
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIANCARLO BENETTIN

Applicazioni del teorema di Nekhoroshev alla meccanica celeste

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 4-B (2001),
n.1, p. 71–95.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_1_71_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Applicazioni del teorema di Nekhoroshev alla meccanica celeste.

GIANCARLO BENETTIN (*)

Summary. – *The application of Nekhoroshev theory to selected physical systems, interesting for Celestial Mechanics, is here reviewed. Applications include the stability of motions in the weakly perturbed Euler-Poinsot rigid body and the stability of the so-called Lagrangian equilibria L_4, L_5 in the spatial circular restricted three-body problem. The difficulties to be overcome, which require a nontrivial extension of the standard Nekhoroshev theorem, are the presence of singularities in the fiber structure the phase space, and the presence of «degenerate» variables (actions appearing in the perturbation, but not in the unperturbed system).*

1. – Introduzione.

Il teorema (o teoria) di Nekhoroshev [Ne1, Ne2], sviluppato nel corso degli anni '70, è considerato uno dei risultati più significativi della moderna meccanica hamiltoniana. Assieme al Teorema KAM (Kolmogorov, Arnol'd e Moser), e frutto della medesima scuola — la scuola di Sistemi Dinamici fiorita in Russia al seguito di Kolmogorov — costituisce l'ossatura della moderna teoria delle perturbazioni per sistemi hamiltoniani. La teoria di Nekhoroshev ha avuto un significativo impulso in Italia, a partire dalla metà degli anni '80 [BGG1, BG, GG, Gi], e tale attività è stata a sua volta la base per ulteriori sviluppi, come [Lo, LN, Pö]. Si sono molto studiate in Italia, e ancora si continuano a studiare, le applicazioni della teoria di Nekhoroshev a sistemi fisici tra i più classici: dalla dinamica del corpo rigido [BF1, BFG1] al problema a tre corpi [GM, MG, BFG2], dal problema della «realizzazione dei vincoli olonomi» [BGG2, BGG3] agli scambi di energia nelle collisioni molecolari [BF2, BCG] o alla stabilità degli «ellissoidi di Riemann» [FL]. Di frequente tali applicazioni hanno richiesto sviluppi teorici non banali.

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 15 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

L'autore è grato all'UMI per l'onore ricevuto e per la bella occasione di presentare il proprio lavoro alla riunione di tutti i matematici italiani.

In questo panorama applicativo la Meccanica Celeste ha un ruolo particolare: non solo per il suo ovvio intrinseco interesse, ma anche perché nell'ambiente della Meccanica Celeste, più che in altri, il teorema si è diffuso, è ormai generalmente conosciuto, e al di là dei lavori specifici ad esso dedicati, sta sempre più diventando un solido punto di riferimento culturale. Lo scopo di questa nota è allora quello di illustrare la teoria di Nekhoroshev, e in particolare il lavoro fatto di recente a Padova in quest'ambito, prendendo come filo conduttore alcune applicazioni alla Meccanica Celeste. La trattazione, dedicata principalmente a chi non è specialista di sistemi hamiltoniani, sarà qua e là un po' approssimativa, in particolare nella prossima sezione 2, ove si richiamano in piccolo spazio nozioni che richiederebbero ben più ampia trattazione. Per precisazioni e approfondimenti si rinvia necessariamente alla bibliografia. Allo scopo di alleggerire le formule, si denoterà occasionalmente con C una opportuna costante positiva (ovviamente diversa da caso a caso), che non vale la pena di precisare ulteriormente.

2. – Sistemi integrabili e quasi integrabili.

