
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI ALBERTI

Un risultato di convergenza variazionale per funzionali di tipo Ginzburg-Landau in dimensione qualunque

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 4-B (2001),
n.2, p. 289–310.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_2_289_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_2_289_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un risultato di convergenza variazionale per funzionali di tipo Ginzburg-Landau in dimensione qualunque.

GIOVANNI ALBERTI (*)

Summary. – *We describe an approach via Γ -convergence to the asymptotic behaviour of (minimizers of) complex Ginzburg-Landau functionals in any space dimension, summarizing the results of a joint research with S. Baldo and C. Orlandi [ABO1-2].*

Sunto.

Il comportamento asintotico delle soluzioni di certe equazioni ellittiche variazionali dipendenti da parametro, o meglio dei punti di minimo dei funzionali associati, può essere studiato definendo un opportuno problema variazionale limite, e.g. tramite la nozione di Γ -convergenza. In collaborazione con S. Baldo(**) e G. Orlandi(***) [ABO1-2] abbiamo utilizzato questo approccio per studiare i minimi di funzionali di tipo Ginzburg-Landau in dimensione arbitraria, vale a dire

$$F_\varepsilon(u) := \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u),$$

dove u è definita su un dominio regolare di \mathbf{R}^n ed ha valori in \mathbf{R}^2 e $W(u)$ è un potenziale positivo che si annulla solo per $|u| = 1$, ottenendo che nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ i minimi di F_ε , o, meglio, i determinanti Jacobiani ad essi associati, convergono in senso opportuno ad una superficie minima di codimensione due.

Lo studio del comportamento asintotico di questi funzionali è stato oggetto di molte ricerche in anni recenti, in particolare dopo i risultati di F. Bethuel, H. Brezis e F. Hélein in dimensione due (cfr. [BBH]), per arrivare ai recenti risultati di T. Rivière, F.-H. Lin, E. Sandier ed altri in dimensione superiore (cfr. [LR], [Ri], [Sa]). Uno delle caratteristiche salienti dell'approccio variazionale da noi proposto è la quasi immediata riduzione del caso di dimensione generale al caso di dimensione due, che sottolinea la natura essenzialmente bidimensionale del problema. Da questo punto di vista, è assolutamente fonda-

(*) Comunicazione presentata a Napoli in occasione del XVI Congresso U.M.I.

(**) Dipartimento di Matematica, Università della Basilicata, 85100 Potenza.

(***) Dipartimento Scientifico e Tecnologico, Università di Verona, 37100 Verona.

mentale l'analogia con il comportamento dei funzionali di Ginzburg-Landau scalari, o funzionali di Cahn-Hilliard, per cui l'equivalente del nostro risultato di convergenza variazionale è il noto teorema di L. Modica e S. Mortola (cfr. [MM1-2], [Mo]). Risultati di convergenza variazionale analoghi ai nostri sono anche l'oggetto di una ricerca condotta contemporaneamente ed indipendentemente da R. Jerrard e H.M. Soner [JS2].

Il problema di partenza.

L'oggetto di questa ricerca è lo studio del comportamento asintotico, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, dei minimi u_ε dei funzionali

$$(1) \quad F_\varepsilon(u) := \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u)$$

dove

- $u : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2$, con $n \geq 2$, e $|\nabla u|$ è la norma euclidea della matrice ∇u ,
- $W(u)$ è un potenziale positivo che si annulla solo per $|u| = 1$.

Si noti che F_ε si annulla su tutte le funzioni costanti di modulo uno, e quindi i minimi sono non banali solo in presenza di un qualche vincolo, tipicamente sul dato al bordo. Tuttavia nei casi considerati, e soprattutto per gli aspetti qualitativi del comportamento dei minimi su cui si pone l'accento, si presuppone che la natura di questo vincolo sia sostanzialmente irrilevante.

Alcune varianti.

Il problema summenzionato ammette molte varianti e generalizzazioni, non tutte peraltro facilmente riconducibili al caso base. Tra queste, vorrei ricordare le seguenti:

- $u : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ con $n \geq k$, ed $F_\varepsilon(u)$ è dato da⁽¹⁾

$$(2) \quad F_\varepsilon(u) := \int |\nabla u|^p + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u);$$

- F_ε è definito su sezioni di fibrati su una varietà, invece che per funzioni su un dominio di \mathbf{R}^n (cfr. [BO], [Ri]);
- il luogo di zeri di W ha una topologia più complessa della sfera S^{k-1} ;

⁽¹⁾ In particolare, vengono detti funzionali di G.-L. scalari, o anche di Cahn-Hilliard, quelli dati da $p = 2$ e $k = 1$, e funzionali di G.-L. complessi quelli dati da $p = 2$, $k = 2$, ovvero quelli in (1).

- sono presenti dei termini aggiuntivi in (1), come succede per quasi tutti i funzionali derivati da modelli fisici;

- il termine $\int |\nabla u|^2$ in (1), ovvero $\int |\nabla u|^p$ in (2), viene sostituito da un integrale anisotropo del gradiente, oppure da un termine non-locale (energia di interazione) del tipo

$$(3) \quad \iint J(x' - x) |u(x') - u(x)|^2 dx' dx,$$

opportunamente riscalo in ε .

Motivazioni.

Le ragioni alla base dello studio di questo tipo di problemi di perturbazione singolare sono di due ordini. Da un punto di vista più strettamente matematico, è stato osservato da tempo che i funzionali di G.-L. scalari, cioè quelli in (2) con $k = 1$ e $p = 2$, approssimano il perimetro, ed i minimi corrispondenti convergono ad insiemi di perimetro minimo (cfr. Teorema 3 e commenti seguenti). Per analogia, ci si aspetta che per k arbitrario i funzionali in (2) approssimino in qualche senso il funzionale dell'area per varietà di codimensione k , ovvero di codimensione due nel caso particolare dei funzionali di G.-L. complessi, cioè quelli definiti in (1). Dare una dimostrazione rigorosa di quest'ultimo enunciato è lo scopo principale di questa ricerca.

Da un altro punto di vista, i minimi di (1) in dimensione due con dato al bordo prescritto g possono essere utilizzati per studiare le mappe armoniche da Ω in S^1 nel caso in cui non esistano mappe da Ω in S^1 con traccia g sul bordo ed energia finita⁽²⁾.

Infine, funzionali del tipo (1) appaiono nella modellizzazione della separazione di fase nei fluidi (cfr. [CH]⁽³⁾) e delle transizioni di fase nei superconduttori o in certi superfluidi (cfr. [GL], [GP]⁽⁴⁾), vedi anche [JT] per una trattazio-

⁽²⁾ Ad esempio quando Ω è il disco unitario B^2 del piano e $g : \partial B^2 = S^1 \rightarrow S^1$ ha grado diverso da 0. L'ostruzione è di natura topologica: le mappe nello spazio di Sobolev $W^{1,2}(B^2, S^1)$, pur non essendolo necessariamente, si comportano sotto molti aspetti come mappe continue. Il motivo è che $p = 2$ è l'esponente critico per l'immersione di Sobolev in dimensione due, la situazione infatti cambia per mappe in $W^{1,2}(B^3, S^2)$, come ad esempio $x/|x|$. Per queste ed altre questioni collegate vedi [BCL], [BZ].

⁽³⁾ In questo caso u è un parametro d'ordine scalare che rappresenta la densità relativa delle due fasi del fluido in ogni punto, cosicché i valori $+1$ e -1 corrispondono alla presenza di una sola fase (stati puri). La presenza nell'energia F_ε del potenziale W privilegia gli stati puri ± 1 (separazione di fase), mentre il termine di gradiente penalizza la variazione di u (tensione superficiale); l'energia va minimizzata tenendo fisso il rapporto volumetrico tra le fasi, ovvero preservando il valor medio di u (e non il valore al bordo).

⁽⁴⁾ In entrambi i casi u rappresenta un parametro d'ordine complesso; al posto di un vincolo sul dato al bordo si ha un termine aggiuntivo nell'energia, che corrisponde nel secondo caso al contributo del campo magnetico imposto. Il comportamento dei minimi

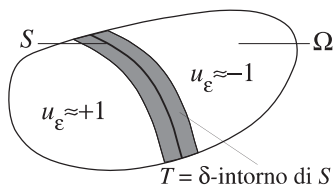


Figura 1

ne di alcuni aspetti più specificamente matematici), come di diversi altri fenomeni fisici⁽⁵⁾.

