Bollettino Unione Matematica Italiana

Silvia Cingolani

Metodi variazionali e topologici nello studio delle equazioni di Schrödinger nonlineari agli stati stazionari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-B** (2001), n.2, p. 319–343.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_2_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
(8) 4-B (2001), 319-343

Metodi variazionali e topologici nello studio delle equazioni di Schrödinger nonlineari agli stati stazionari.

SILVIA CINGOLANI (*)

Summary. – *In the present paper we survey some recents results concerning existence of semiclassical standing waves solutions for nonlinear Schrödinger equations. Furthermore, from Maxwell's equations we derive a nonlinear Schrödinger equation which represents a model of propagation of an electromagnetic field in optical waveguides.*

1. – Introduzione.

Scopo di questa nota è di illustrare alcuni recenti risultati riguardanti una classe di equazioni di tipo Schrödinger nonlineare

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar^2 \Delta \psi + V(x)\, \psi - f(\psi) \tag{1.1}$$

dove $\psi = \psi(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\hbar$ è la costante di Planck, i denota l'unità immaginaria, Δ denota l'operatore di Laplace. Lo studio di queste equazioni gioca un ruolo importante nella fisica moderna. Le equazioni di Schrödinger nonlineari si deducono nella descrizione matematica di molti fenomeni fisici. Alcuni di questi sono i complessi effetti di interazioni tra elettroni in un metallo, la propagazione di onde elettromagnetiche nei plasmi, i moti di vortici in Meccanica dei Fluidi.

Alcune soluzioni fisicamente interessanti di queste equazioni sono quelle corrispondenti a stati legati nonlineari, cioè soluzioni localizzate con energia finita. Negli anni recenti l'esistenza di stati legati dell'equazione di Schrödinger nonlineare è stata largamente studiata nel limite semiclassico. La transizione dalla meccanica quantistica a quella classica viene formalmente descritta mandando a zero la costante di Planck $\hbar$ e onde stazionarie dell'equazione di Schrödinger nonlineare, che esistono per piccoli valori del parametro $\hbar$, vengono usualmente dette semiclassiche. In un certo senso la costante $\hbar$ rappresenta una «misura» di quantizzazione del sistema fisico considerato.

(*) Comunicazione presentata a Napoli in occasione del XVI Congresso U.M.I.

Le equazioni di Schrödinger nonlineari sono in genere completamente intrattabili con metodi analitici e pertanto vengono spesso risolte con metodi numerici o di iterazione. In questa nota focalizzaremo l'attenzione su una classe di equazioni di Schrödinger nonlineari che possono essere studiate con metodi variazionali. Si vedrà che dal punto di vista matematico la ricerca di stati semiclassici stazionari di queste equazioni di evoluzione conduce a cercare soluzioni positive di un problema ellittico perturbato in $\mathbb{R}^N$ e a capire come si concentra la parte spaziale dell'onda stazionaria in relazione alla forma del potenziale.

Molta letteratura matematica degli anni recenti si è dedicata a studiare questo tipo di fenomeni di concentrazione.

Come detto all'inizio, scopo di questa nota è richiamare alcuni recenti ricerche su queste problematiche. Il lavoro è organizzato come segue.

La sezione 2 è dedicata a una breve panoramica dei risultati classici inerenti l'esistenza di stati semiclassici per equazioni di Schrödinger nonlineari e ad alcuni recenti sviluppi.

Nella sezione 3 si presenta un recente risultato di esistenza di stati semiclassici utilizzando un metodo perturbativo in teoria dei punti critici che successivamente ha trovato svariate applicazioni nello studio di equazioni ellittiche semilineari in cui si verificano fenomeni di concentrazione e nello studio di sistemi dinamici perturbati (si veda tra questi [AB, C, C1].).

Nella sezione 4 si considerano potenziali con una molteplicità di punti critici (in particolare potenziali periodici) e vengono presentati dei risultati di esistenza di soluzioni con una molteplicità di punti di concentrazione.

Nella sezione 5 si prendono in esame potenziali non differenziabili e saranno sviluppati argomenti di tipo variazionale globale per ottenere molteplicità di soluzioni in corrispondenza dei minimi globali del potenziale.

Nella sezione 6 mostreremo come le equazioni di Schrödinger nonlineari agli stati stazionari sono anche fondamentali equazioni nello studio degli effetti dispersivi nonlineari in Ottica Nonlineare. In particolare si deducono direttamente dalle equazioni di Maxwell assumendo una relazione nonlineare tra la polarizzazione elettrica del materiale e il campo elettrico. Questo tipo di equazione descrive matematicamente la propagazione di campi elettromagnetici monocromatici in guide d'onda con un responso nonlineare.

2. – Esistenza di onde stazionarie semiclassiche.

L'esistenza di soluzioni semiclassiche per l'equazione di Schrödinger nonlineare è stata dimostrata in un lavoro pionieristico da Floer e Weinstein [FW] nel caso unidimensionale ($N = 1$), applicando un metodo di riduzione finito-dimensionale di tipo Lyapunov-Schmidt. Precisamente loro provarono che con un potenziale V limitato e una nonlinearità cubica $f(u) = u^3$, l'equazioni di

Schrödinger nonlineare ammette una soluzione stazionaria semiclassica concentrata in ciascun punto di minimo o massimo non degenere del potenziale V. Precisamente dimostrarono il seguente teorema:

TEOREMA 2.1. – *Supponiamo V limitato. Per ogni punto di minimo (o massimo) nondegenere x_0 di V esiste un $\hbar_0 > 0$ tale che per ogni $\hbar$ con $0 < \hbar < h_0$ l'equazione di Schrödinger nonlineare unidimensionale*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} + V(x)\, \psi - |\psi|^2 \psi\,, \tag{2.1}$$

ha una soluzione (onda stazionaria)

$$\psi(t, x) = \exp(i\lambda \hbar^{-1} t)\, u_\hbar(x)\,,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u_\hbar : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concentrata vicino x_0. Precisamente, $u_\hbar$ ha un solo massimo globale $x_\hbar$ e

$$x_\hbar \to x_0\,, \qquad \hbar \to 0\,;$$

$$\max_{|x - x_0| \leqslant \delta} u_\hbar(x) > \lambda^{1/(p-1)}.$$

Inoltre esiste C indipendente da $\hbar$, δ tale che

$$u_\hbar(x) \leqslant C \frac{|x - x_\hbar|}{\hbar} \exp\left(-\sqrt{\delta}\, \frac{|x - x_\hbar|}{\hbar} \right)$$

se $|x - x_0| \geqslant \delta$.

Successivamente Y. G. Oh [O] estese questo risultato a dimensioni più alte e a potenziali appartenenti alla classe di Kato $(V)_a$, ad esempio potenziali che oscillano lentamente all'infinito o che crescono come potenziali di grado pari o i loro esponenziali o loro pertubazioni limitate.

La stabilità orbitale della soluzione trovata in [FW] è stata studiata da M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss [GSS]. Richiamiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.2. – *La $u_\hbar$-orbita $\{\exp(i\lambda \hbar^{-1} t)\, u_\hbar(x) : t \in \mathbb{R}\}$ è detta stabile se per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ con la seguente proprietà:*

se $\|\psi_0 - u_\hbar\|_{H^1} < \delta$ e $\psi(t, \cdot)$ è una soluzione di (2.1) in un intervallo $[0, t_0)$ con $\psi(0, \cdot) = \psi_0$, allora $\psi(t, \cdot)$ può essere prolungata in $0 \leqslant t < +\infty$ e

$$\sup_{0 < t < +\infty} \inf_{s \in \mathbb{R}} \|\psi(t, \cdot) - \exp(i\lambda s)\, u_\hbar\|_{H^1} < \eta\,.$$

$u_\hbar$-orbita è detta instabile se la soluzione cessa di esistere dopo un tempo finito.

In [GSS] gli autori dimostrarono il seguente risultato.