Nella meccanica hamiltoniana gioca un ruolo centrale una classe speciale di sistemi, detti «integrabili». Una definizione possibile, data per semplicità in coordinate, è la seguente: esistono variabili canoniche «di azione-angolo» $(I, \varphi) = (I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, con I appartenente a una palla $B \in \mathbb{R}^n$ e φ appartenente al toro \mathbb{T}^n (e forma canonica $\sum_j dI_j \wedge d\varphi_j$), tali che l'hamiltoniana del sistema in queste variabili risulta indipendente dagli angoli:

$$(1) \quad H(I, \varphi) = h(I).$$

Lo spazio delle fasi $D = B \times \mathbb{T}^n$ risulta così naturalmente foliato in tori n -dimensionali $\{I\} \times \mathbb{T}^n$ invarianti (cioè preservati dalla dinamica), e su ciascuno di essi il flusso è lineare: denotando infatti con (I^0, φ^0) il dato iniziale, dalle equazioni di Hamilton segue immediatamente

$$I(t) = I^0, \quad \varphi(t) = \varphi^0 + \omega(I^0) t,$$

con $\omega = \frac{\partial h}{\partial I}$. Si veda la figura 1. Per ogni dato iniziale il moto è così quasi-periodico.

Il teorema di Liouville-Arnol'd assicura, sostanzialmente, che a questa descrizione si giunge ogniqualvolta un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà ammette n costanti del moto F_1, \dots, F_n indipendenti e «in involuzione», precisamente tali che le loro mutue parentesi di Poisson $\{F_i, F_j\}$ si annullino per ogni coppia i, j . Le azioni I_1, \dots, I_n risultano essere funzioni di F_1, \dots, F_n . I sistemi integrabili sono, in buona sostanza, quei sistemi ideali che si sanno integrare esattamente, a partire dalle equazioni del moto, attraverso le opera-

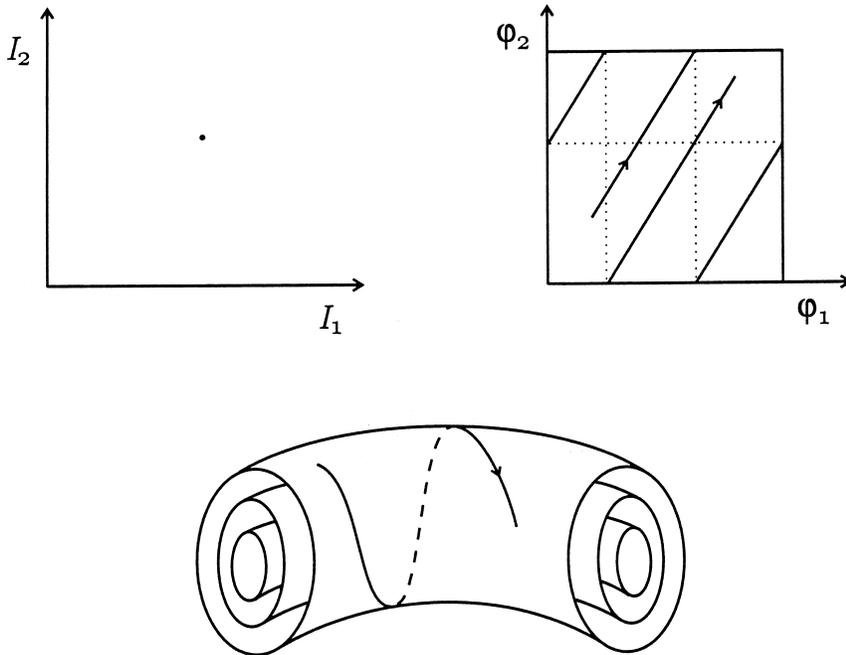


Figura 1. - Il moto quasi periodico sui tori invarianti.

zioni «elementari» di quadratura e inversione. Comprendono, tra i sistemi fisicamente più rilevanti e più noti, il moto centrale, in particolare il sistema di Keplero, il corpo rigido libero o di Eulero-Poinsot, il corpo rigido simmetrico nella gravità o «trottola di Lagrange», i sistemi lineari di masse e molle.