In tutti questi casi il parametro ε rappresenta una lunghezza con un preciso significato fisico e solitamente molto piccola rispetto agli altri parametri rilevanti, ragion per cui ha senso studiare il comportamento dei minimi nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, invece che per ε fissato.

Un semplice calcolo nel caso scalare.

Vorrei ora illustrare un semplice conto che aiuta a capire cosa ci si debba aspettare dai minimi di F_ε . Cominciamo dai funzionali di G.-L. scalari soggetti al vincolo di volume $\int u = m$, dove m è un numero fissato compreso tra -1 ed 1 (cfr. Nota 3).

In questo caso, il secondo termine in F_ε tende a privilegiare le funzioni u con valori vicini a ± 1 , mentre il primo termine penalizza la variazione di u . Per ε piccolo, il secondo prevale, ed il minimo u_ε si troverà tra le funzioni che assumono valori vicini a ± 1 . D'altra parte, per via del vincolo sulla media di u , devono essere presenti sia la fase $\{u_\varepsilon \approx +1\}$ che la fase $\{u_\varepsilon \approx -1\}$, separate da una sottile intercapedine T dove avviene la transizione di u tra i valori ± 1 .

Supponendo ora che $W(u_\varepsilon)$ sia trascurabile fuori di T , che T sia il δ -intorno di una ipersuperficie S dipendente da ε (cfr. Figura 1) e che u_ε abbia dunque

di questi funzionali non è in realtà immediatamente riconducibile a quello dei minimi di (1), ma è stato studiato usando tecniche analoghe.

⁽⁵⁾ Un funzionale del tipo $\int |\nabla \nabla u|^2 + \varepsilon^{-2} W(\nabla u)$ è stato recentemente proposto nella modellizzazione delle vescicole («blisters») nelle pellicole sottili in presenza di compressione del substrato; ci sono inoltre forti analogie con le energie che modellano alcuni cristalli liquidi o i fenomeni di micromagnetizzazione, in particolare nelle pellicole ferromagnetiche (cfr. [JK]).

gradiente di ordine $1/\delta$ in T , possiamo dare una stima approssimativa di $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$:

$$\int |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u_\varepsilon) \sim \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \cdot \text{vol}(T) \sim \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \delta \cdot \text{area}(S)$$

(dove «vol» e «area» indicano rispettivamente le misure n - ed $(n-1)$ -dimensionali). L'ultimo termine può essere ottimizzato prendendo $\delta \sim \varepsilon$, per cui

$$(4) \quad F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} \text{area}(S).$$

Ne deduciamo che nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ la striscia di transizione del minimo u_ε ha larghezza di ordine ε , mentre S minimizza l'area tra tutte le superfici ammissibili, cioè quelle che separano Ω in due parti Ω^+ ed Ω^- in modo da soddisfare il vincolo di volume $\text{vol}(\Omega^+) - \text{vol}(\Omega^-) = m \text{vol}(\Omega)$. In altre parole i minimi u_ε convergono ad una funzione u a valori ± 1 che soddisfa il vincolo di volume $\int u = m$, scelta in modo tale da minimizzare l'area dell'interfaccia tra le fasi $\{u = +1\}$ ed $\{u = -1\}$.

Queste conclusioni, pur essendo state ottenute con approssimazioni e semplificazioni assai rozze, sono fondamentalmente corrette, e possono essere facilmente confermate da uno sviluppo asintotico formale meno approssimativo⁽⁶⁾. Tuttavia, per quanto più accurato, tale metodo si basa sempre su ipotesi a priori (e.g., che l'insieme di transizione T si configuri come un δ -intorno di una superficie regolare S). Una dimostrazione rigorosa di questo enunciato è

⁽⁶⁾ In effetti la (4) suggerisce uno sviluppo del tipo $F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \Psi(S) + o(\varepsilon^{-1})$, dove $\Psi(S)$ è dell'ordine dell'area di S . Questo non significa necessariamente che $\Psi(S)$ coincida a meno di costanti con $\text{area}(S)$ — anche se per ragioni di isotropia ciò sembra assai ragionevole — e non è dunque corretto dedurne la minimalità di S . L'imprecisione nella (4) è essenzialmente dovuta all'aver maggiorato $|\nabla u|$ con una stima approssimativa della costante di Lipschitz di u all'interno della striscia di transizione T . Si può ottenere uno sviluppo più preciso supponendo che u_ε sia della forma $u_\varepsilon(x) = \phi(\varepsilon^{-1} d_S(x))$, dove $\phi: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ è una funzione da determinare con limite ± 1 a $\pm \infty$, d_S è la distanza orientata da un'ipersuperficie S da determinare, ed il fattore ε^{-1} incorpora il fatto che lo spessore della zona di transizione T è di ordine ε . Si ha allora

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{\mathbf{R}} |\phi'|^2 + W(\phi) \right] \cdot \text{area}(S) + O(1).$$

Il valore minimo dell'integrale tra parentesi quadre si ottiene quando ϕ coincide a meno di traslazioni con la soluzione del problema di Cauchy $\phi(0) = 0$, $\phi' = W^{1/2}(\phi)$ — cioè l'equazione di Eulero-Lagrange $2\phi'' = W'(\phi)$ opportunamente integrata — e vale $\sigma := 2 \int_{\mathbf{R}} W^{1/2}(\phi) \phi' = 2 \int_{-1}^1 W^{1/2}$; dunque

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{area}(S) + O(1).$$

Questa ϕ viene chiamata *profilo ottimale* per la transizione di fase, ed ha un ruolo fondamentale anche nella dimostrazione del Teorema 3 (cfr. [Al]).

stata invece data da L. Modica e S. Mortola (cfr. [MM1-2], [Mo]) determinando il limite nel senso della Γ -convergenza dei funzionali F_ε .

Γ -convergenza e Teorema di Modica-Mortola.

A questo punto è il caso di richiamare brevemente la nozione di Γ -convergenza, in una versione opportunamente semplificata (cfr. [Al], vedi invece [DM] per un'esposizione più dettagliata).

DEFINIZIONE 1. – Sia X uno spazio metrico, e sia $F_\varepsilon: X \rightarrow [0, +\infty]$ una successione di funzioni semicontinue inferiormente. Diciamo che F_ε Γ -converge ad F se sono verificate le seguenti condizioni⁽⁷⁾:

- $\forall x \in X, \forall x_\varepsilon \rightarrow x$ si ha $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq F(x)$;
- $\forall x \in X, \exists x_\varepsilon \rightarrow x$ tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x_\varepsilon) = F(x)$.

Diciamo inoltre che le funzioni F_ε sono equicoercive se vale la seguente condizione di compattezza:

- se $F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq C < +\infty$, allora la successione (x_ε) è precompatta in X .

A partire da questa definizione si deduce facilmente la seguente proprietà fondamentale della Γ -convergenza.

PROPOSIZIONE 2. – Se $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ in X , allora i corrispondenti valori minimi (o gli estremi inferiori dei valori) convergono. Se inoltre x_ε è un punto di minimo di F_ε per ogni ε , ed x è un punto d'accumulazione di x_ε , allora x è un punto di minimo di F .

Dunque il comportamento asintotico dei minimi di una successione di funzionali F_ε (su uno spazio di funzioni X) può essere almeno in parte descritto individuando il Γ -limite di F_ε . Va qui sottolineato che la conoscenza del Γ -limite si traduce in informazioni sul comportamento dei minimi solo se quest'ultimi sono precompatti in X . Questa condizione influenza in modo determinante la scelta della topologia su X , e di conseguenza anche la forma del Γ -limite⁽⁸⁾, e spiega la necessità di verificare, oltre alla Γ -convergenza, anche la condizione di compattezza data nella Definizione 1.

⁽⁷⁾ Dette rispettivamente disuguaglianza del Γ -liminf e del Γ -limsup. Insieme equivalgono alla convergenza nel senso di Kuratowski degli epigrafici delle funzioni F_ε , intesi come insiemi chiusi di $X \times \mathbf{R}$.

⁽⁸⁾ Per esempio, se ϕ è una funzione periodica su \mathbf{R} compresa tra due costanti positive, il Γ -limite di $F_\varepsilon(u) := \int_0^1 \phi(t/\varepsilon) |u'|^2 dt$ sullo spazio $W_g^{1,2}(0, 1)$ delle funzioni di Sobolev con dato al bordo uguale a g cambia a seconda che si consideri la metrica indotta dalla norma $W^{1,2}$ oppure dalla norma L^2 ; peraltro solo la seconda assicura la necessaria compattezza dei minimi.