TEOREMA 2.3. – *Se x_0 è un minimo nondegenere di V, allora esiste $\hbar_1 > 0$ tale che per ogni $0 < \hbar < \hbar_1$, $u_\hbar$-orbita è stabile.*

Anni dopo, P. Rabinowitz [R] dimostrò con argomenti variazionali globali l'esistenza di una onda stazionaria semiclassica di (1.1) avente energia minima sotto l'ipotesi

$$\liminf_{|x| \to +\infty} V(x) > \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) .$$

In [W], X. Wang provò che la parte spaziale dell'onda trovata da Rabinowitz si concentra vicino a minimi globali del potenziale per $\hbar \to 0$.

Recentemente in un lavoro in collaborazione con A. Ambrosetti e M. Badiale si è provato che questi fenomeni di concentrazione si verificano anche in corrispondenza dei punti di minimo e di massimo locale (eventualmente degenere) del potenziale (si veda [ABC, ABC1]). Dedicheremo la sezione 3 alla descrizione di questo risultato.

Contemporaneamente, M. Del Pino e P. Felmer [DF] hanno ottenuto una versione locale dei risultati di Rabinowitz, mediante argomenti variazionali di penalizzazione e hanno dimostrato che soluzioni semiclassiche si concentrano in corrispondenza anche dei minimi locali (eventualemente degeneri) del potenziale.

Successivamente Yan Yan Li [L] ha ulteriormente indebolito le ipotesi di nondegenerazione sui punti critici del potenziale, estendendo i risultati di esistenza al caso di potenziali con componenti critiche stabili, in particolare punti di sella del potenziale. Si veda inoltre successivi contributi contenuti in [DF1, G].

3. – Un approccio perturbativo.

Questa sezione è dedicata a descrivere brevemente il risultato provato in [ABC1]. Come accennato nell'introduzione, la dimostrazione del risultato si basa su un metodo perturbativo in teoria dei punti critici che rappresenta una generalizzazione di un risultato astratto contenuto in [ACZE].

Consideriamo la seguente equazione di evoluzione:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar^2 \Delta \psi + V(x)\, \psi - |\psi|^{p-1} \psi \,, \tag{3.1}$$

dove assumiamo $1 < p < 2^* - 1$ e

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2} & \text{se } N > 2 \,, \\ +\infty & \text{se } N \leq 2 \,. \end{cases}$$

La ricerca di onde solitarie di (3.1)

$$\psi(t, x) = \exp(i\lambda\hbar^{-1} t)\, u(x),$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$, conduce allo studio del problema ellittico in $\mathbb{R}^N$:

$$(P_\hbar) \qquad \begin{cases} -\hbar^2 \Delta u + \lambda u + V(x)\, u = |u|^{p-1} u\,, \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,. \end{cases}$$

Si considera un potenziale V che presenta un punto critico di massimo o di minimo locale con una degenerazione al più di ordine finito. Precisamente si assume che V soddisfi la seguente ipotesi:

(V) $V \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$; *$V$ possiede un punto critico $x_0 \in \mathbb{R}^N$; precisamente esiste un intero pari $m > 0$ tale che $D^k V(x_0) = 0$ per ogni $k < m$ e $D^m V(x_0)$ è definita positiva o negativa.*

A meno di traslazioni, non è restrittivo assumere che $x_0 = 0$ e $V(0) = 0$. Posto, per convenienza, $\hbar = \varepsilon$ con un cambio di variabile $x \to \varepsilon x$, $(P_\hbar)$ diventa

$$-\Delta u + \lambda u + V(\varepsilon x)\, u = |u|^{p-1} u\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

che può essere considerata una perturbazione dell'equazione

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-1} u\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.3}$$

È noto che per ogni $\lambda > 0$, (3.3) ha un'unica soluzione positiva radiale $z(x)$ centrata in 0, che decade esponenzialmente a zero 0, per $|x| \to \infty$, supposto $1 < p < 2^* - 1$ (cf. [BL, K]).

In [ABC1] si è dimostrato il seguente risultato:

TEOREMA 3.1. – *Sia $\lambda > -\inf V$ e $1 < p < 2^* - 1$. Assumiamo che V sia limitato e soddisfi l'ipotesi (V). Allora per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (P_ε) ha una soluzione positiva $\tilde{u}_\varepsilon$ tale che*

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) \simeq z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Diamo brevemente un'idea della dimostrazione. Soluzioni di (P_ε) che decadono a 0 per $|x| \to +\infty$ corrispondono a punti critici del funzionale su $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^2 + \lambda |u(x)|^2) + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} V(\varepsilon x)\, u^2(x) - \frac{1}{p+1} |u(x)|^{p+1}\right).$$

Tale funzionale J_ε è ben definito e C^2 su $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ se $p+1 < 2^*$ e V è limitato.

Per $\varepsilon = 0$, l'equazione (P_ε) ha un'unica soluzione positiva radiale z che corrisponde a un punto critico di Passo Montano del funzionale imperturbato

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^2 + \lambda |u(x)|^2) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p+1}.$$

Poiché (3.3) è invariante per traslazioni allora per ogni $\theta \in \mathbb{R}^N$

$$z_\theta(x) := z(x+\theta)$$

è anche soluzione di (3.3). Allora J_0 possiede a livello $b = J_0(z)$ una varietà di punti critici

$$Z = \{z_\theta \,|\, \theta \in \mathbb{R}^N\}.$$

Si denoti con $T_\theta Z$ lo spazio tangente a Z in z_θ. Si può dimostrare che Z è una varietà critica nondegenere di J_0, ossia verifica le seguenti proprietà:

i) $J_0''(z_\theta)$ è un operatore di Fredholm di indice zero;

ii) $T_\theta Z = \mathrm{Ker}\,[J_0''(z_\theta)]$, ossia $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ risolve

$$-\Delta\varphi + \lambda\varphi - p z_\theta^{p-1}\varphi = 0$$

se e solo se $\varphi \in \mathrm{span}\,\{D_i z_\theta \,|\, i = 1, \ldots, N\}$.

Applicando un Teorema di Contrazione è possibile dimostrare il seguente lemma:

LEMMA 3.2. – *Per ogni* $\bar\theta > 0$ *esiste* $\bar\varepsilon > 0$ *e una funzione continua* $w = w(\theta, \varepsilon)$, *definita su* $T = \{|\theta| < \bar\theta\} \times \{|\varepsilon| < \bar\varepsilon\}$, *tale che*

$$w \in T_\theta Z^\perp, \qquad w(\theta, 0) = 0,$$

$$\nabla J_\varepsilon(z_\theta + w(\theta, \varepsilon)) \in T_{z_\theta} Z, \qquad \forall (\theta, \varepsilon) \in T.$$

Inoltre w è C^1 rispetto a θ e per ogni $n \leqslant m-1$ risulta

$$\frac{w(\theta, \varepsilon)}{\varepsilon^n} \to 0, \qquad \textit{per } \varepsilon \to 0,$$

fortemente in $W^{2,2}$. Inoltre per $n = m$ tale limite esiste $\neq 0$.

Utilizzando il Lemma 3.2, si può definire la varietà

$$Z_\varepsilon = \{u \in W^{1,2} \,|\, u = z_\theta + w(\theta, \varepsilon), (\theta, \varepsilon) \in T\}$$

e provare che Z_ε è un vincolo naturale per il funzionale J_ε. Per ε piccolo, Z_ε è una varietà N dimensionale localmente diffeomorfa a Z. Inoltre risulta

$$u \in Z_\varepsilon \quad \text{ e } \quad \nabla_{|Z_\varepsilon} J_\varepsilon(u) = 0 \;\Rightarrow\; \nabla J_\varepsilon(u) = 0\,.$$

Il problema viene ricondotto allo studio dei punti critici della funzione

$$\Phi_\varepsilon(\theta) = J_\varepsilon(z_\theta + w(\theta, \varepsilon))$$

sulla varietà finito-dimensionale Z_ε. Per ε sufficientemente piccolo, si dimostra che

$$\Phi_\varepsilon(\theta) = J_0(z_\theta) + \frac{1}{2m!}\varepsilon^m \Gamma(\theta) + o(\varepsilon^m)$$

dove

$$\Gamma(\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} D^m V(0)[x, \ldots, x]\, z_\theta^2\, dx\,.$$

Si può dimostrare che se V ha un minimo locale in 0, allora Γ ha un minimo locale stretto $\theta = 0$ e Φ_ε ha a un minimo in $\theta = \theta(\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$. Dunque esiste una soluzione $u_\varepsilon = z_{\theta(\varepsilon)} + w(\theta(\varepsilon), \varepsilon)$ di (3.2) tale che $u_\varepsilon \to z$ per $\varepsilon \to 0$.