Sistemi hamiltoniani della forma

$$(2) \quad H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi),$$

con ε piccolo parametro, sono detti *quasi integrabili* (è sottinteso che f possa ulteriormente dipendere da ε , in modo regolare). Il problema che si pone in connessione a tali sistemi, fondamentale sia per gli sviluppi matematici cui conduce sia per l'applicazione fisica — per esso Poincaré usò l'espressione forte «*problème général de la dynamique*» [Po] — è se, ed eventualmente su quale scala di tempo, la perturbazione εf faccia evolvere in modo significativo le azioni, rendendo la dinamica perturbata sostanzialmente diversa da quella imperturbata. Si presentano nella forma (2) alcuni tra i più significativi sistemi fisici; a titolo di esempio ne ricordiamo qui tre.

A. Il problema di Keplero. Ci limitiamo per semplicità al caso piano, $n = 2$; sono allora costanti del moto in involuzione l'energia E ($E < 0$ per i moti sulle

ellissi kepleriane) e il momento angolare m . L'azione I_1 dipende solo da E , che a sua volta è funzione del solo semiasse maggiore a dell'ellisse: $I_1 = C\sqrt{a} = C/\sqrt{-E}$, mentre I_2 dipende da E e m , in un modo che non ci interessa ora ricordare; m a sua volta dipende, oltre che dal semiasse maggiore, anche dall'eccentricità dell'ellisse, sicché complessivamente I_1 e I_2 dipendono dalla forma geometrica dell'ellisse, e a loro volta la determinano. Dei due angoli φ_1 e φ_2 , il primo («anomalia media») coincide, a meno della normalizzazione a 2π , con l'area A spazzata dal raggio vettore a partire (ad esempio) dal perielio, $\varphi_1 = 2\pi A/A_{\text{tot}}$, e in accordo con la seconda legge di Keplero cresce linearmente con t ; il secondo angolo («anomalia del perielio») dà invece la direzione del perielio a partire da una direzione prefissata, e resta costante nel caso kepleriano (il secondo angolo avanzerebbe anch'esso uniformemente per un generico moto centrale). L'hamiltoniana dipende dalle sole azioni, e anzi dalla sola I_1 :

$$H(I, \varphi) = h(I_1) = -\frac{C}{I_1^2}.$$

Sistemi integrabili in cui l'hamiltoniana non dipende da una o più azioni sono detti *degeneri*; la proprietà è importante, vedremo, per gli sviluppi perturbativi. Un sistema planetario formato da N pianeti di massa trascurabile, ciascuno descritto da coordinate di azione e angolo $(I_1^{(j)}, I_2^{(j)}, \varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$, è ancora integrabile, e descritto da $H(I, \varphi) = \sum_{j=1}^N h(I_1^{(j)})$. (Per un minimo di realismo, si dovrebbe però passare dal problema piano al problema spaziale e corrispondentemente aggiungere, per ciascun pianeta, una terza coppia di coordinate, descriventi l'orientazione nello spazio del piano dell'orbita del pianeta.) Accendendo le masse dei pianeti e dunque l'attrazione reciproca, si ottiene un sistema perturbato della forma (2); il parametro perturbativo naturale ε è qui il rapporto tra la massa del pianeta più grande e quella del Sole ($\varepsilon \approx 10^{-3}$ per il Sistema Solare vero). La domanda che si pone naturalmente per un tale sistema è se, per effetto della perturbazione, gli *elementi orbitali* dei pianeti (il semiasse maggiore e l'eccentricità di ciascuno, cui si aggiunge nel problema spaziale l'inclinazione del piano dell'orbita rispetto a un piano prefissato) si limitino ad esempio a oscillare, scostandosi di poco dai valori iniziali per piccolo ε , ovvero se, su una opportuna scala di tempo, gli effetti della perturbazione si accumulino, e le caratteristiche del moto si modifichino in modo sostanziale (fenomeni «secolari»). Lo scenario potrebbe a priori comprendere l'espulsione di un pianeta dal sistema, o l'aumento dell'eccentricità fino a farlo collidere col Sole.