Infine, il Γ -limite F deve avere una forma non banale: se per esempio risultasse identicamente uguale ad una costante, ogni punto sarebbe di minimo per F , e quindi non otterremmo alcuna informazione sul comportamento dei minimi di F_ε . A questo proposito è importante osservare che riscaldare i funzionali F_ε moltiplicandoli per un'opportuna costante positiva (dipendente da ε) non cambia i punti di minimo, ma può alterare in maniera significativa il Γ -limite; tipicamente si cerca di far sì che i valori minimi non divergano né tendano a zero.

Tornando ai funzionali di G.-L. scalari, nel paragrafo precedente abbiamo ottenuto uno sviluppo indicativo del tipo $F_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1} \cdot \text{area}(S)$ (cfr. formula (4) e Nota 6); questo suggerisce che, una volta riscaldati i funzionali F_ε di un fattore ε , il Γ -limite corrispondente sia finito solo sulle funzioni $u =$ tali che $|u| = 1$ q.o., e risulti in tal caso proporzionale all'area dell'interfaccia tra le fasi $\{u = +1\}$ ed $\{u = -1\}$, cioè l'area dell'insieme singolare Su . Vale infatti il seguente teorema (cfr. [MM1-2], [Mo]):

TEOREMA 3. – *I funzionali riscaldati $\varepsilon F_\varepsilon$ sono equicoercivi in $L^1(\Omega)$, e Γ -convergono a*

$$(5) \quad F(u) := \begin{cases} \sigma \cdot \text{area}(Su) & \text{se } |u| = 1 \text{ q.o.}, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove σ è la costante $2 \int_{-1}^1 W^{1/2}$, cfr. Nota 6.

Da questo risultato⁽⁹⁾ e dalla Proposizione 2 segue che i minimi di F_ε con il solito vincolo di volume convergono a minimi di F , ovvero, come già detto, a funzioni u a valori ± 1 scelte in modo da soddisfare il vincolo di volume $\int u = m$ e minimizzare l'area dell'interfaccia tra le fasi.

OSSERVAZIONE 4. – Si rende qui necessaria un'importante precisazione. Per com'è formulato in (5), F è ben definito per le funzioni u a valori ± 1 il cui insieme singolare è una varietà di codimensione uno sufficientemente regolare. D'altra parte l'approccio variazionale si basa su un lemma di compattezza in $L^1(\Omega)$, e presuppone quindi che F sia definito per ogni funzione misurabile $u: \Omega \rightarrow \pm 1$, e non è così ovvio cosa si debba intendere per area dell'insieme singolare di una tale funzione, o equivalentemente per perimetro di un generico insieme misurabile⁽¹⁰⁾ quale infatti è $\{u = +1\}$. Nel caso specifico si deve

⁽⁹⁾ Più precisamente, da questo stesso teorema di Γ -convergenza per lo spazio X delle funzioni $u \in L^1(\Omega)$ che soddisfano il vincolo di volume $\int u = m$. Si osservi che questo enunciato non segue automaticamente dal Teorema 3 perchè in generale la Γ -convergenza non si eredita ai sottospazi (non è detto infatti che sia ancora soddisfatta la disuguaglianza del Γ -limsup). Nel caso specifico, tuttavia, il passaggio da uno spazio all'altro richiede solo minime modifiche della dimostrazione.

⁽¹⁰⁾ Infatti, quale che sia la nozione di misura $(n-1)$ -dimensionale utilizzata, definendo il perimetro di un insieme in \mathbf{R}^n semplicemente come la misura $(n-1)$ -dimensio-

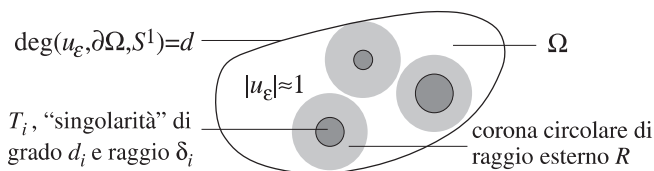


Figura 2

prendere il perimetro nel senso di Caccioppoli di $\{u = +1\}$ all'interno di Ω , cioè metà della variazione totale $\int |Du|$ della derivata distribuzionale di u . Quest'ultima corrisponde alla misura (di Hausdorff) $(n - 1)$ -dimensionale dell'insieme delle singolarità *essenziali* di u , ovvero dei punti in cui u non ammette limite in senso approssimato.

Un semplice calcolo nel caso complesso.

Consideriamo adesso i minimi dei funzionali di G.-L. complessi quando Ω è un dominio semplicemente connesso del piano e si prescrive il dato al bordo g , dove $g : \partial\Omega \rightarrow S^1$ è una funzione regolare di grado $d > 0$. Si vede che per ε piccolo, il secondo termine in F_ε forza i minimi u_ε ad assumere valori di modulo assai vicino ad 1. D'altra parte, preso qualunque $\varrho < 1$ positivo, l'insieme T dei punti di Ω dove $|u_\varepsilon| \leq \varrho$ non può essere vuoto: se infatti così fosse, la mappa $u_\varepsilon/|u_\varepsilon|$ sarebbe ben definita e continua, e composta con un'omotopia di $\partial\Omega$ ad un punto (che esiste perché Ω è semplicemente connesso) permetterebbe di costruire un'omotopia di g ad una costante (come mappe da $\partial\Omega$ in S^1), violando l'invarianza del grado per omotopia⁽¹⁾. Siccome il ruolo di T è, per così dire, di distruggere la semplice connessione di Ω (e non la connessione, come invece succede nel caso scalare), è ragionevole assumere in prima approssimazione che T sia l'unione di un numero imprecisato di dischi T_i di raggio δ_i sul cui bordo u_ε ha grado d_i (cfr. Fig. 2). Ovviamente si ha $\sum d_i = d$.

Nello stimare il valore di $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ si assume che $|\nabla u_\varepsilon|$ sia di ordine $1/\delta_i$ all'interno di ciascun T_i e che il valore di $W(u_\varepsilon)$ sia trascurabile in $\Omega \setminus T$. Siccome la restrizione di u_ε ad una circonferenza di raggio r concentrica ad un qualche T_i è una mappa a valori in S^1 di grado d_i , l'integrale del quadrato della sua de-

nale della frontiera topologica si avrebbero insiemi di perimetro infinito che sono però approssimabili da insiemi regolari con perimetri equilimitati (per esempio un'unione disgiunta di palle B_i di raggio 2^{-i} la cui frontiera ha misura di Lebesgue positiva). In altre parole, questo perimetro non sarebbe semicontinuo inferiormente (e.g., rispetto alla metrica L^1), mentre sappiamo che F deve esserlo, come ogni Γ -limite.

⁽¹⁾ Nella sua formulazione usuale, questa argomentazione richiede che u_ε sia continua, ma vale anche per mappe nello spazio di Sobolev $W^{1,2}$ (cfr. Nota 2).

rivata tangenziale deve essere almeno $2\pi d_i^2/r$. Preso quindi R in modo tale che i dischi di raggio R concentrici a ciascun T_i siano disgiunti e contenuti in Ω (cfr. Fig. 2), si ottiene

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim \sum_i \pi \delta_i^2 \left(\frac{1}{\delta_i^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) + \int_{\delta_i}^R \frac{2\pi d_i^2}{r} dr \sim \pi \sum_i 1 + \frac{\delta_i^2}{\varepsilon^2} - 2d_i^2 \log \delta_i.$$

Ciascun addendo nell'ultimo termine può essere ottimizzato prendendo $\delta_i \sim \varepsilon$, da cui

$$(6) \quad F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim 2\pi |\log \varepsilon| \sum_i d_i^2;$$

infine la somma $\sum d_i^2$ può essere ottimizzata rispetto al vincolo $\sum d_i = d$ prendendo $d_i = 1$ per ogni i . Ne deduciamo che nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ l'insieme di transizione di u_ε è costituito da un numero d di «singolarità» di grado 1 e raggio di ordine ε . In altre parole, i minimi u_ε convergono ad una funzione $u : \Omega \rightarrow S^1$ armonica e regolare al di fuori di d punti singolari di grado 1.

Pur essendo frutto di drastiche semplificazioni⁽¹²⁾, queste conclusioni sono sostanzialmente corrette; un'analisi accurata del comportamento di questi minimi, contenente una dimostrazione rigorosa di queste ed altre affermazioni⁽¹³⁾, è l'oggetto della fondamentale monografia di F. Bethuel, H. Brezis e F. Hélein [BBH], a cui rimandiamo anche per una bibliografia dettagliata.