Questo tipo di approccio perturbativo consente di ottenere una estensione del criterio di stabilità di [GSS] al caso degenere. Si ottengono informazione sull'indice di Morse della soluzione u_ε, cioè sulla dimensione del sottospazio dove $D^2 J_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è definito negativo. Precisamente si dimostra che

$$D^2 J_\varepsilon(u_\varepsilon)[z_{\theta(\varepsilon)}, z_{\theta(\varepsilon)}] < 0\,,$$

$$D^2 J_\varepsilon(u_\varepsilon)[v, v] > 0\,, \quad \forall v \perp \operatorname{span}\{z_{\theta(\varepsilon)}, \partial_1 z_{\theta(\varepsilon)}, \ldots, \partial_N z_{\theta(\varepsilon)}\}, \quad v \neq 0\,.$$

Inoltre poiché $\theta(\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^m} D^2 J_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta(\varepsilon)}, \partial_i z_{\theta(\varepsilon)}] = \frac{1}{2m!} D^2_{i,i}\Gamma(0)\,.$$

Se x_0 è un minimo per V (eventualmente degenere), allora 0 è un minimo stretto per Γ. Deduciamo che $D^2 J_\varepsilon(u_\varepsilon)$ ha esattamente un autovalore semplice negativo for ε piccolo.

Si può applicare il Criterio di Stabilità in [GSS], e concludere che la soluzione u_ε è stabile se e solo se la funzione $\lambda \to J_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è convessa e instabile se è concava. Si dimostra inoltre che la soluzione è stabile se

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 > 0 \tag{3.4}$$

e instabile se (3.4) è < 0. Nel caso particolare in cui $f(u) \equiv |u|^{p-1} u$ si ha u_ε è stabile se $1 < p < 5$ e instabile se $5 < p < +\infty$.

4. – Soluzioni di tipo «multibumps».

In questa sezione consideriamo un potenziale con una molteplicità di punti critici e cerchiamo soluzioni semiclassiche di (3.1) con una molteplicità di punti di concentrazione. Recentemente sono stati ottenuti risultati di esistenza di soluzioni semiclassiche con un numero finito di punti di concentrazione vicino a punti critici del potenziale. Rimandiamo a [O1] per il caso di punti critici nondegeneri, a [DF2, Gu] per potenziali con minimi locali eventualmente degeneri.

Il metodo utilizzato in [DF2, Gu] è ispirato a tecniche variazionali di «incollamento» introdotte da V. Coti Zelati, P. Rabinowitz [CZR, CZR1] e separatamente da Serè [Se] nello studio di soluzioni omocline di tipo *multibumps* per sistemi hamiltoniani. Più recentemente in [L] viene analizzata la situazione più generale di componenti limitate stabili di punti critici ed è provata l'esistenza di stati semiclassici con un numero finito di *bumps* applicando argomenti di grado topologico.

In un lavoro in collaborazione con M. Nolasco consideriamo il caso di potenziali con una infinità numerabile di punti critici di massimo e di minimo locale e proviamo l'esistenza di stati semiclassici con infiniti punti di concentrazione.

Al fine di dare un'idea della dimostrazione, iniziamo con il considerare il caso in cui il potenziale $W(x) = \lambda + V(x)$ soddisfa le seguenti ipotesi:

($h1$) $W \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} W(x) > 0$;

($h2$) $\exists (x_j)_{j \in I} \subset \mathbb{R}^N$, $I \subset \mathbb{N}$ *(insieme finito), e* $(m_j)_{j \in I} \in 2\mathbb{N}$, *tale che* $D^k W(x_j) = 0$ *per ogni* $k < m_j$, $D^{m_j} W(x_j)$ *è definita positiva o negativa. Inoltre,* $\exists \bar{r} > 0$ *tale che* $D^2 W(x)$ *è semidefinita positiva o negativa (rispettivamente) per ogni* $x \in B_{\bar{r}}(x_j)$ $(j \in I)$.

In [CN] si dimostra il seguente risultato:

TEOREMA 4.1. – *Assumiamo* (h1-2) *con* $I \subset \mathbb{N}$ *finito, allora per* $\varepsilon > 0$ *sufficientemente piccolo, esiste* $u_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *una soluzione positiva di* (P_ε) *tale che, per* $\varepsilon \to 0$,

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{j \in I} v_j \left(\frac{x - x_j}{\varepsilon} \right), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

dove $v_j \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *è l'unica soluzione positiva radiale* (*centrata in* 0) *del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + W(x_j)u = |u|^{p-1}u\,, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,. \end{cases}$$

Il Teorema 4.1 viene dimostrato mediante uno *shadowing* lemma per equazioni alle derivate parziali introdotto da S. Angenent [An] e mediante una accurata analisi delle proprietà spettrali dell'operatore

$$A_{\varepsilon, j} \equiv -\varepsilon^2 \Delta + W(x) - p|u_{\varepsilon, j}|^{p-1}$$

dove $u_{\varepsilon, j}$ è una soluzione di (P_ε) che si concentra nel punto x_j per $\varepsilon \to 0$. È possibile inoltre estendere il Teorema 4.1 al caso di potenziali con una infinità numerabile di punti critici degeneri. In questa situazione sono necessarie delle ipotesi aggiuntive di uniformità sui punti critici. Precisamente si assume

(h3) $\sup\limits_{j \in I} m_j < +\infty$, $\sup\limits_{j \in I} W(x_j) < +\infty$ *e* $\exists c_0, c_1 > 0$ *tale che* $c_0 |\xi|^{m_j} \leqslant |D^{m_j} W(x_j)[\xi, \ldots, \xi]| \leqslant c_1 |\xi|^{m_j}$ *e* $|D^{m_j + 1} W(x)[\xi, \ldots, \xi]| \leqslant c_1 |\xi|^{m_j + 1}$ *per ogni* $|x - x_j| \leqslant \bar{r}$, $j \in I$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^N$.

In [CN] viene dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 4.2. – *Siano soddisfatte* (h1-2-3) *con* $I \subset \mathbb{N}$ *numerabile, allora per* $\varepsilon > 0$ *sufficientemente piccolo esiste* $u_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^N)$, *una soluzione positiva di* (3.2), *tale che per* $\varepsilon \to 0$,

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{j \in I} v_j \left(\frac{x - x_j}{\varepsilon} \right), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{4.1}$$

dove $v_j \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *è l'unica soluzione positiva radiale* (*centrata in* 0) *del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + W(x_j)\, u = |u|^{p-1}u\,, & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,. \end{cases}$$

L'ipotesi (h3) è necessaria per ottenere delle stime uniformi rispetto a ε sulla famiglia di operatori $A_{\varepsilon, j}$ con $j \in I$. Ovviamente, ($h3$) è sempre soddisfatta per potenziali periodici in cui l'insieme dei punti critici $(x_j)_{j \in I}$ è finito a meno di $\mathbb{Z}^N$-traslazioni. Inoltre basandosi la dimostrazione del Teorema 4.2 su un argomento di punto fisso in spazi di Banach, la soluzione trovata è unica nella classe delle soluzioni che hanno il comportamento asintotico prescritto da (4.1). L'unicità consente di dimostrare che tra la classe delle soluzioni ottenute nel Teorema 4.2 ci sono infinite soluzioni distinte con una molteplicità (a meno di traslazioni) di punti di concentrazione, supposto che il potenziale sia periodico.

Precisamente si dimostra il seguente teorema.

TEOREMA 4.3. – *Supponiamo W periodico e assumiamo* (h1-2), *allora per ε sufficientemente piccolo esistono infinite soluzioni periodiche di* (3.2) *concentrate per $\varepsilon \to 0$ vicino a reticoli periodici di massimi o minimi di W.*

5. – Risultati di molteplicità senza ipotesi di differenziabilità sul potenziale.