B. La stabilità dei moti attorno a un punto di equilibrio ellittico. Il caso più elementare è quello di un sistema hamiltoniano con spazio delle configurazioni \mathbb{R}^n , ristretto all'intorno di un minimo dell'energia potenziale. La teoria

delle piccole oscillazioni in questo caso porta a scrivere l'hamiltoniana (che supponiamo analitica in un intorno del punto di equilibrio) nella forma

$$(3) \quad H(p, q) = H_2(p, q) + H_3(p, q) + H_4(p, q) + \dots,$$

con $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, e

$$(4) \quad H_2(p, q) = \sum_{j=1}^n \omega_j I_j(p_j, q_j), \quad I_j(p, q) = \frac{1}{2}(p_j^2 + q_j^2),$$

mentre H_s , $s \geq 3$, denota un polinomio omogeneo di grado s in (p, q) . Il riscaldamento canonico $p = \varepsilon p'$, $q = \varepsilon q'$, $H' = \varepsilon^{-2} H$, atto a studiare i moti in un intorno di raggio ε del punto di equilibrio, dà alla nuova hamiltoniana H' la forma

$$H' = H_2 + \varepsilon(H_3 + \varepsilon H_4 + \varepsilon^2 \dots).$$

Il sistema integrabile di riferimento H_2 è lineare, e rappresenta una famiglia di oscillatori armonici disaccoppiati. La forma integrabile (1), con coordinate di azione-angolo, si ottiene facilmente con il cambio di variabili

$$p_j = \sqrt{2I_j} \cos \varphi_j, \quad q_j = \sqrt{2I_j} \sin \varphi_j.$$

Per il sistema perturbato tuttavia non è possibile escludere a priori che in un particolare moto una o più delle I_j si annullino, e corrispondentemente le coordinate di azione-angolo, di tipo polare, diventino singolari: pertanto è opportuno non effettuare il cambio di coordinate, e pensare le azioni I_j non come nuove coordinate ma come funzioni di p e q . Il sistema non lineare si presta a modelli di innumerevoli situazioni fisiche.

Tra i problemi che si scrivono nella forma (3), ce n'è uno assai rilevante nell'ambito della Meccanica Celeste, noto come problema degli *equilibri lagrangiani triangolari* L_4 e L_5 , nell'ambito del problema a tre corpi (ristretto, circolare, spaziale). L'idea si spiega semplicemente: consideriamo due masse $m_1 = (1 - \mu)M$ e $m_2 = \mu M$, che chiameremo Sole e Giove, interagenti con potenziale kepleriano, posti in moto circolare attorno al baricentro comune, a distanza rispettivamente μR e $(1 - \mu)R$ dal baricentro in direzione opposta, avendo denotato con R la distanza reciproca. Prendiamo unità di misura in cui $M = 1$, $R = 1$, $\Omega \equiv 2\pi/T = 1$, ove T è il comune periodo di rotazione attorno al centro di massa, e mettiamoci nel sistema di riferimento corotante: precisamente nel sistema con origine nel baricentro, piano x, y coincidente con il piano del moto, e asse x passante per m_2 (figura 2). In tale sistema studiamo il moto di un punto materiale di massa trascurabile, che chiameremo asteroide, soggetto all'attrazione di m_1 e m_2 , ma troppo piccolo per influenzare il loro moto (problema *ristretto*).

Era noto già ad Eulero che nel sistema corotante ci sono cinque posizioni di

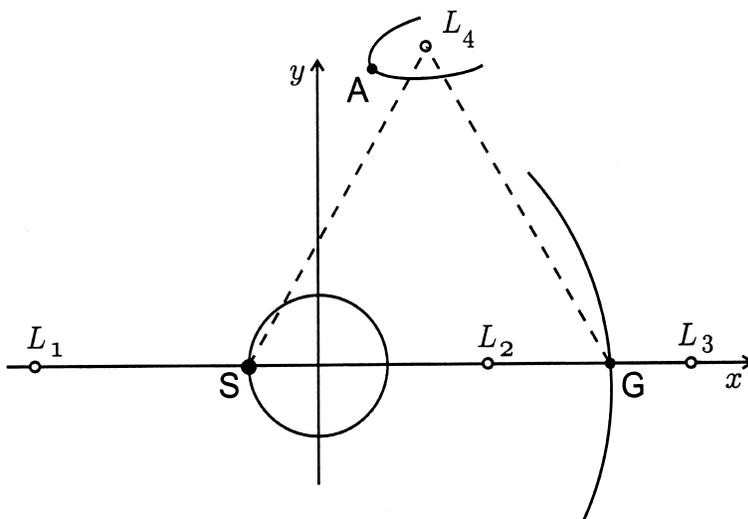


Figura 2. – Il Sole e Giove in moto circolare (fissi nel sistema corotante); i punti di equilibrio lagrangiani L_1, \dots, L_4 ; un asteroide prossimo a L_4 .