Passaggio alla dimensione superiore.

Vediamo ora cosa succede in dimensione tre. Preso un dominio Ω convesso, si considerano tipicamente i minimi di F_ε con dato al bordo g_ε , dove $g_\varepsilon : \Omega \rightarrow B^2$ è una funzione regolare di modulo uguale ad 1 al di fuori di un numero finito di «singolarità» U_i di raggio ε , i cui centri x_i e gradi $d_i = \pm 1$ non dipendono da ε (essendo $\partial\Omega$ semplicemente connesso, il numero delle singolarità $+1$ deve essere pari alle -1).

Procedendo come nel caso precedente, ci si convince facilmente del fatto che per ε piccolo u_ε avrà modulo vicino ad 1 al di fuori di un insieme di transizione T strutturato all'incirca come un ε -intorno di una 1-varietà S (unione di

⁽¹²⁾ Lo sviluppo dato in (6), a differenza di quello in (4), è molto preciso; si potrebbe infatti dimostrare che $F_\varepsilon(u_\varepsilon) = 2\pi |\log \varepsilon| \sum d_i^2 + O(1)$. Questa sorprendentemente accuratezza è dovuta al fatto che l'energia non si concentra nella zona di transizione, — cioè sui dischetti T_i , dove abbiamo usato stime molto rozze — quanto sulle corone circolari attorno, dove invece le stime usate risultano assai precise. Dunque nel caso complesso il problema dell'individuazione del profilo ottimale per la transizione di fase non si pone, e per lo stesso motivo W non interviene nella determinazione della sviluppo in (6) (cfr. Nota 6).

⁽¹³⁾ Cfr. le osservazioni dopo il Teorema 10.

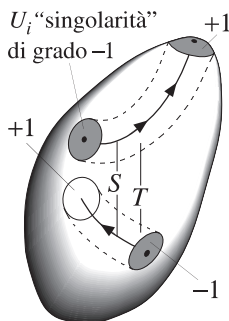


Figura 3

curve orientate) il cui bordo corrisponde ai punti x_i (cfr. Fig. 3), e

$$(7) \quad F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim 2 |\log \varepsilon| \cdot \text{lunghezza}(S)$$

(tralasciamo per il momento la presenza di una molteplicità collegata al grado di «avvolgimento» di u attorno ad S).

Ci si aspetta dunque che le u_ε convergano (a meno di sottosuccessioni) a funzioni $u : \Omega \rightarrow S^1$ regolari (ed armoniche) al di fuori di un insieme singolare S di dimensione uno, scelto in modo da minimizzare la lunghezza tra tutte le 1-varietà con bordo dato dai punti x_i (contati con la loro molteplicità).

A questo punto è inevitabile congetturare che in dimensione qualunque i minimi u_ε dei funzionali di G.-L. complessi con opportuni vincoli al bordo convergano a funzioni $u : \Omega \rightarrow S^1$ regolari (armoniche) al di fuori di un insieme singolare S di codimensione due scelto in modo da minimizzarne la misura $(n-2)$ -dimensionale. Ed infatti un risultato in questa direzione è stato dato da F. H. Lin e T. Rivière [LR] (cfr. anche [Ri], [Sa]). L'approccio seguito in questo lavoro, come nella quasi totalità dei lavori sui funzionali di G.-L. complessi, consiste essenzialmente in un'analisi diretta del comportamento dei minimi u_ε .

L'approccio variazionale.

Nella ricerca in collaborazione con S. Baldo e G. Orlandi abbiamo deciso di seguire una strada diversa, basata sull'analisi del comportamento asintotico di F_ε piuttosto che dei corrispondenti minimi – abbiamo cioè dato un teorema *à la* Modica-Mortola per i funzionali di G.-L. complessi⁽¹⁴⁾. Se molte sono le analogie tra il risultato di Γ -convergenza nel caso scalare e quello nel caso complesso, altrettante sono le differenze, e (purtroppo!) ad un enunciato ed una dimostrazione relativamente semplici come quelli del teorema di Modica-Mortola

⁽¹⁴⁾ La stessa direzione è stata seguita indipendentemente da R. Jerrard e H.M. Sonner [JS2].

corrispondono nel caso complesso un enunciato complicato e meno incisivo (cfr. i Teoremi 9 e 10 da una parte ed il Teorema 3 dall'altra) accompagnato da una dimostrazione nettamente più tecnica – il che spiega almeno in parte gli oltre vent'anni trascorsi dai primi risultati di Modica e Mortola [MM1-2].

Nel seguito cercherò di illustrare le principali difficoltà di una corretta formulazione del risultato di Γ -convergenza per i funzionali di G.-L. complessi, e di accennare brevemente i punti nodali della dimostrazione. Prima, vorrei però aggiungere un breve commento per giustificare la nostra scelta di metodo.

Vale la pena di osservare che una volta ottenuta la dimostrazione della compattezza e della disuguaglianza del Γ -liminf in dimensione due, questa può essere estesa a dimensione superiore utilizzando un principio generale di «affettamento», o «slicing», cosa che mette in rilievo la natura essenzialmente bi-dimensionale del problema (vedi [Al] per l'illustrazione di questo principio nel caso dei funzionali di G.-L. scalari). Nessun principio di riduzione della dimensione per slicing si può invece applicare ai soli minimi. Più in generale, a differenza dell'analisi diretta del comportamento asintotico dei minimi, che si basa di solito su stime ellittiche sofisticate ed estremamente specifiche, lo studio del Γ -limite dei funzionali utilizza solo stime di carattere generale e per certi versi più elementari; per questo motivo le dimostrazioni sono meno vincolate alla forma specifica del funzionale e possono essere adattate (più o meno facilmente) a diverse varianti del problema di partenza.

Se tuttavia i risultati di Γ -convergenza sono in un certo senso più «robusti» di quelli ottenuti con l'analisi diretta dei minimi, sono anche inevitabilmente più deboli; per esempio, la compattezza dei minimi è solitamente più forte di quella che si deduce dall'equicoercività dei funzionali (cfr. Nota 22).

Riscaldamento ottimale.

Preliminare ad un risultato di Γ -convergenza è la scelta del riscaldamento ottimale per i funzionali in oggetto. Le stime (6) e (7) suggeriscono chiaramente il riscaldamento $|\log \varepsilon|^{-1}$. Pertanto ridefiniamo i funzionali F_ε come segue:

$$(8) \quad F_\varepsilon(u) := \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u),$$

con $u : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2$, come al solito.

Identificazione del Γ -limite.

Sappiamo già che il Γ -limite F dovrebbe essere un funzionale finito solo sulle funzioni $u : \Omega \rightarrow S^1$, e dovrebbe corrispondere, a meno di costanti moltiplicative, alla misura $(n-2)$ -dimensionale dell'insieme singolare Su delle stes-

se⁽¹⁵⁾, contata con la dovuta molteplicità. Dunque F è chiaramente definito per le funzioni u regolari al di fuori di una varietà di codimensione due, ma poiché questa classe non è sufficientemente ampia da potervi dimostrare un risultato di compattezza per i minimi u_ε , dobbiamo affrontare un problema analogo a quello discusso in precedenza per il caso scalare (cfr. Osservazione 4), vale a dire, come definire in modo appropriato la nozione di misura dell'insieme singolare per mappe da Ω in S^1 . Almeno in dimensione due, la soluzione è fornita dalla nozione di Jacobiano *distribuzionale* (cfr. [Ba]).

DEFINIZIONE 5. – Data una funzione $u = (u^1, u^2) : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ limitata e di classe $W^{1,1}$, si definisce lo Jacobiano di u come la distribuzione

$$(9) \quad Ju := \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_1} \right).$$

Si vede immediatamente che Ju coincide con l'usuale $\det(\nabla u)$ per ogni funzione di classe C^2 , ed in effetti lo stesso vale anche per funzioni di classe $W^{1,2}$. Per funzioni di classe $W^{1,1}$, invece, questo determinante potrebbe non essere ben definito, mentre Ju lo è sempre, almeno come distribuzione; l'esempio tipico è la funzione $x/|x|$, che appartiene a $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R}^2)$ per ogni $p < 2$ ed il cui Jacobiano è la delta di Dirac $\pi \cdot \delta_0$.