In questa sezione consideriamo il caso in cui il potenziale sia una funzione continua, non necessariamente differenziabile. Si presentano dei risultati di molteplicità di soluzioni di (P_ε) per $\varepsilon \to 0$ ottenuti in collaborazione con M. Lazzo [CL, CL1]. In questo caso l'idea è di collegare la molteplicità delle soluzioni del problema (P_ε) alla *ricchezza* (intesa in senso opportuno) dell'insieme dei minimi assoluti del potenziale V. Si applicheranno degli argomenti variazionali che coinvolgono la categoria di Ljusternik–Schnirelman e che sono collegati a precedenti lavori di Coron [Co], Benci e Cerami [BC], Passaseo [BCP].

A tal fine richiamiamo alcune definizioni e un risultato astratto in teoria dei punti critici.

DEFINIZIONE 5.1. – *Siano Y un sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico X. Definiamo categoria di Ljusternik-Schnirelman di Y in X e la denotiamo $\operatorname{cat}_X(Y)$ il minore numero di insiemi chiusi e contrattili in X che ricoprono Y.*

DEFINIZIONE 5.2. – *Sia $\mathcal{M}$ una $C^{1,1}$ varietà Riemanniana completa* (*modellata su uno spazio di Hilbert*) *e sia $h \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Diremo che h soddisfa la condizione di Palais-Smale in $h_a^b = \{u \in \mathcal{M} : a \leq h(u) \leq b\}$ a livello $c \in (a, b)$, se per ogni successione u_n in h_a^b tale che*

i) $h(u_n) \to c$, *per* $n \to +\infty$,

ii) $h'(u_n) \to 0$, *per* $n \to +\infty$;

risulta che u_n ammette una estratta convergente a $u \in h_a^b$.

TEOREMA 5.3. – *Sia $\mathcal{M}$ una $C^{1,1}$ varietà Riemanniana completa (modellata su uno spazio di Hilbert) e assumiamo che $h \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ sia limitato dal basso. Siano $-\infty < \inf_{\mathcal{M}} h < a < b < +\infty$ e a non sia valore critico per h. Supponiamo che h soddisfi la condizione di Palais-Smale su un sottolivello $h^b = \{u \in \mathcal{M}: h(u) \leq b\}$. Allora*

$$\#\{u \in h^a: \nabla h(u) = 0\} \geq \operatorname*{cat}_{h^a}(h^a)$$

dove $h^a \equiv \{u \in \mathcal{M}: h(u) \leq a\}$.

LEMMA 5.4. – *Siano H, Ω^+ e Ω^- insiemi chiusi con $\Omega^- \subset \Omega^+$; siano $\beta : H \to \Omega^+$, $\psi : \Omega^- \to H$ due mappe continue tali che $\beta \circ \psi$ è omotopicamente equivalente all'immersione $j : \Omega^- \to \Omega^+$. Allora $\operatorname*{cat}_H(H) \geq \operatorname*{cat}_{\Omega^+}(\Omega^-)$.*

La dimostrazione del lemma precedente segue da una semplice applicazione della definizione di categoria e dalla definizione di equivalenza omotopica tra mappe.

Come nella sezione 3, si ponga $V(x) = \lambda + W(x)$ e consideriamo il problema

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + W(x)\, u = |u|^{p-1} u\,, & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,, \end{cases}$$

con $1 < p < 2^* - 1$. Supponiamo che il potenziale sia continuo su $\mathbb{R}^N$ e soddisfi l'ipotesi

$$\liminf_{|x| \to \infty} W(x) > \inf_{x \in \mathbb{R}^N} W(x) > 0\,. \tag{5.1}$$

Come accennato nella sezione 2, P. Rabinowitz [R] ha dimostrato che per un potenziale continuo che verifica (5.1) esiste una soluzione di Passo Montano per ε sufficientemente piccolo. Successivamente X. Wang [W] ha provato che questa soluzione si concentra in un punto di minimo assoluto del potenziale. Al fine di presentare il risultato di molteplicità contenuto in [CL], introduciamo delle notazioni.

Definiamo

$$W_0 \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}^N} W(x)\,,$$
$$M = \{x \in \mathbb{R}^N: W(x) = W_0\}\,,$$
$$M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N: d(x, M) \leq \delta\}\,.$$

In [CL] abbiamo provato il seguente risultato:

TEOREMA 5.5. – *Supponiamo che W sia continuo in $\mathbb{R}^N$ e soddisfi l'ipotesi* (5.1). *Allora per ogni $\delta > 0$ esiste $\varepsilon_\delta > 0$ tale che (P_ε) ha almeno $\operatorname{cat}_{M_\delta}(M)$ soluzioni positive, per ogni $\varepsilon < \varepsilon_\delta$.*

Il Teorema 5.5 viene dimostrato con un approccio variazionale. Si considera lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} W(x)\,|u|^2 < +\infty \right\},$$

munito del prodotto scalare $(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + W(x)\,uv)\,dx$. Si denota con $\|\cdot\|$ la norma associata al prodotto scalare. Si introduce la varietà

$$\Sigma = \left\{ u \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} = 1 \right\}$$

e il funzionale

$$J_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon^2\,|\nabla u|^2 + W(x)\,|u|^2)\,dx\,, \qquad u \in \Sigma\,.$$

Se u è punto critico di J_ε su Σ e $u > 0$, allora $(J_\varepsilon(u))^{1/(p-1)}u$ è soluzione debole di (P_ε).

Richiamiamo adesso che l'equazione limite

$$(P_\infty) \qquad -\varepsilon^2 \Delta u + \mu u = |u|^{p-1} u\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

con $\varepsilon, \mu > 0$ ha un'unica soluzione positiva $\widetilde{\omega}(\varepsilon; \mu) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$, radialmente simmetrica rispetto all'origine e che decade esponenzialmente a zero. Il minimo

$$m(\varepsilon; \mu) := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \right)^{2/(p+1)}} \tag{5.2}$$

è raggiunto su una funzione

$$\omega(\varepsilon; \mu) = \frac{\widetilde{\omega}(\varepsilon; \mu)}{\|\widetilde{\omega}(\varepsilon; \mu)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}}\,.$$

È facile provare che la mappa $m(\varepsilon; \cdot)$ è strettamente crescente. Per convenienza si ponga $\omega = \omega(1; W_0)$. In vista di applicare il Teorema 5.3, l'idea è di introdurre due mappe.

Fissato $\delta > 0$, sia η una funzione descrescente definita su $[0, +\infty)$, tale che $\eta(t) = 1$ se $0 \leqslant t \leqslant \delta/2$, $\eta(t) = 0$ se $t \geqslant \delta$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ e $|\eta'(t)| \leqslant c$ per qualche $c > 0$. Per ogni $y \in M$, definiamo

$$\psi_{\varepsilon, y}(x) = \eta(|x-y|)\, \varepsilon^{-N/(p+1)} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

e poniamo

$$\varphi_{\varepsilon, y}(x) = \frac{\psi_{\varepsilon, y}}{|\psi_{\varepsilon, y}|_{p+1}} .$$

A questo punto introduciamo la mappa $\Phi_\varepsilon \colon M \to H^1(\mathbb{R}^N)$ definita ponendo $\Phi_\varepsilon(y) = \varphi_{\varepsilon, y}$.

Per costruzione si ha che $\Phi_\varepsilon(y)$ ha supporto compatto per ogni $y \in M$ e quindi $\Phi_\varepsilon(y)$ è in $\mathcal{H}$ e in Σ.

Si può dimostrare che risulta

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{N\left(\frac{1-p}{p+1}\right)} J_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y)) = m(1; W_0),$$

uniformemente in $y \in M$.