equilibrio per l'asteroide, denotate comunemente L_1, \dots, L_5 , e chiamate *equilibri lagrangiani* in omaggio agli studi approfonditi e alle generalizzazioni (al caso ellittico e al caso di massa dell'asteroide non nulla) che ne fece Lagrange. Tre posizioni, denotate L_1, L_2, L_3 , collineari a m_1 e m_2 e dunque sull'asse x del sistema corotante, sono facilmente individuabili; in esse le due attrazioni gravitazionali e la forza centrifuga si fanno equilibrio. Non è difficile vedere che tali equilibri sono instabili: precisamente, sviluppando l'hamiltoniana attorno ad uno qualsiasi di essi, si trova una forma del tipo (3), ma H_2 ha struttura iperbolica anziché ellittica, perciò si ha instabilità già nel problema lineare, alla quale (teorema di Lyapunov) i termini non lineari non possono porre rimedio. Un po' meno ovvio, ma non difficile (bastano poche considerazioni di geometria elementare) è convincersi dell'esistenza di due altre posizioni di equilibrio L_4 e L_5 , in posizione simmetrica rispetto all'asse x , tali da formare con m_1 e m_2 due triangoli equilateri (solo L_4 appare in figura). Per quanto riguarda la stabilità, se si sviluppa l'hamiltoniana attorno a L_4 o L_5 — non c'è differenza — si ottiene (evidentemente) H nella forma (3); il calcolo mostra allora che per μ superiore a un valore critico $\mu_c = 0.038\dots$, detto limite di Routh, il termine H_2 è ancora iperbolico, e corrispondentemente l'equilibrio è instabile. Per $\mu < \mu_c$, invece, H_2 ha la struttura ellittica, perciò per il sistema lineare l'equilibrio è stabile: le tre frequenze tuttavia non hanno lo stesso segno — con la numerazione tradizionale si ha $\omega_1, \omega_3 > 0$, $\omega_2 < 0$ — e dunque il problema della stabilità dell'equilibrio di L_4 e L_5 , per il problema non lineare, è aperto. Di fatto, c'è parecchio

materiale — gli asteroidi cosiddetti «Troiani» e «Greci» — attorno a L_4 e L_5 del problema Sole-Giove, $\mu \approx 10^{-3}$, mentre non se ne trova per il corrispondente problema Terra-Luna, $\mu \approx 0.011$, pure ben al di sotto del limite di Routh. Ritourneremo più avanti su questo punto.

C. *Il corpo rigido di Eulero-Poinsot* (corpo rigido con un punto fisso, in assenza di forze attive). Per semplicità, ci limitiamo qui al caso simmetrico, con momenti principali di inerzia $A_1 = A_2 \neq A_3$. Lo spazio delle fasi di questo sistema è il fibrato cotangente $\mathcal{M} = T^*SO(3)$, che però è banale e si identifica con $SO(3) \times \mathbb{R}^3$. Un punto di \mathcal{M} si può identificare assegnando una configurazione $M \in SO(3)$ — M è la matrice che manda una terna fissa $\{e_x, e_y, e_z\}$ nella terna principale solidale al corpo $\{e_1, e_2, e_3\}$ — e il momento angolare m (ad esempio) nel riferimento solidale, $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3$. In assenza di forze attive il corpo esegue un moto quasi periodico, con due frequenze non nulle, descritto in modo efficace da Poinsot (si veda un qualunque trattato di Meccanica Razionale). Il sistema ha quattro costanti del moto indipendenti, ed è conveniente prendere per esse l'energia cinetica h , il modulo $\|m\|$ del momento angolare, una qualunque componente del momento angolare lungo una direzione fissa nello spazio — ad esempio, con ovvio significato, m_z — e infine la componente m_3 di m lungo l'asse di simmetria del corpo. Sia $(h, \|m\|, m_z)$ che $(h, \|m\|, m_3)$ risultano essere terne di costanti del moto in involuzione (invece $\{m_z, m_3\} \neq 0$). Per m parallelo a e_3 si hanno le *rotazioni stazionarie*, che sono moti eccezionali del corpo, paragonabili, nell'esempio (B) precedente, al caso in cui uno degli oscillatori armonici è a riposo.