OSSERVAZIONE 6. – Se $u : \Omega \rightarrow S^1$ è regolare al di fuori di un insieme singolare finito $S = \{x_i\}$ ⁽¹⁶⁾, allora Ju è una misura della forma

$$(10) \quad Ju = \sum_i \pi d_i \cdot \delta_{x_i},$$

dove d_i è il grado della restrizione di u ad una qualunque circonferenza che contiene x_i e nessuno degli altri punti di S . Se ne deduce la seguente formula generale: dato un dominio regolare A relativamente compatto in Ω tale che $\partial A \cap S = \emptyset$

$$(11) \quad \int_A Ju = \pi \deg(u, \partial A, S^1) = \pi \text{link}(\partial A, S),$$

dove $\text{link}(\partial A, S)$ indica l'indice di allacciamento della curva ∂A attorno all'insieme dei punti x_i , contati con la molteplicità d_i . Viceversa, data $u : \Omega \rightarrow S^1$ tale che Ju è una misura finita, allora Ju si rappresenta come in (10) per opportuni x_i in Ω e d_i interi; vale anche la formula (11), a patto di interpretarne correttamente il termine di mezzo.

Questa osservazione suggerisce dunque di candidare a Γ -limite $F(u)$ in dimensione due un opportuno multiplo di $\|Ju\|$, cioè la massa di Ju quando questa è una misura finita, e $+\infty$ altrimenti. Questo funzionale è effettivamente

⁽¹⁵⁾ Insieme singolare la cui presenza, lo ricordo, è imposta dai dati al bordo per F_ε , che nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si traducono in un vincolo di bordo per Su .

⁽¹⁶⁾ Come ad esempio $u(x) := \prod_i (x - x_i) / |x - x_i|$, dove il prodotto è dato dall'identificazione di \mathbf{R}^2 con il campo complesso.

semicontinuo inferiormente⁽¹⁷⁾ e coincide per le funzioni sufficientemente regolari con il numero delle singolarità (contate con la dovuta molteplicità).

La Definizione 5 può essere generalizzata a dimensione superiore utilizzando le nozioni di forma e corrente, cfr. [Si], Capitolo 6⁽¹⁸⁾.

DEFINIZIONE 7. – *Data una funzione $u = (u^1, u^2) : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2$ limitata e di classe $W^{1,1}$, si definisce lo Jacobiano 2-dimensionale di u come la 2-forma (a coefficienti nelle distribuzioni)*

$$(12) \quad Ju := d(u^1 \cdot du^2)$$

Si indica inoltre con $\star Ju$ la $(n-2)$ -corrente senza bordo⁽¹⁹⁾ ottenuta applicando a Ju l'identificazione canonica \star dei 2-covettori di \mathbf{R}^n con gli $(n-2)$ -vettori⁽²⁰⁾.

La classe delle funzioni $u : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2$ per cui Ju è una misura di Radon è stata introdotta da R. Jerrard e H. M. Soner in [JS1], e denominata $B2V(\Omega, \mathbf{R}^2)$ per analogia con lo spazio $BV(\Omega)$ delle funzioni a variazione limitata. In questo contesto, le funzioni a valori in S^1 giocano un ruolo assai simile a quello degli insiemi di perimetro finito, ed in particolare vale un teorema di rettificabilità analogo a quello di De Giorgi: data $u : \Omega \rightarrow S^1$ di classe $B2V$, allora Ju è supportata su un insieme rettificabile di codimensione due, e più precisamente $\star Ju$ è, a meno di un fattore π , una corrente intera senza bordo in Ω – cfr. Note 18 e 19.

⁽¹⁷⁾ Rispetto alla convergenza debole in $W^{1,1}$; segue infatti facilmente dalla (9) che Ju è un operatore debolmente continuo da $W^{1,1}$ nello spazio delle distribuzioni.

⁽¹⁸⁾ Le k -correnti generalizzano il concetto di k -superficie orientata come le distribuzioni quello di funzione, e sono infatti definite come il duale delle k -forme di classe C_c^∞ , essendo l'azione di un'usuale k -superficie orientata su una k -forma data dall'integrazione. Si dice intera una corrente T della forma

$$\langle T; \omega \rangle := \int_S \xi \cdot \langle \omega; \tau \rangle \cdot d\mathcal{H}^k,$$

dove S è un insieme rettificabile k -dimensionale, ovvero è contenuto in un'unione numerabile di k -varietà immerse di classe C^1 , τ è un'orientazione, ovvero un k -vettore unitario che identifica lo spazio tangente ad S in ogni punto, ξ è una molteplicità intera, ed infine \mathcal{H}^k denota la misura (di Hausdorff) k -dimensionale. Nell'ambito delle correnti, quelle intere rappresentano in un certo senso la chiusura delle varietà regolari (più precisamente delle catene poliedrali). Se la corrente T è rappresentabile da una misura (a valori nei k -vettori), si dice massa la sua variazione totale $\|T\|$; per le correnti intere si tratta della misura k -dimensionale di S , contata con la molteplicità ξ .

⁽¹⁹⁾ Come la derivata distribuzionale viene definita tramite la formula di integrazione per parti, così il bordo di una k -corrente T viene definito tramite il teorema di Stokes, ovvero ponendo $\langle \partial T; \omega \rangle := \langle T; d\omega \rangle$ per ogni $(k-1)$ -forma ω di classe C_c^∞ . Nel caso specifico si ha $\partial(\star Ju) = 0$ perché $d(Ju) = d^2(u^1 \cdot du^2) = 0$ (essendo $d^2\omega = 0$ per ogni ω).

⁽²⁰⁾ Ovvero quella definita da $\star(dx_i \wedge dx_j) := (-1)^{i+j} e_{\bar{ij}}$ per ogni $i < j$, dove $e_{\bar{ij}}$ indica l' $(n-2)$ -vettore dato dal prodotto di e_1, \dots, e_n , esclusi e_i ed e_j .

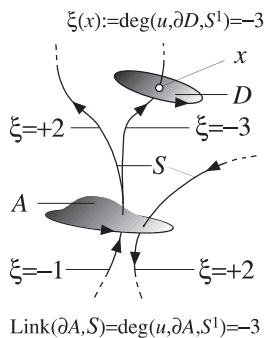


Figura 4

OSSERVAZIONE 8. – Per chiarire meglio questo concetto, vediamo cosa succede in dimensione tre. In questo caso, $\star J u$ coincide col prodotto vettoriale $\nabla u^1 \times \nabla u^2$ per ogni u sufficientemente regolare (e.g. di classe $W^{1,2}$); se invece u è una mappa a valori in S^1 regolare al di fuori di una 1-varietà S senza bordo in Ω (cioè un'unione finita di curve rettificabili contenute in Ω e con bordo contenuto in $\partial\Omega$), allora $\star J u$ è una misura vettoriale singolare supportata su S del tipo

$$(13) \quad \star J u = \pi \xi \cdot \tau \cdot \mathcal{H}^1 \llcorner S,$$

dove $\mathcal{H}^1 \llcorner S$ indica la misura (di Hausdorff) 1-dimensionale su S , $\tau(x)$ è il vettore tangente a S in x , e la molteplicità $\xi(x)$ è data da $\deg(u, \partial D, S^1)$ dove D è un qualunque disco immerso la cui intersezione con S è costituita dal solo punto x ⁽²¹⁾, cfr. Fig. 4.

Il funzionale $\|J u\|$, ovvero $\|\star J u\|$, è debolmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,1}$ (cfr. Nota 17) e coincide con la misura $(n-2)$ -dimensionale della singolarità di u nei casi sufficientemente regolari (cfr. (13)); è dunque un buon candidato a Γ -limite dei funzionali in (8) in qualunque dimensione (a meno di un opportuno fattore moltiplicativo).

Il problema della compattezza.

A questo punto si presenta però una difficoltà fondamentale: è possibile dimostrare la Γ -convergenza dei funzionali F_ε in (8) ad un funzionale del tipo $F(u) := \sigma \|\star J u\|$ rispetto alla topologia debole $W^{1,1}$ (o a qualche metrica più o

⁽²¹⁾ In particolare, vale il seguente analogo della formula (11): data una qualunque 2-varietà A relativamente compatta in Ω e tale che $\partial A \cap S = \emptyset$ (cfr. Fig. 4), si ha che $\int_A \eta \cdot \star J u = \pi \cdot \deg(u, \partial A, S^1) = \pi \cdot \text{link}(\partial A, S)$, dove η denota la normale unitaria ad A , e dunque il primo integrale rappresenta il flusso di $\star J u$ attraverso A .

meno equivalente), ma non dimostrarne l'equicoercività nel senso della Definizione 1.