Si introduce poi una seconda mappa baricentro nel seguente modo. Sia $\varrho > 0$ tale che $M_\delta \subset B_\varrho = \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x| \leqslant \varrho\}$. Sia $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tale che

$$\chi(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leqslant \varrho , \\ \varrho \dfrac{x}{|x|} & \text{se } |x| \geqslant \varrho . \end{cases}$$

Si definisce $\beta : \Sigma \to \mathbb{R}^N$ ponendo

$$\beta(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(x)\, |u(x)|^{p+1} dx .$$

Rimarchiamo che

$$\beta(\Phi_\varepsilon(y)) = y + \int_{\mathbb{R}^N} (\chi(\varepsilon x + y) - y) |\omega(x)|^{p+1} = y + o(1),$$

per $\varepsilon \to 0$, uniformemente per $y \in M$. Consideriamo adesso $h(\varepsilon)$ una funzione positiva che tende a zero per $\varepsilon \to 0$ e poniamo

$$\Sigma_\varepsilon = \{u \in \Sigma : J_\varepsilon(u) \leqslant m(\varepsilon; W_0) + \varepsilon^{N\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} h(\varepsilon)\} .$$

Si dimostra che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{u \in \Sigma_\varepsilon} \inf_{y \in M_\delta} [\beta(u) - \beta(\varphi_{\varepsilon, y})] = 0 .$$

Segue che la mappa $\beta \circ \Phi_\varepsilon$ è omotopica all'immersione $j : M \to M_\delta$ in M_δ, per ε sufficientemente piccolo. Utilizzando il Lemma astratto 5.4, si riesce a collegare la topologia di un sottolivello del funzionale con la topologia di M. Dal momento che il funzionale dell'energia J_ε soddisfa la condizione di Palais-Smale nel sottolivello Σ_ε si può applicare il Teorema 5.3 e ottenere la tesi del Teorema 5.5.

Si osservi che gli argomenti variazionali utilizzati nel Teorema 5.5 non richiedono che la soluzione di energia minima del problema limite sia unica. L'unicità della soluzione di tale problema è invece un ingrediente fondamentale quando si vogliono applicare teoremi di inversione utilizzati ad esempio in [ABC1, L, G]. Questo fatto consente di estendere il Teorema 5.5 a classi di equazioni di Schrödinger nonlineare in cui non vi è l'unicità della soluzione di energia minima del problema limite.

Consideriamo l'equazione più generale del tipo

$$(G_\varepsilon) \qquad -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)\, u = f(x, u)$$

dove $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x, u) = K(x)\, |u|^{p-1} u + Q(x)\, |u|^{q-1} u\,,$$

$1 < q < p < 2^* - 1$, V, K, Q sono funzioni potenziali in competizione, V, K sono funzioni positive limitate, Q può cambiare segno.

Risultati di esistenza di soluzioni positive di (G_ε) per $\varepsilon \to 0$ sono stati ottenuti da T. Bartsch e Z. Q. Wang [BW] nel caso in cui V, K, Q sono invarianti sotto l'azione di un sottogruppo di $O(N)$. Senza ipotesi di simmetria sui coefficienti, per ottenere l'esistenza in [BW] è necessario che il potenziale sia illimitato (sebbene non necessariamente coercivo). Senza ipotesi di illimitatezza sul potenziale V, è noto un risultato dovuto a X. Wang e B. Zeng in cui si prova l'esistenza di una soluzione di energia minima in corrispondenza di piccoli valori di ε.

In [CL1] questo risultato è esteso e si dimostra la molteplicità di soluzioni di (G_ε) per ε piccolo utilizzando la teoria della categoria di Ljusternik–Schnirelman. Il numero di soluzioni viene collegato con la topologia dell'insieme dei minimi globali di una opportuna funzione ausiliaria, cosiddetta di energia minima, $G = G(\xi)$, definita come l'energia minima associata all'equazione a coefficienti costanti

$$(E_\xi) \qquad -\Delta u(x) + V(\xi) u(x) = f(\xi, u)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

(notiamo che qui $\xi \in \mathbb{R}^N$ agisce come un parametro invece che come una variabile indipendente).

Si noti che l'unicità della soluzione di energia minima per il problema

(E_ξ) è nota solo nel caso in cui $Q(\xi) \leqslant 0$ su $\mathbb{R}^N$ oppure $N = 1$ oppure $1 < q < p < N/(N-2)$ e $N > 2$.

Adesso poniamo

$$c_0 = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^N} G(\xi), \qquad M = \{\xi \in \mathbb{R}^N : G(\xi) = c_0\}.$$

Nel caso $Q \equiv 0$, l'insieme dei minimi assoluti di G è, in qualche senso, *una zona intermediaria* tra i minimi di V e i massimi di K. È semplice provare che in questo caso i punti critici di G possono essere trovati come punti critici della funzione

$$g(x) := \frac{V^{(2p+2+N-Np)/(2p-2)}(x)}{K^{2/(p-1)}(x)}.$$

Nel caso $Q \neq 0$ non può essere data una descrizione esplicita dei minimi di G, in termini delle funzioni V, K, Q.

Per ogni $\delta > 0$, denotiamo $M_\delta = \{x \in \boldsymbol{R}^N : d(x, M) \leqslant \delta\}$. Inoltre sia c_∞ l'energia minima associata a

$$-\Delta u(x) + V_\infty u(x) = K_\infty |u(x)|^{p-1} u(x) + Q_\infty |u(x)|^{q-1} u(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

dove

$$V_\infty = \liminf_{|s| \to \infty} V(s), \qquad K_\infty = \limsup_{|s| \to \infty} K(s), \qquad Q_\infty = \limsup_{|s| \to \infty} Q(s)$$

(if $V_\infty = +\infty$, let $c_\infty = +\infty$).

In [CL1] si dimostra il seguente risultato:

TEOREMA 5.6. – *Assumiamo che V, K, Q siano funzioni continue in $\mathbb{R}^N$ che soddisfano le seguenti ipotesi*

(H_1) $V_0 \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0$, $K, Q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $K(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$;

(H_2) $c_0 < c_\infty$.

Allora per ogni $\delta > 0$ esiste $\varepsilon_\delta > 0$ tale che (P_ε) ha almeno $\operatorname{cat}_{M_\delta}(M)$ soluzioni, per ogni $\varepsilon < \varepsilon_\delta$.

Elenchiamo adesso alcune condizioni sufficienti per garantire (H_2), in termini di V, K e Q.

1. $V_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$, $K_\infty = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} K(x)$, $Q_\infty = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x)$.
2. Esiste $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$V_\infty \geqslant V(x_0), \qquad K_\infty \leqslant K(x_0), \qquad Q_\infty \leqslant Q(x_0),$$

con una delle disuguaglianze strette.

3. Esiste $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$\frac{V_\infty^{(2p+2+N-Np)/(2p-2)}}{K_\infty^{2/(p-1)}} \geqslant \frac{V^{(2p+2+N-Np)/(2p-2)}(x_0)}{K^{2/(p-1)}(x_0)},$$

$$\frac{Q_\infty}{V_\infty^{(p-q)/(p-1)}K_\infty^{(q-1)/(p-1)}} \leqslant \frac{Q(x_0)}{V^{(p-q)/(p-1)}(x_0)\,K^{(q-1)/(p-1)}(x_0)}$$

con una delle disuguaglianze strette.

Se V, K, Q non sono costanti, allora ciascuna delle condizioni 1-3 garantisce $c_\infty > c_0$. Nel caso $K_\infty = 0$ e $Q_\infty < 0$ abbiamo $c_\infty = +\infty$, da cui (H_2) segue.

6. – Un modello in Ottica Nonlineare.

Le equazioni di Schrödinger nonlineari agli stati stazionari sono fondamentali equazioni anche in Ottica Nonlineare che si deducono nella descrizione matematica della propagazione di onde elettromagnetiche guidate in mezzi con un responso nonlineare. Queste equazioni possono essere direttamente derivate dalle equazioni di Maxwell assumendo una relazione nonlineare tra la polarizzazione elettrica del materiale e il campo elettrico. Descriviamo brevemente il modello. Consideriamo un dielettrico stratificato di composizione omogenea, perpendicolare all'asse x in cui l'indice di rifrazione degli strati esterni dipenda dall'intensità del campo elettromagnetico incidente. Supponiamo che il mezzo non sia carico elettricamente ($\varrho = 0$) e non sia magnetico ($\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{B}$). I campi $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ sono funzioni di $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Le equazioni di Maxwell diventano

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

La costante c denota la velocità della luce nel vuoto. Per una descrizione dettagliata del fenomeno si rimanda a [S]. Viene fatto lo speciale *ansatz* di cercare soluzioni dell'equazione di Maxwell corrispondenti a un campo elettrico monocromatico di frequenza $\omega > 0$, che si propaga nella direzione z e trasverso alla direzione di polarizzazione. Un campo di questo tipo è dato da

$$\boldsymbol{E}(x, z, t) = u(x)\cos(\beta z - \omega t)\,\boldsymbol{e}_2 \tag{6.1}$$

dove $\omega > 0$ è la frequenza, $\dfrac{2\pi}{\beta} > 0$ è la lunghezza d'onda ($\beta > 0$) e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$.

