \in [0, s(T)].$$

Si può vedere che le proprietà appena scritte, insieme alle ipotesi (i)a e (ii)a della Proposizione 3.1, garantiscono l'esistenza della soluzione (mediante una

seconda applicazione del risultato di tipo locale) nell'intervallo di tempo  $[T, 2T]$ . Iterando la procedura, si ottiene esistenza e unicità globale nel tempo.

#### 4. – Alcune considerazioni qualitative.

La condizione (42) della Proposizione 3.1 è particolarmente significativa anche dal punto di vista fisico. Infatti, nel modello più semplice [2] precedentemente studiato, in cui si ammette la presenza di un'unica specie di particelle ( $n = 1$ ) e si assume che la distribuzione iniziale di esse è uniforme ( $m_0$  e  $b_0$  costanti), la condizione

$$(44) \quad \|\eta_{(k), 0}\| + \|\theta_{(k), 0}\| < \Theta,$$

meno selettiva della (42), è sufficiente per garantire la condizione (43). Nel caso attuale l'ipotesi (44) non è più sufficiente: non è difficile trovare esempi in cui la concentrazione iniziale verifica (44) (e non (42)) e per un certo istante  $t > 0$   $\|\eta_{(k), x}\| + \|\theta_{(k), x}\|$  raggiunge il valore critico  $\Theta$  per un certo  $x$ . Questo problema, certamente più complicato, necessita l'introduzione di una nuova frontiera libera che delimita un secondo strato compatto all'interno di  $D_T$ .

È naturale che la condizione (42) coinvolga anche la quantità  $\|\Phi\|$ , che essenzialmente controlla il tasso di rimozione di particelle fini. Allo stesso modo, anche le condizioni (ii)a della Proposizione 3.1, (iii) del Lemma 3.1 e (iv) del Lemma 3.2 richiedono che la variazione delle funzioni assegnate rispetto ai loro argomenti siano sufficientemente controllate.

Concludiamo con alcune proprietà qualitative della soluzione del sistema (8)-(26).

Un aspetto interessante emerge dallo studio delle caratteristiche dell'equazione (8). In [4] viene mostrato che, chiamando  $\Gamma$  una qualsiasi caratteristica della (8), la pendenza di  $\Gamma$ , pari a  $q/\varepsilon$ , è limitata come segue:

$$(45) \quad 0 < \frac{u_1}{\varepsilon_2} \leq \frac{d}{dt} \Gamma(t) \leq \frac{u_2}{\varepsilon_1}.$$

Riferendosi alla soluzione globale, si omette l'indice  $T$  in (6) e definiamo (cfr. (11))

$$S = \{(x, t) \in D \mid b_i(x, t) \leq \beta_i(q, b), i = 1, \dots, k\} \quad \mathcal{R} = D/S.$$

Nella figura che segue,  $S$  e  $\mathcal{R}$  sono separate dalla curva  $\sigma$ .

La verifica dei seguenti fatti è immediata:

- se una curva caratteristica  $\Gamma$  di (8) è tale che  $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  (curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  in figura), allora  $\dot{s}(\tau) \neq 0$ , dove  $\tau$  è il tempo (certamente finito, per la (45)) in cui  $\Gamma$  interseca la frontiera libera  $s$ ,

- se  $\Gamma$  è contenuta interamente in  $S$  (curva  $\Gamma_3$  nella figura), allora  $\dot{s}(\tau) = 0$ .

Definiamo ora l'insieme

$$S_1 = \{ \Gamma \subset S \mid \Gamma \cup \mathcal{R} = \emptyset \}$$

(nella figura  $S_1$  è la regione delimitata dall'asse dei tempi, dalla curva  $\Gamma_l$  e dalla frontiera libera  $x = s(t)$ ).

Se  $(x, t) \in S_1$ , si ha che  $\eta_{(k)} = 0$ ,  $\theta_{(k)}$  è costante,  $q(x, t) = q_c(t)$ ,  $s(t) = \bar{s}$ , costante positiva.