Data infatti una successione (u_ε) tale che $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$, se ne può al più dimostrare la compattezza *debole* in un qualche L^p con $p < +\infty$ ⁽²²⁾. D'altra parte, il Γ -limite di F_ε rispetto ad una qualunque metrica L^p (quindi persino nella topologia *forte*) è identicamente nullo sulle funzioni u tali che $|u| = 1$ q.o. ⁽²³⁾, ed è quindi inutile, nel senso che non implica nessun criterio di selezione tra le funzioni a valori in S^1 .

Il teorema di Γ -convergenza, versione corretta.

A ben pensarci, la mancanza di equicoercività in una topologia sufficientemente forte non deve sorprendere: se la nostra aspettativa sul Γ -limite di F_ε è corretta, un controllo del tipo $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ implica al massimo l'equilimitatezza L^1 degli Jacobiani Ju_ε , che notoriamente non induce nessuna forma di compattezza delle funzioni. Questo significa semplicemente che non si deve puntare alla compattezza delle funzioni, bensì a quella degli Jacobiani ⁽²⁴⁾, ed il risultato di Γ -convergenza per i funzionali F_ε va riformulato di conseguenza. Cominciamo per semplicità dalla dimensione due.

TEOREMA 9. – Siano F_ε i funzionali dati in (8), ed $n = 2$. Si ha allora che:

- data una successione (u_ε) tale che $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$, le funzioni Ju_ε

⁽²²⁾ In realtà per la successione dei minimi u_ε è possibile dimostrare qualcosa di più (cfr. [LR]), ma la dimostrazione è assai complessa, e dipende in modo determinante dal fatto che le u_ε risolvono un certo sistema ellittico — esattamente il tipo di difficoltà che si vorrebbe aggirare usando l'approccio variazionale.

⁽²³⁾ Infatti ogni funzione $u: \Omega \rightarrow S^1$ misurabile è il limite puntuale q.o. di una successione di funzioni $u_h: \Omega \rightarrow S^1$ di classe C^∞ . In generale $\int |\nabla u_h|^2$ diverge per $h \rightarrow +\infty$, ma posto $u_\varepsilon := u_{h(\varepsilon)}$, $F_\varepsilon(u_\varepsilon) = |\log \varepsilon|^{-1} \int |\nabla u_{h(\varepsilon)}|^2$ è infinitesimo se $h(\varepsilon)$ tende a $+\infty$ in modo sufficientemente lento per $\varepsilon \rightarrow 0$. Il discorso cambia se consideriamo la convergenza $W^{1,1}$ debole: la funzione $x/|x|$, ad esempio, non è approssimabile con funzioni regolari a valori in S^1 , e.g., perché lo Jacobiano di $x/|x|$ è non banale, a differenza di quello di ogni funzione regolare a valori in S^1 . Il punto è che la convergenza quasi ovunque (a differenza di quella $W^{1,1}$ debole) è talmente debole da non essere sensibile ad ostruzioni topologiche di sorta — non a caso l'operatore Jacobiano definito in (9) e (12) non è continuo rispetto a questa convergenza.

⁽²⁴⁾ Qui sta la differenza rispetto ai funzionali di G.-L. scalari: per quest'ultimi, infatti, il Γ -limite $F(u)$ corrisponde alla massa della derivata distribuzionale Du (cfr. Osservazione 4), ed infatti un controllo del tipo $\varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ implica (quasi) l'equilimitatezza L^1 delle derivate ∇u_ε , e quindi la compattezza L^1 delle funzioni u_ε per via del teorema di Rellich. Sottolineo il «quasi»: il controllo delle energie non implica esattamente l'equilimitatezza L^1 delle derivate nel caso scalare, né quella degli Jacobiani nel caso complesso, ed infatti gli Jacobiani Ju_ε non risultano compatti nella topologia debole delle misure, bensì in quella flat (cfr. Teoremi 9 e 10), ragione questa di non poche difficoltà tecniche.

convergono flat⁽²⁵⁾ a misure μ della forma

$$(14) \quad \mu = \sum \pi d_i \cdot \delta_{x_i}$$

con $x_i \in \Omega$ e d_i intero;

- per ogni μ della forma (14) ed ogni (u_ε) tale che $Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} \mu$, vale

$$(15) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 2\pi \sum |d_i| = 2\|\mu\|;$$

• per ogni μ della forma (14) esiste (u_ε) tale che $Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ e vale la (15) con il limite al posto del limite inferiore, e l'uguaglianza al posto della disuguaglianza.

In dimensione maggiore di due abbiamo invece:

TEOREMA 10. – Siano F_ε i funzionali dati in (8), ed $n \geq 2$. Si ha allora che:

• data una successione (u_ε) tale che $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$, le correnti $\star Ju_\varepsilon$ convergono flat, a meno di un fattore π , a correnti rettificabili intere T di codimensione due senza bordo in Ω (cfr. Note 18 e 19);

• per ogni corrente T del tipo suddetto ed ogni (u_ε) tale che $\star Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} T$, vale

$$(16) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 2\pi \|T\|,$$

dove $\|T\|$ è la massa della corrente T ;

• per ogni corrente T rettificabile intera esiste (u_ε) tale che $\star Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} \pi T$ e vale la (16) con il limite al posto del limite inferiore, e l'uguaglianza al posto della disuguaglianza.

Conseguenze del teorema di Γ -convergenza ed osservazioni.

Se u_ε converge debolmente in $W^{1,1}$ ad $u : \Omega \rightarrow S^1$, allora la corrente T è esattamente $\star Ju$; detto questo non è difficile riconoscere negli ultimi due enunciati del Teorema 10 (oppure 9) delle disuguaglianze del Γ -liminf e del Γ -limsup, con $\|\star Ju\|$ rimpiazzato da $\|T\|$. Anche così vale una versione opportunamente modificata della Proposizione 2, da cui si deducono enunciati di questo tenore: se le funzioni u_ε sono minimi dei funzionali F_ε soggetti ai vincoli al bordo già discussi, allora gli Jacobiani $\star Ju_\varepsilon$ convergono (a meno di π) ad una $(n-2)$ -corrente rettificabile intera T di area localmente minima, e le energie $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ convergono a 2π volte la massa di T (cioè, con la notazione introdotta in Nota 18, $\int_S |\xi| d\mathcal{C}^{n-2}$). Quest'ultimo enunciato può essere localizzato, otte-

⁽²⁵⁾ Cioè convergono gli integrali rispetto a tutte le funzioni test di classe C^1 ; si tratta quindi di una convergenza più debole dell'usuale convergenza debole di misure, analoga alla convergenza $W^{-1,p}$ per le funzioni.

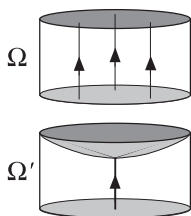


Figura 5

nendo un risultato di concentrazione per le energie: la densità di energia riscalata e_ε associata al minimo u_ε , vale a dire la funzione integranda in (8) con u_ε al posto di u , converge nel senso delle misure a $2\pi|\xi| \cdot \mathcal{H}^{n-2} \llcorner S$.

La rilevanza di questi risultati in dimensione due è limitata. In tal caso, infatti, si ha semplicemente che gli Jacobiani dei minimi u_ε convergono ad una misura μ della forma (14) che minimizza la massa tra tutte quelle il cui integrale è d (grado del dato al bordo). Questo significa che μ minimizza $\sum |d_i|$ con il vincolo $\sum d_i = d$, ovvero semplicemente che i d_i sono concordi. Ma sappiamo già dall'analisi in [BBH] che i gradi d_i delle singolarità sono non solo concordi, ma tutti uguali a $+1$ (o -1), e che inoltre le singolarità x_i sono situate in modo da minimizzare l'energia data da un certo potenziale repulsivo che tende ad allontanare una singolarità dall'altra e dal bordo. Il punto è che il nostro Γ -limite costituisce in un certo senso solo il termine principale di F'_ε (quello di ordine $|\log \varepsilon|$ per il funzionale non riscalato in (1)), che in dimensione due non basta a determinare univocamente il comportamento dei minimi u_ε , ed in particolare non descrive l'effetto di repulsione tra le singolarità. Il discorso cambia in dimensione superiore; a meno di particolari geometrie del dominio Ω , infatti, il criterio di minima area individua un numero finito di correnti intere, se non addirittura una sola, e quindi descrive adeguatamente il comportamento dei minimi.