Dall'Ottica è noto che la relazione tra campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e il campo spostamento $\boldsymbol{D}$ è determinata dalla polarizzazione del mezzo $\boldsymbol{P}$ che è una proprietà caratteristica del mezzo sotto l'azione del campo elettrico $\boldsymbol{E}$. Si ha precisamente

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}\,. \tag{6.2}$$

Come al solito, si suppone che la polarizzazione sia data da

$$\boldsymbol{P}(x, y, z, t) = X(x, y, z, s)\, \boldsymbol{E}(x, y, z, t)$$

dove X è una funzione scalare, detta suscettibilità dielettrica, che dipende dal punto (x, y, z) e dall'intensità media del campo elettrico $\left(s = \frac{1}{2} u^2(x)\right)$. Questo tipo di ipotesi è usuale quando si assume che $\boldsymbol{E}$ ha una alta frequenza ottica.

In questa discussione supponiamo che X dipenda solo da x e s; pertanto da (6.2) segue

$$\boldsymbol{D}(x, z, t) = (1 + 4\pi X(x, s))\, \boldsymbol{E}(x, z, t)\,.$$

La quantità $n^2(x, s) = 1 + 4\pi X(x, s)$ è detta funzione dielettrica e $n(x, s)$ rappresenta l'indice di rifrazione.

Tenendo conto che $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$, dalle equazioni di Maxwell si deriva

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2} n^2\left(x, \frac{1}{2} u^2(x)\right) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}\,.$$

Poiché $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}) = 0$, dalla (6.1) si ricava che $u(x)$ deve soddisfare l'equazione di Schrödinger nonlineare

$$-\ddot{u}(x) + \beta^2 u(x) = \frac{\omega^2}{c^2} n^2\left(x, \frac{1}{2} u^2(x)\right) u(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Il campo magnetico corrispondente ad $\boldsymbol{E}$ è dato da

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} = \frac{c}{\omega}\{-\beta u(x) \cos(\beta z - \omega t)\, \boldsymbol{e}_1 + \dot{u}(x) \sin(\beta z - \omega t)\, \boldsymbol{e}_3\}\,.$$

Le condizioni di guida richiedono che i campi $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ decadano a 0 per $|x| \to +\infty$ e matematicamente tale condizione significa

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,, \qquad \lim_{|x| \to \infty} \dot{u}(x) = 0\,.$$

Inoltre l'effetto guida d'onda richiede fisicamente che in ciascun piano $y = \text{cost}$ la densità di energia elettromagnetica totale associata ai campi $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$, ossia

$$W(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\left\{n^2\left(x, \frac{1}{2}u^2(x)\right) |\boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{H}|^2\right\},$$

per unità di lunghezza in z, sia finita. Questo corrisponde a richiedere che in ciascun piano $y \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a}^{a+1} W(x, y, z, t)\, dz\, dx < +\infty ,$$

o equivalentemente

$$u, \dot{u} \in L^2(\mathbb{R}). \tag{6.3}$$

Fisicamente (6.3) garantisce che l'intensità del raggio $I = \dfrac{c^2\beta}{2\omega}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2\, dx$ sia finita.

La possibilità per questo modello di supportare onde guidate dipende da come varia l'indice di rifrazione nel mezzo. Il problema di comprendere come gli effetti nonlineari possono favorire fenomeni di onde guidate è stato oggetto di vivo interesse da parte dei fisici matematici. Dalla legge di Snell è noto che in assenza di effetti nonlineari onde guidate possono esistere se l'indice di rifrazione del mezzo è più grande rispetto agli strati esterni.

Speciali classi di equazioni sono state studiate in corrispondenza di fissate frequenze. L'approccio è in genere numerico e si ricerca la esplicita soluzione per speciali funzione dielettriche. Qui richiamiamo un interessante lavoro di N. N. Akhmediev [A] in cui la propagazione ondosa è studiata in un mezzo simmetrico costituito da tre strati di composizione omogenea, cioè X dipende da (x, y, z) solo attraverso s. In questo modello lo strato interno del mezzo è lineare mentre gli strati esterni sono nonlineari, *self-focusing*, ossia l'indice di rifrazione del mezzo $n(x, s)$ cresce con l'intensità del campo. Viene considerata la seguente funzione dielettrica

$$n^2(x, s) = \begin{cases} q^2 + b^2 & \text{if } |x| < d , \\ q^2 + s & \text{if } |x| > d , \end{cases}$$

dove $q, b \in \mathbb{R}$ e $2d > 0$ denota lo spessore dello strato interno. L'equazione a cui Akhmediev pervenne è la seguente

$$-u'' + (\lambda - c^2 \chi_{[-d, d]})u = (1 - \chi_{[-d, d]})\, u^3, \qquad x \in \mathbb{R} ,$$

dove $\lambda = \beta^2 - q^2$ e $\chi(x)$ è la funzione caratteristica dello strato interno $[-d, d]$. L'equazione si può integrare direttamente ed è possibile mostrare che da una famiglia di soluzioni simmetriche biforca da certo punto $\lambda = \lambda_0$, un ramo di soluzioni asimmetriche. Negli anni 90, alcuni matematici hanno cercato di applicare metodi variazionali e topologici per studiare i modelli nonlineari che vengono fuori con scelte differenti di funzioni dielettriche. Citiamo in particolare i contributi dovuti a Stuart [S, S1, S2], John [JS], Ruppen [Ru], Ambrosetti, Arcoya, J. L. Gámez [AAG]. Più recentemente in collaborazione con D. Arcoya e J. L. Gámez abbiamo analizzato il modello di propagazione di onde guidate in un dielettrico stratificato di composizione non omogenea. Questo conduce a studiare l'equazione di Schrödinger nonlineare

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\ddot{u}(x) + (\lambda - c^2 h(x))\, u(x) = (1 - \chi(x))\, |u(x)|^{p-2} u(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u > 0 \quad \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,. \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$, $p > 2$, $\chi(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[-d, d]$. Qui $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione pari che gioca il ruolo della funzione caratteristica del modello di Akhmediev. Precisamente si assume che valga la seguente ipotesi:

(h) h è una funzione pari, limitata, $h \geqslant 0$, $h \not\equiv 0$, $\operatorname{supp} h \subset [-d, d]$, $d > 0$.

In [ACG] abbiamo ottenuto il seguente risultato:

TEOREMA 6.1. – *Si assuma che h soddisfi* (h). *Se* $\lambda > c^2 \|h\|_\infty$, *allora il problema* (P_λ) *ha, almeno, una soluzione positiva asimmetrica.*

Più in generale, l'esistenza di soluzioni positive asimmetriche di (P_λ) è dimostrata per dimensione $N \geqslant 2$ per il corrispondente problema simmetrico ellittico semilineare su $\mathbb{R}^N$, in un lavoro in collaborazione con J. L. Gámez [CG]. Per $N = 2$, tale problema fornisce un modello matematico per la propagazione di onde guidate cilindriche.

Il problema ellittico semilineare in dimensione $N \geqslant 2$ è dato da:

$$(H_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + (\lambda - c^2 h(x))\, u(x) = (1 - \chi(x))\, f(u(x)), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \quad \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0\,. \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$, $N \geqslant 2$ e $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione radialmente simmetrica, limitata con supporto contenuto nella palla $B_d := \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x| \leqslant d\}$. Viceversa χ denota la funzione caratteristica della palla B_d.