Escludendo (provvisoriamente) sia le rotazioni stazionarie, sia i punti di \mathcal{M} con m parallelo a e_z , una carta con variabili di azione-angolo, denotate

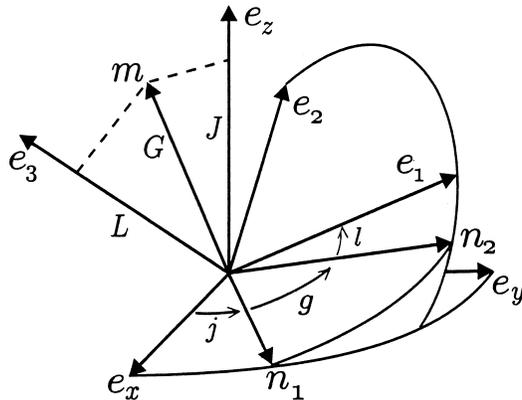


Figura 3. — Le coordinate di azione-angolo G, L, J, g, l, j per il corpo rigido simmetrico.

(G, L, J, g, l, j) , si costruisce nel modo illustrato in figura 3: innanzitutto, si pone $G = \|m\|$; fissato G , con una coppia di coordinate (J, j) si determina il momento angolare nella terna fissa: precisamente, si pone $J = m \cdot e_z$, mentre j si definisce essere l'angolo nel piano e_x, e_y tra e_x e la linea dei nodi $n_1 = e_z \times m$ (angolo di precessione del momento angolare attorno a e_z). Con due altre coordinate $L = m_3$ e g angolo tra n_1 e la seconda linea dei nodi $n_2 = m \times e_3$, nel piano ortogonale a m , si fissa in modo analogo e_3 . Con un'ultima coordinata l si determina infine la configurazione del corpo attorno a e_3 , precisamente si pone $l =$ angolo tra n_2 e e_1 nel piano e_1, e_2 . Che (G, L, J, g, l, j) siano coordinate su \mathcal{M} , per $m \times e_z \neq 0$ e $m \times e_3 \neq 0$, è evidente dalla costruzione. Si dimostra [A,D] che sono coordinate canoniche (con 2-forma canonica $dG \wedge dg + dL \wedge dl + dJ \wedge dj$). L'hamiltoniana del sistema coincide con l'energia cinetica, dipende solo da G e L , e a conti fatti ha l'espressione

$$(5) \quad h(G, L) = \frac{1}{A_1}(G^2 + \eta L^2), \quad \eta = \frac{A_1}{A_3} - 1, \quad -\frac{1}{2} < \eta < \infty.$$

La singolarità della costruzione per $m \times e_z = 0$ è con evidenza una singolarità di carta, legata alla scelta totalmente arbitraria dell'asse z . Facendo riferimento a un diverso asse z si ottiene una seconda carta di coordinate di azione-angolo, e le due carte assieme costituiscono un atlante canonico per

$$\mathcal{M}_0 = \{(M, m) \in \mathcal{M} : m \times e_3 \neq 0\}.$$

Si vede facilmente che L, G, l sono intrinseche (sono funzioni su \mathcal{M}_0), mentre J, g, j dipendono dalla carta; usando un indice $i = 1, 2$ per le due carte, abbiamo così due sistemi di coordinate che è spontaneo denotare $(G, L, J^{(i)}, g^{(i)}, l, j^{(i)})$. L'angolo g dipende dalla carta solo per l'origine n_1 (si vede facilmente che la funzione di transizione è del tipo $g^{(2)} = g^{(1)} + g^{(21)}(J^{(1)}/G, j^{(1)})$). L'hamiltoniana imperturbata h , dipendente solo da G e L , è intrinseca, e con essa la frequenza $\omega = (\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{\partial h}{\partial G}, \frac{\partial h}{\partial L} \right)$,