Si consideri ad esempio questa situazione: Ω è un cilindro retto in \mathbf{R}^3 della forma $x^2 + y^2 < 1$, $0 < z < 1$, e si impone che i minimi u_ε coincidano sulla superficie laterale $S^1 \times (0, 1)$ con una funzione assegnata che dipende solo dalla prima variabile, cioè $g : S^1 \rightarrow S^1$ di grado $d > 1$.

Dal risultato di Γ -convergenza si deduce solo che il limite T degli Jacobiani $\star J u_\varepsilon$ è una 1-corrente intera che minimizza la massa tra tutte quelle il cui bordo consiste di d delte di Dirac sulla faccia superiore, e $-d$ su quella inferiore — in altre parole, T è un'unione di d segmenti verticali in posizione arbitraria (cfr. Fig. 5). Tuttavia una riduzione al caso due dimensionale ci dice che le posizioni dei segmenti non sono affatto arbitrarie, ma scelte in modo da minimizzare un preciso potenziale repulsivo.

Se però rimpiazziamo Ω con un cilindro Ω' con la base superiore leggermente concava, ad esempio ponendo $0 < z < 1 - \delta(1 - x^2 - y^2)$ invece di $0 < z < 1$,

allora il criterio di minimalità individua univocamente T , che consiste infatti in un unico segmento verticale al centro, congiungente dunque i due punti di minima distanza tra la base superiore e quella inferiore, con molteplicità d .

Questa differenza tra la dimensione due e quella superiore si riscontra anche nel comportamento asintotico delle soluzioni delle equazioni paraboliche associate ai funzionali di Ginzburg-Landau (opportunamente riscaldate nel tempo): in dimensione maggiore di due si ritrova, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, un'evoluzione per curvatura media della singolarità, cioè il flusso gradiente della misura $(n-2)$ -dimensionale (cfr. [AS]); in dimensione due, invece, il flusso gradiente della misura 0-dimensionale lascerebbe i punti singolari fermi, mentre l'evoluzione di questi è determinata dal potenziale repulsivo summenzionato, ed è quindi di natura radicalmente diversa dall'evoluzione per curvatura media (cfr. [Li]).

Un breve commento infine sulle possibili generalizzazioni del Teorema 10. Se si considerano i funzionali F_ε definiti in (2) per funzioni a valori in \mathbf{R}^k , si vede innanzitutto che il problema è rilevante per $p \geq k$, cioè quando le funzioni di classe $W^{1,p}$ non ammettono singolarità topologiche di codimensione k ⁽²⁶⁾. In tal caso è ragionevole attendersi (per un opportuno riscaldamento) un risultato analogo al Teorema 10. Dovrebbe tuttavia esserci una certa differenza tra il caso $p > k$ ed il caso limite $p = k$. Per $p > k$, infatti, l'energia dei minimi si concentra nella zona di transizione, e non in un suo intorno (cfr. Nota 12), e la costante che appare di fronte a $\|T\|$ nella generalizzazione della (16) viene determinata da un problema di profilo ottimale analogo a quello che dà la costante σ nel Teorema 3 (cfr. Nota 6). Invece il caso $p = k$ dovrebbe essere sostanzialmente equivalente a quello dei funzionali di G.-L. complessi.

Non è chiaro infine cosa ci si debba aspettare per $k > 1$ quando si sostituisce l'integrale del gradiente in (2) con un'energia di interazione non locale del tipo (3); si sa solo che nel caso scalare vale un teorema di Γ -convergenza analogo al Teorema 3 (cfr. [AB]).

Compattezza e diseuguaglianza del Γ -liminf.

Accenno ora brevemente l'idea base della dimostrazione dell'enunciato di compattezza nel Teorema 9. Per semplicità mi limito dunque alla dimensione due, assumendo inoltre che il potenziale W abbia simmetria radiale, ovvero sia della forma $W(|u|)$.

Prendiamo dunque una successione di funzioni u_ε tali che $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$,

⁽²⁶⁾ Preso infatti $p < k$ e fissato un dato al bordo $g: \partial\Omega \rightarrow S^{k-1}$, il Γ -limite di F_ε è semplicemente uguale a $\int |\nabla u|^p$ per tutte le funzioni in $W_g^{1,p}(\Omega, S^{k-1})$ e a $+\infty$ altrimenti, e a differenza di quello che succede per $p \geq k$, questa classe non è vuota per ogni g sufficientemente regolare, cioè nello spazio delle tracce $W^{1-1/p,p}$.

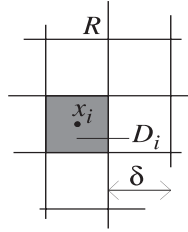


Figura 6

ed indichiamo con e_ε le densità di energia ad esse associate, vale a dire $e_\varepsilon := |\log \varepsilon|^{-1} [|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon^{-2} W(|u_\varepsilon|)]$. Per ogni ε fissiamo un numero positivo $\delta = \delta_\varepsilon$ infinitesimo per $\varepsilon \rightarrow 0$, e scegliamo una griglia 1-dimensionale $R = R_\varepsilon$ di passo δ (cfr. Fig. 6) in modo tale che

$$(17) \quad F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_\Omega e_\varepsilon \geq \delta \int_R e_\varepsilon.$$

La prima osservazione da fare è che se $\delta \gg \varepsilon |\log \varepsilon|$ allora $|u_\varepsilon|$ tende a 1 uniformemente su R ⁽²⁷⁾. Limitandoci allora ai valori di ε per cui $|u_\varepsilon| \geq 1/2$ su R , possiamo parlare di grado d_i di u_ε sul bordo di ogni cella D_i della griglia, intendendo con ciò $d_i := \deg(u_\varepsilon/|u_\varepsilon|, \partial D_i, S^1)$.

La seconda osservazione, che segue da una splendida stima di R. Jerrard [Je], è che per $\delta \gg \varepsilon$, l'energia in ciascuna cella D_i deve essere maggiore o uguale, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, di $2\pi |d_i|$ ⁽²⁸⁾, e dunque

$$(18) \quad C \geq F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 2\pi \sum_i |d_i| - o(1).$$

Ponendo allora $\mu_\varepsilon := \sum_i \pi d_i \cdot \delta_{x_i}$, dove x_i è il centro della cella D_i (e come d_i e D_i

⁽²⁷⁾ La (17) e l'equilimitatezza dell'energie implicano $\int_R W(|u_\varepsilon|) \rightarrow 0$, e siccome W si annulla solo in 1, le funzioni $|u_\varepsilon|$ convergono a 1 in misura su R ; per ottenere la convergenza uniforme basta dunque mostrare che l'oscillazione delle $|u_\varepsilon|$ su R tende a 0. Posto $v_\varepsilon := |u_\varepsilon|$, ed indicando con v'_ε la derivata di v_ε nella direzione tangente alla griglia R , dalla (17) otteniamo

$$C \geq \delta \int_R e_\varepsilon \geq \frac{\delta}{|\log \varepsilon|} \int_R |v'_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(v_\varepsilon) \geq \frac{\delta}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_R 2W^{1/2}(v_\varepsilon) |v'_\varepsilon|$$

dove nell'ultimo passaggio si è applicata la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geq 2ab$ con $a := |v'_\varepsilon|$ e $b := \varepsilon^{-1} W^{1/2}(v_\varepsilon)$. Indicando allora con H una primitiva di $2W^{1/2}$, si ha

$$C \geq \frac{\delta}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_R |(H(v_\varepsilon))'| \geq \frac{\delta}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \text{osc}(H(v_\varepsilon), R)$$

e quindi se $\delta \gg \varepsilon |\log \varepsilon|$ l'oscillazione di $H(v_\varepsilon)$ su R tende a 0, e lo stesso succede per $v_\varepsilon = |u_\varepsilon|$ perché H è strettamente crescente.

⁽²⁸⁾ In realtà vale solo una versione opportunamente raffinata di questo enunciato.

dipende da ε), otteniamo una successione equilimitata di misure i cui punti limite (nella topologia debole) sono misure μ del tipo (14).

Si osservi ora che l'integrale dello Jacobiano di u_ε su D_i è uguale a $\pi d_i + o(1)$ perché $|u_\varepsilon|$ converge uniformemente ad 1 su R . Dunque Ju_ε e μ hanno (quasi) lo stesso integrale su ogni cella della partizione R , che diventa sempre più fine per $\varepsilon \rightarrow 0$; partendo da questo si può dimostrare che queste due successioni di misure sono asintoticamente equivalenti nella distanza flat, per cui (Ju_ε) ha gli stessi punti limite di (μ_ε) . Si noti infine che la (18) implica la diseuguaglianza del Γ -liminf (15), mentre l'estensione a dimensione superiore può essere ottenuta con tecniche di slicing.