Si suppone inoltre che la funzione $f \in C^1((0, \infty), \mathbb{R})$ soddisfi le seguenti ipotesi:

(f_1) $f(t)\,t^{-1} \to 0$ per $t \to 0$, $f(t)\,t^{-(2^*-1)} \to 0$ per $t \to +\infty$, dove $2^* = 2N/(N-2)$ se $N \geqslant 3$ e 2^* è ogni numero più grande di 2, se $N = 2$;

(f_2) esiste $p > 1$ tale che $0 < pf(t) \leqslant f'(t)t$ per ogni $t > 0$.

In [CG] viene provato il seguente teorema:

TEOREMA 6.2. – *Assumiamo (f_1) e (f_2). Supponiamo inoltre*

(h) $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ è radialmente simmetrica tale che $h \geqslant 0$, $\operatorname{supp} h \subset B_d$, $\operatorname{ess\,inf}_{B_d} h \equiv \overline{h} > 0$.

Se $\lambda > c^2\|h\|_\infty$, allora il problema (H_λ) ha, almeno, una soluzione asimmetrica.

In [ACG] e [CG] viene dimostrata l'esistenza di una soluzione asimmetrica nonostante i problemi siano per loro natura simmetrici. Nella letterata matematica questo è una aspetto comune a diversi lavori concernenti l'esistenza di soluzioni di energia minima asimmetriche per problemi simmetrici. Citiamo un famoso lavoro di H. Brezis e L. Nirenberg [BN] in cui si prova l'esistenza di soluzioni asimmetriche per un problema ellittico simmetrico su un anello. Citiamo ulteriormente gli interessanti risultati contenuti in [Li, CZE, E].

Diamo brevemente un'idea delle dimostrazione del Teorema 6.1. Gli argomenti utilizzati sono variazionali e le soluzioni del problema (P_λ) sono cercate come punti critici del funzionale $I : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definito ponendo

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (|\dot{u}|^2 + q(x)|u|^2)\,dx - \int_{\mathbb{R}} (1-\chi)|u|^p\,dx\,,$$

dove $q(x) := \lambda - c^2 h(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $\lambda > c^2\|h\|_\infty$, allora $\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}} (|\nabla u|^2 + q(x)|u|^2)\,dx$, è una norma equivalente a quella canonica di $H^1(\mathbb{R})$.

Si dimostra che il funzionale I soddisfa una condizione di compattezza, la condizione di Palais-Smale in un opportuno sottolivello al di sotto del livello di energia minima corrispondente al problema all'infinito

$$(P_\infty) \qquad \begin{cases} -\ddot{u}(x) + \lambda u(x) = |u|^{p-2}u\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u > 0\,, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\,. \end{cases}$$

Come già detto nelle sezioni precedenti, è noto che il problema all'infinito (P_∞) ha un'unica soluzione $z_0(x)$ radialmente simmetrica centrata nell'origine. Essendo (P_∞) invariante per traslazioni, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0(x+\theta)$ è ancora soluzione di (P_∞).

Sia adesso $m(\lambda) \equiv m(1, \lambda)$ il livello di energia minima associato al problema all'infinito come definito nella sezione precedente in (5.2). Precisamente si dimostra che I soddisfa la condizione di Palais-Smale nel sottolivello

$$\Sigma := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}) : J(u) < \frac{p-2}{2p} m(\lambda)^{p/(p-2)} \right\}.$$

A questo punto si dimostra che il funzionale I ha la geometria del Passo Montano. Innanzitutto 0 è un punto di minimo locale per I a livello 0. Inoltre per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, con $|\theta|$ sufficientemente grande esiste $\bar{t}_\theta > 0$ tale che $J(\bar{t}_\theta z_\theta) < 0$.

Allora possiamo definire per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ con $|\theta|$ sufficientemente grande, l'insieme

$$\Gamma_\theta = \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R})) : \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = \bar{t}_\theta z_\theta\}$$

e il livello

$$c_\theta := \inf_{\gamma \in \Gamma_\theta} \sup_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)).$$

Si può dimostrare che $c_\theta < \frac{p-2}{2p} m(\lambda)$ e quindi esiste una soluzione di Passo Montano con energia minore di $\frac{p-2}{2p} m(\lambda)^{p/(p-2)}$.

È interessante notare che questa soluzione di Passo Montano non eredita la simmetria del problema. Si può infatti dimostare che ogni eventuale soluzione simmetrica ha energia maggiore di $\frac{p-2}{2p} m(\lambda)^{p/(p-2)}$.

Sia v una soluzione pari del problema (P_λ) allora è facile vedere che per ogni $x \in [-d, d]$ risulta

$$-\ddot{v}(x) + (\lambda - c^2 h(x))\, v(x) \leq 0 .$$

Quindi se $\lambda > c^2 \|h\|_\infty$, $v(x)$ è convessa in $(-d, d)$ e

$$\max\{v(x) : x \in [-d, d]\} = v(-d) = v(d)$$

con $\dot{v}(d) > 0$, per il lemma di Hopf. Allora v raggiunge il suo punto di massimo in un certo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-d, d]$. Poichè supp $h \subset [-d, d]$ si ha

$$-\ddot{v}(x) + \lambda v(x) = v(x)^{p-1}, \qquad |x| > d ,$$

con $\dot{v}(\pm x_0) = 0$, e quindi $v(x) = z(|x| - x_0)$, con $|x| \geq x_0$. Essendo z_0 soluzione di

$$-\ddot{z}_0 + \lambda z_0 = z_0^{p-1},$$

si ricava

$$I(v) = \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}} [\,|\dot{v}|^2 + (\lambda - c^2 h)\, v^2]\, dx \geqslant$$

$$\frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R} \setminus [-x_0,\, x_0]} |\dot{v}|^2 + \lambda v^2 = \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}} |\dot{z}_0|^2 + \lambda z_0^2\, dx = \frac{p-2}{2p} m(\lambda)^{p/(p-2)}.$$

Segue dunque che la soluzione di Passo Montano non è pari.

Consideriamo adesso il problema (H_λ). Come prima, soluzioni deboli di (H_λ) corrispondono a punti critici del funzionale dell'energia $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definito ponendo

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\,|\nabla u|^2 + q(x)\,|u|^2)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1-\chi)\, F(u)\, dx\,,$$

dove $F(s) = \int_0^s f(t)\, dt$.

In dimensione $N \geqslant 2$ si possono rifare argomenti analoghi al caso $N = 1$, per provare l'esistenza di una soluzione di Passo di Montagna per il problema (H_λ). Tuttavia vorrei sottolineare che gli argomenti utilizzati in dimensione $N = 1$ per dimostrare le proprietà di non simmetrica della soluzione trovata falliscono in dimensione più alta. In [CG] si ricorrerà all'analisi della funzione energia minima associata a un ausiliario problema di Neumann in un dominio esterno a una palla B_R, come funzione del suo raggio R.

L'idea è di confrontare l'energia minima delle soluzioni simmetriche del problema (H_λ) con il livello di energia dei *ground states* positivi di un opportuno problema di Neumann nel dominio esterno di una palla.

Diamo solo un'accenno della dimostrazione. Sia v una soluzione simmetrica di (H_λ). Allora per $\lambda > c^2 \|h\|_\infty$ si ha

$$\Delta v(x) = (\lambda - c^2 h(x))\, v(x) \geqslant (\lambda - c^2 \|h\|_\infty)\, v(x) > 0\,, \quad \text{per } |x| \leqslant d$$

e quindi per il lemma di Hopf $\frac{\partial v}{\partial n}(x) > 0$, $|x| = d$, dove n è la normale esterna alla palla di raggio d. Segue che v raggiunge il suo massimo globale in un punto x_0 tale che $|x_0| > d$. Essendo v radialmente simmetrica, v soddisfa il problema di Neumann:

$$(N) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(u(x))\,, & |x| > |x_0|\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0\,, & |x| = |x_0|\,. \end{cases}$$

Al fine di confrontare l'energia minima del problema di Neumann (N) con il livello $J(v)$, è cruciale l'analisi della funzione energia minima J_R del generico problema di Neumann nel dominio esterno di una palla di raggio R:

$$(P_R) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(u(x)), & |x| > R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & |x| = R \end{cases}$$

come funzione del suo raggio.