Il flusso  $q_c(t)$  è pari a

$$(46) \quad q_c(t) = q \left( 1 + \frac{\eta_{(k)}}{\varepsilon} \right) \Big|_{x=\bar{s}} \quad (x, t) \in S_1,$$

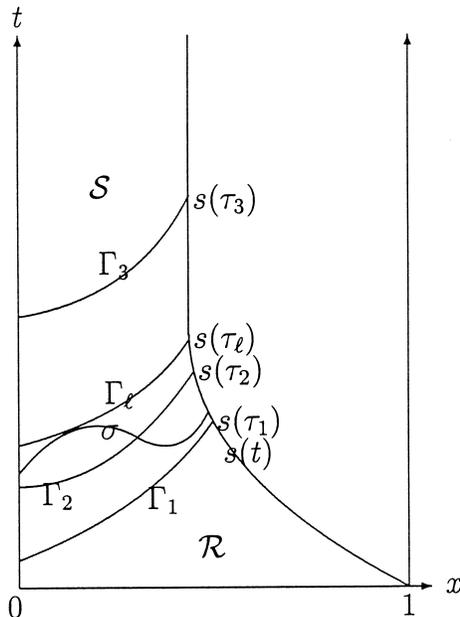
dove il valore  $\bar{s}$  viene ricavato risolvendo la seguente equazione (cfr. (39)):

$$q_c(t) \left( \frac{1-s}{K_0} + \int_0^s \frac{1}{K(\xi, t)} d\xi \right) = p_0(t).$$

Notiamo inoltre che per  $(x, t) \in S_1$  si ha (cfr. (13))

$$\frac{\partial K}{\partial t} = - \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \theta_{(k)}}{\partial t}, \quad (x, t) \in S_1.$$

Si conclude che, se  $\partial K / \partial \varepsilon \geq 0$  allora il flusso  $q_c(t)$  cresce se  $p_0(t)$  crescente e il processo di rimozione può nuovamente avere luogo; d'altra parte, se  $\partial K / \partial \varepsilon \leq 0$  e  $p_0(t)$  è non crescente, allora  $q_c(t)$  è non crescente e il processo di rimozione non può iniziare per una seconda volta.



## REFERENCES

- [1] A. FASANO, *Some nonstandard one-dimensional filtration problems*, The Bulletin of the Faculty of Education, Chiba University, **44**, 1996
- [2] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *Mathematical models for filtration through porous media interacting with the flow*, in Nonlinear Mathematical problems in Industry, I, M. Kawarada, N. Kenmochi, N. Yanagihara eds., Math. Sci. & Appl., **1**, pp. 61-85, Gakkotosho, Tokyo.
- [3] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *Flows through saturated mass exchanging porous media under high pressure gradients*, Proc. of Calculus of Variations, Applications and Computations, C. Bandle et al. eds. - Pitman Res. Notes Math. Series **326**, 1994.
- [4] A. FASANO - F. TALAMUCCI, *A comprehensive mathematical model for a multi-species flow through ground coffee*, SIAM J. Math. Anal. Vol. **31**, No.2 (1999), 251-273.
- [5] O. A. LADYŽENSKAJA - V. A. SOLONNIKOV - N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. of Math. Monographs, vol. **23**, American Mathematical Society.
- [6] M. PETRACCO, *Espresso coffee brewing dynamics: development of mathematical and computational models*, 15<sup>ème</sup> Colloque Scient. Internat. sur le Café, Associat. Scientif. Internat. du Café, Paris (1993).
- [7] F. TALAMUCCI, *Analysis of coupled heat-mass transport in freezing saturated soils*, Surveys on Mathematics for Industry, vol. **7**, Springer-Verlag (1997), pp. 93-139.
- [8] F. TALAMUCCI, *Flow through a porous medium with mass removal and diffusion*, Nonlinear Differential Equations and Applications, **5** (1998), 427-444.

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università di Firenze  
Viale Morgagni, 67/a - 50134 Firenze, Italia  
e-mail: [talamucci@math.unifi.it](mailto:talamucci@math.unifi.it)