$$\omega = \frac{1}{A_1}(G, \eta L);$$

ω_1 e ω_2 sono le frequenze delle precessioni nella descrizione classica Poinso. La presenza di due sole azioni in h mostra che il sistema è degenere; nel moto imperturbato le azioni $G, L, J^{(i)}$ e l'angolo $j^{(i)}$ restano costanti, mentre $g^{(i)}$ e l avanzano rispettivamente con velocità ω_1 e ω_2 .

Il sistema perturbato, cioè il corpo rigido in debole campo di forze (o equivalentemente, tramite un riscaldamento, il corpo rigido rapidamente rotante con velocità angolare di ordine ε^{-2}) ha hamiltoniana $H(M, m) : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, che

nelle due carte dell'atlante ha rappresentative della forma

$$(6) \quad H^{(i)}(G, L, J^{(i)}, g^{(i)}, l, j^{(i)}) = h(G, L) + \varepsilon f^{(i)}(G, L, J^{(i)}, g^{(i)}, l, j^{(i)});$$

al caso tipico di forze posizionali corrisponde $f^{(i)}$ omogenea di grado zero nelle azioni. In casi specialissimi, ad esempio quando la forza attiva è la gravità, si sa risolvere il problema perturbato, perché si ricade in un altro sistema integrabile, la trottola di Lagrange. Per tale sistema le azioni G e L restano ancora costanti, e g e l avanzano ancora uniformemente come nel moto di Eulero-Poincot, ma il momento angolare non resta più costante nello spazio, bensì precede lentamente (per piccola gravità) sulla sfera $G = \text{const.}$ attorno alla direzione della gravità. Che cosa succeda per potenziali più generali, quali siano le proprietà di stabilità dei diversi moti, è un problema *studiatissimo*, ma tutt'altro che risolto. Come vedremo, un progresso sostanziale nella comprensione si raggiunge tramite la teoria di Nekhoroshev.

3. – Il teorema di Nekhoroshev.

Il teorema di Nekhoroshev si enuncia comunemente nel modo seguente:

TEOREMA. – *Sia data una hamiltoniana quasi integrabile*

$$H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi), \quad (I, \varphi) \in B \times \mathbb{T}^n.$$

Siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

- i. H è analitica in un intorno complesso del dominio reale $D = B \times \mathbb{T}^n$;
- ii. h è quasi-convessa (si veda sotto).

Allora esistono costanti positive ε_ , a , b , tali che se $\varepsilon < \varepsilon_*$, allora*

$$\|I(t) - I(0)\| < C \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \right)^a$$

per tempi t «esponenzialmente lunghi»,

$$|t| \leq C e^{(\varepsilon_*/\varepsilon)^b}.$$

Possibili valori degli esponenti a , b sono $a = b = 1/(2n)$.

Qualche commento.

1. h si dice quasi-convessa se le equazioni

$$\frac{\partial h}{\partial I} \cdot u = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial I \partial I} u \cdot u = 0,$$

ammettono solo la soluzione banale $u = 0$. Il significato geometrico dell'ipotesi

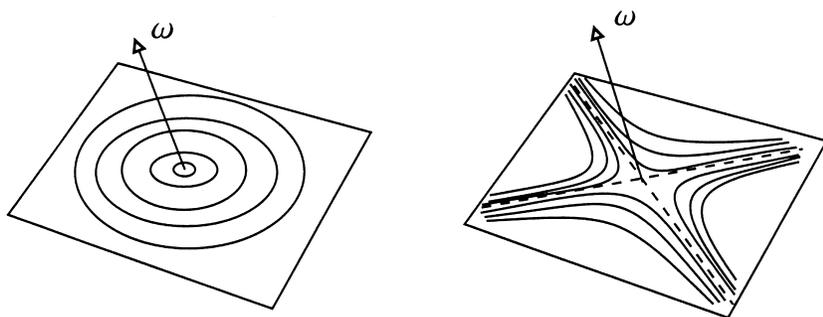


Figura 4. – Ad illustrazione dell'ipotesi di quasi-convessità.