Diseuguaglianza del Γ -limsup.

Per dimostrare la diseuguaglianza del Γ -limsup in dimensione due (ultimo enunciato del Teorema 9) basta prendere u_ε della forma⁽²⁹⁾

$$u_\varepsilon(x) := \phi(\varepsilon^{-1} d_S(x)) \cdot u(x)$$

dove $d_S(x)$ è la distanza di x dall'insieme $S := \{x_i\}$, $\phi : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ è una qualunque funzione regolare tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(t) = 1$ per $t \geq 1$, ed $u : \Omega \rightarrow S^1$ è una mappa asintoticamente equivalente a $[(x - x_i)/|x - x_i|]^{d_i}$ in prossimità di ogni x_i , ovvero una mappa con Jacobiano uguale a μ (cfr. Osservazione 6); si può prendere ad esempio (cfr. Nota 16)

$$u(x) := \prod_i \left[\frac{x - x_i}{|x - x_i|} \right]^{d_i}.$$

Il primo punto nella dimostrazione della diseuguaglianza del Γ -limsup in dimensione superiore (ultimo enunciato del Teorema 10) è proprio trovare una funzione u tale che $\star Ju = \pi T$, dove $T = \xi \cdot \tau \cdot \mathcal{C}^{n-2} \llcorner S$ è una qualunque corrente rettificabile intera (cfr. Nota 18).

Supponendo per semplicità che il supporto S sia una varietà orientata di codimensione due senza bordo, e che la molteplicità ξ sia identicamente uguale ad 1, il problema si traduce nel trovare una mappa u a valori in S^1 , regolare al di fuori di S , e tale che (cfr. Nota 21)

$$\deg(u, \gamma, S^1) = \text{link}(\gamma, S) \quad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \text{ t.c. } \gamma \cap S = \emptyset.$$

Una tale u si può scrivere come $u = e^{i\theta}$, dove θ è una funzione regolare dal complementare di S in $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ il cui differenziale è una 1-forma ω_S che soddisfa

$$(19) \quad \int_\gamma \omega_S = 2\pi \text{link}(\gamma, S) \quad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \text{ t.c. } \gamma \cap S = \emptyset.$$

⁽²⁹⁾ In effetti questa costruzione dà il giusto valore dell'energia solo per le misure μ tali che $d_i = \pm 1$ per ogni i ; questo però basta ai nostri scopi, perché tali misure sono dense nella classe delle μ di tipo (14).

Siccome ogni 1-forma ω_S che soddisfa la (19) è integrabile, nel senso che coincide con il differenziale di una mappa a valori in $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, non resta che costruirne una.

Cominciamo con l'osservare che $\text{link}(\gamma, S)$ è uguale al grado della restrizione a $\gamma \times S$ della mappa canonica Φ che porta $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ in $(x - y)/|x - y| \in S^{n-1}$. D'altra parte questo grado, moltiplicato per il volume $(n - 1)$ -dimensionale della sfera S^{n-1} , coincide per la formula dell'area con l'integrale su $\gamma \times M$ della $(n - 1)$ -forma ω , dove ω è il pull-back secondo Φ della forma di volume su S^{n-1} . Dunque

$$\text{vol}(S^{n-1}) \cdot \text{link}(\gamma, S) = \int_{\gamma \times S} \omega = \int_{\gamma} \left[\int_S \omega(x, y) dy \right] dx.$$

Quindi la 1-forma tra parentesi quadre soddisfa, a meno di un fattore costante, la (19). Basta dunque porre

$$\omega_S(x) := \frac{2\pi}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_S \omega(x, y) dy.$$

Si può poi vedere che la funzione u costruita a partire da ω_S ha tutte le caratteristiche necessarie alla costruzione della successione approssimante u_ϵ .

BIBLIOGRAFIA

- [AB] G. ALBERTI - G. BELLETTINI, *A non-local anisotropic model for phase transitions. Asymptotic behaviour of rescaled energies*, European J. Appl. Math., **9** (1998), 261-284.
- [Al] G. ALBERTI, *Variational models for phase transitions. An approach via Γ -convergence*, Differential equations and calculus of variations. Topics on geometrical evolution problems and degree theory (Pisa 1996), 95-114, edito da G. Buttazzo *et al.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.
- [ABO1] G. ALBERTI - S. BALDO - G. ORLANDI, *Functions with prescribed singularities*, Preprint 2000.
- [ABO1] G. ALBERTI - S. BALDO - G. ORLANDI, *Variational convergence for functionals of Ginzburg-Landau type*, Lavoro in preparazione.
- [AS] L. AMBROSIO - H. M. SONER, *A measure-theoretic approach to higher codimension mean curvature flows*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **25** (1997), 27-49.
- [BO] S. BALDO - G. ORLANDI, *Codimension one minimal cycles with coefficients in \mathbf{Z} or \mathbf{Z}_p , and variational functionals on fibered spaces*, J. Geom. Anal., **9** (1999), 547-568.
- [Ba] J. M. BALL, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **63** (1977), 337-403.
- [BZ] F. BETHUEL - X. M. ZHENG, *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces*, J. Funct. Anal., **80** (1988), 60-75.

- [BBH] F. BETHUEL - H. BREZIS - F. HÉLEIN, *Ginzburg-Landau Vortices*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **13**, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [BCL] H. BREZIS - J.-M. CORON - E. H. LIEB, *Harmonic Maps with Defects*, Comm. Math. Phys., **107** (1986), 649-705.
- [CH] J. W. CAHN - J. E. HILLIARD, *Free energy of a nonuniform system, I. Interfacial free energy*, J. Chem. Phys., **28** (1958), 258-267.
- [DM] G. DAL MASO, *An Introduction to Γ -convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **8**, Birkhäuser, Boston 1993.
- [GL] V. L. GINZBURG - L. D. LANDAU, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz., **20** (1950), 1064-1082 (in russo). Tradotto in inglese in *Men of Physics: L. D. Landau, I*, 138-167, edito da D. Ter Haar. Pergamon Press, Oxford 1965.
- [GP] V. L. GINZBURG - L. P. PITAEVSKII, *On the theory of superfluidity*, Soviet Physics JETP (7) (5), **34** (1958), 858-861.
- [JT] A. JAFFE - C. TAUBES, *Vortices and Monopoles. Structure of Static Gauge Theories*, Progress in Physics, **2**, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [Je] R. JERRARD, *Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals*, SIAM J. Math. Anal., **30** (1999), 721-746.
- [JS1] R. JERRARD - H. M. SONER, *Functions of bounded higher variation*, Preprint 1999.
- [JS2] R. JERRARD - H. M. SONER, *The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy*, Lavoro in preparazione.
- [JK] W. JIN - R. V. KOHN, *Singular perturbation and the energy of folds*, J. Nonlinear Sci., **10** (2000), 355-390.
- [Li] F.-H. LIN, *Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 323-359.
- [LR] F.-H. LIN - T. RIVIÈRE, *Complex Ginzburg-Landau equations in high dimensions and codimension two area minimizing currents*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **1** (1999), 237-311.
- [MM1] L. MODICA - S. MORTOLA, *Un esempio di Γ^- -convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5), **14** (1977), 285-299.
- [MM2] L. MODICA - S. MORTOLA, *Il limite nella Γ -convergenza di una famiglia di funzionali ellittici*, Boll. Un. Mat. Ital. A (5), **14** (1977), 526-529.
- [Mo] L. MODICA, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal., **98** (1987), 123-142.
- [Ri] T. RIVIÈRE, *Line vortices in the $U(1)$ -Higgs model*, ESAIM Contrôles Optim. Calc. Var., **1** (1995/96), 77-167. Pubblicazione elettronica, vedi all'indirizzo <http://www.emath.fr/cocv/>.
- [Sa] E. SANDIER, *Ginzburg-Landau minimizers from \mathbf{R}^{n+1} into \mathbf{R}^n and minimal connections*, Preprint 1999.
- [Si] L. SIMON, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis **3**, Australian National University, Canberra 1983.

Dipartimento di Matematica «L. Tonelli», Università di Pisa,
 via Buonarroti 2 - 56127 Pisa, Italia
 e-mail: alberti@ruffini.dm.unipi.it