Precisamente si dimostra che J_R è localmente crescente, cioè $J_{R'} < J_R$ per $0 < R' < R$, con R' vicino R. Essendo allora J_R una funzione continua si ha che J_R è strettamente crescente.

Sia adesso $E(\lambda)$ l'energia minima associata al problema limite in $\mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u(x)), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

Si dimostra che

$$\lim_{R \to 0} J_R = E(\lambda),$$

e quindi per $|\theta|$ sufficientemente grande si ha

$$c_\theta < E(\lambda) \equiv J_0 \leqslant J_{|x_0|} \leqslant J(v).$$

Segue che anche nel caso $N \geqslant 2$, la soluzione di Passo Montano è asimmetrica.

BIBLIOGRAFIA

[A] N. N. Akhmediev, *Novel class of nonlinear surface waves, Asymmetric modes in a symmetric layered structure*, Sov. Phys. JEPT, **56** (1982), 299-303.

[An] S. Angenent, *The Shadowing Lemma for Elliptic PDE*, Dynamics of Infinite Dimensional Systems (S. N. Chow and J. K. Hale eds.), **F37** (1987).

[AAG] A. Ambrosetti - D. Arcoya - J. L. Gámez, *Asymmetric bound states of differential equations in Nonlinear Optics*, Rend. Sem. Mat. Padova, **100** (1998), 231-247.

[AB] A. Ambrosetti - M. Badiale, *Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlin., **15** (1998), 233-252.

[ABC] A. Ambrosetti - M. Badiale - S. Cingolani, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations with bounded potentials*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, ser. IX, **7** (1996), 155-160.

[ABC1] A. Ambrosetti - M. Badiale - S. Cingolani, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **140** (1997), 285-300.

[ACZE] A. Ambrosetti - V. Coti Zelati - I. Ekeland, *Symmetry breaking in Hamiltonian systems*, J. Diff. Eq., **67** (1987), 165-184.

[ACG] D. Arcoya - S. Cingolani - J. L. Gámez, *Asymmetric modes in symmetric nonlinear optical waveguides*, SIAM Math. Anal., **30** (1999), 1391-1400.

[BW] T. BARTSCH - Z. Q. WANG, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Part. Diff. Eq., **20** (1995), 1725-1741.

[BC] V. BENCI - G. CERAMI, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems*, Arch. Rat. Mech. Anal., **114** (1991), 79-93.

[BC1] V. BENCI - G. CERAMI, *Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology*, Calc. Var., **2** (1994), 29-48.

[BCP] V. BENCI - G. CERAMI - D. PASSASEO, *On the number of the positive solutions of some nonlinear elliptic problems*, Nonlinear Analysis, A tribute in honour of G. Prodi, Quaderno Scuola Norm. Sup., Pisa 1991, 93-107.

[BL] H. BERESTYCKI - P. L. LIONS, *Nonlinear scalar field equations, I - Existence of a ground state*, Arch. Rat. Mech. Anal., **82** (1983), 313-375.

[BN] H. BREZIS - L. NIRENBERG, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 437-477.

[C] S. CINGOLANI, *On a perturbed semilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^N$, Comm. Applied Anal., **3** (1999), 49-57.

[C1] S. CINGOLANI, *Positive solutions to perturbed elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *involving critical Sobolev exponent*, to appear on Nonlinear Analysis, T.M.A.

[CG] S. CINGOLANI - J. L. GÁMEZ, *Asymmetric positive solutions for a symmetric nonlinear problem in* $\mathbb{R}^N$, Calc. Var. PDE, **11** (2000), 97-117.

[CL] S. CINGOLANI - M. LAZZO, *Multiple semiclassical standing waves for a class of nonlinear Schrödinger equations*, Top. Meth. Nonlinear Anal., **10** (1997), 1-13.

[CL1] S. CINGOLANI - M. LAZZO, *Multiple positive solutions to nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions*, J. Diff. Eq., **160** (2000), 118-138.

[CN] S. CINGOLANI - M. NOLASCO, *Multi-peak periodic semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Royal Soc. Edin., **128** A (1998), 1249-1260.

[Co] J. M. CORON, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C.R.A.S., Ser. I, **299** (1984), 209-212.

[CZE] V. COTI ZELATI - M. J. ESTEBAN, *Symmetry breaking and multiple solutions for a Neumann problem in an exterior domain*, Proc. Royal Soc. Edin., **116A** (1990), 327-339.

[CZR] V. COTI ZELATI - P. RABINOWITZ, *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials*, J. Amer. Math. Soc., **4** (1991), 693-727.

[CZR1] V. COTI ZELATI - P. RABINOWITZ, *Homoclinics type solutions for a semilinear elliptic PDE on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1217-1269.

[FW] A. FLOER - A. WEINSTEIN, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, J. Funct. Anal., **69** (1986), 397-408.

[DF] M. DEL PINO - P. L. FELMER, *Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. PDE, **4** (1996), 121-137.

[DF1] M. DEL PINO - P. L. FELMER, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*, J. Func. Anal., **149** (1997), 245-265.

[DF2] M. DEL PINO - P. L. FELMER, *Multi-peak bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincarè, Anal. Nonlin., **15** (1998), 127-149.

[E] M. J. ESTEBAN, *Nonsymmetric ground states of symmetric variational problems,* Comm. Pure Appl. Math., **44** (1991), 259-274.

[GNN] B. GIDAS - W. M. NI - L. NIREMBERG, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Math. Analysis Appl., Part A **7** (1981), 369-402.

[GSS] M. GRILLAKIS - J. SHATAH - W. STRAUSS, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I*, J. Funct. Anal., **74** (1987), 160-197.

[G] M. GROSSI, *Some recent results on a class of nonlinear Schrödinger equations*, to appear on Math. Z.

[Gu] C. GUI, *Existence of multi-bumps solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational methods*, Comm. Part. Diff. Eq., **21** (1996), 787-820.

[JS] O. JOHN - C. STUART, *Guidance properties of a cylindrical defocusing waveguide*, Comm. Math. Univ. Carolinae, **35** (1994), 653-673.

[K] M. K. KWONG, *Uniqueness of* $\Delta u - \lambda u + u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rat. Mech. Anal., **105** (1989), 243-266.

[L] Y. Y. LI, *On a singularly perturbed elliptic equation*, Adv. Diff. Eq., **2** (1997), 955-980.

[Li] Y. LI, *Remarks on a semilinear elliptic equation on* $\mathbb{R}^n$, J. Diff. Eqs., **74** (1988), 34-49.

[O] Y. G. OH, *Existence of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger with potential in the class* $(V)_a$, Comm. Part. Diff. Eq., **13** (1988), 1499-1519.

[O1] Y. G. OH, *On positive multi-bump states of nonlinear Schrödinger equation under multiple well potentials*, Comm. Math. Phys., **131** (1990), 223-253.

[R] P. RABINNOWITZ, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, ZAMP, **43** (1992), 27-42.

[Ru] H. RUPPEN, *Multiple TE-Modes for planar self-focusing wave guides*, Ann. Mat. Pura Appl., (IV) **CLXXII** (1997), 323-377.

[Se] E. SÉRÉ, *Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Z., **209** (1992), 27-42.

[S] C. STUART, *Self-trapping of an electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum*, Arch. Rational Mech. Anal., **113** (1991), 65-96.

[S1] C. STUART, *Guidance properties of nonlinear planar waveguided,* Arch. Rational Mech. Anal., **125** (1993), 145-200.

[S2] C. STUART, *The principle branch of solutions of a nonlinear elliptic eigenvalue problem in* $\mathbb{R}^N$, J. Diff. Eqs., **124** (1996), 279-301.

[W] X. WANG, *On a concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys., **153** (1993), 223-243.

[WZ] X. WANG - B. ZENG, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions*, SIAM J. Math. Anal., **28** (1997), 633-655.

Dipartimento Interuniversitario di Matematica, Politecnico di Bari, 70125 Bari, Italia
e-mail: cingolan@pascal.dm.uniba.it