è che preso un qualunque punto $I^* \in B$, la restrizione di h al piano Π ortogonale a $\omega(I^*)$ ha un estremo in I^* , e dunque le superfici di livello hanno l'andamento ellittico delineato in figura 4a. L'ipotesi è rilevante perchè nel corso della dimostrazione si riesce a far vedere che la dinamica con dati iniziali prossimi a I^* è praticamente schiacciata su Π (o suoi sottospazi), e poichè h differisce di poco da H che si conserva, la struttura ellittica indicata in figura 4a fa da ostacolo alla diffusione delle azioni. Si intuisce che se invece tale struttura ellittica è sostituita da una struttura iperbolica, figura 4b, gli asintoti costituiscono potenziali vie di fuga compatibili con la conservazione dell'energia. L'ipotesi di quasi-convessità può essere indebolita chiedendo l'analoga proprietà di non degenerazione del 3-jet di h , precisamente chiedendo che le equazioni

$$(7) \quad \frac{\partial h}{\partial I} \cdot u = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial I \partial I} u \cdot u = 0, \quad \sum_{ijk} \frac{\partial^3 h}{\partial I_i \partial I_j \partial I_k} u_i u_j u_k = 0,$$

ammettano solo la soluzione banale. Il modo in cui si sfrutta questa ipotesi più debole è delicato, e diverso dal meccanismo «elementare» di confinamento, basato sulla conservazione dell'energia, delineato sopra; la generalizzazione inoltre non si trasporta alla corrispondente non degenerazione del 4-jet. L'ipotesi più generale sotto cui il teorema (fin dai primi lavori) è stato dimostrato, detta *steepness*, è molto tecnica, e non ci è possibile qui discuterla; la quasi-convessità e la non degenerazione del 3-jet di h sono casi particolari, i più semplici, di *steepness*.

2. Il teorema propone una nozione di stabilità debole: non si dimostra la stabilità per tutti i tempi, ma «solo» per tempi crescenti molto rapidamente al calare di ε . Il teorema in questo aspetto non è migliorabile (come segue dalla difficoltà sollevata da Poincaré nel suo teorema di non esistenza di integrali primi [Po, BFGG]), a meno di rinunciare ad avere risultati per insiemi aperti di dati iniziali nello spazio delle fasi, come nel teorema KAM. Questa nozione più

debole di stabilità, tuttavia, è molto adatta alle applicazioni fisiche: non si deve dimenticare infatti che qualunque modello di sistema fisico ha senso solo su una determinata scala di tempo, oltre la quale il modello ideale cessa di rappresentare la situazione fisica, e in questo senso perde di interesse. In Meccanica Celeste, sarebbe già molto avere risultati di stabilità validi «solo» per tempi paragonabili all'età del Sistema Solare, o per i tempi ancor più brevi in cui gli effetti dissipativi (dovuti alle maree) sono trascurabili. Una nozione debole di stabilità per tempi lunghi (crescenti come $e^{(\log \varepsilon)^2}$) era già stata introdotta in un problema particolare da Littlewood [Li], con un significativo commento: «*This is not eternity, but is a considerable slice of it*».

Non mancano sistemi fisici interessanti, per cui le ipotesi del teorema di Nekhoroshev sopra enunciato sono soddisfatte. Il più elementare di essi è un sistema di n rotatori con accoppiamento posizionale:

$$H(I, \varphi) = \sum_{j=1}^n \frac{I_j^2}{2} + \varepsilon f(\varphi),$$

con f periodica e analitica. Modelli di questo tipo intervengono, ad esempio, in Meccanica Statistica, e al di là dell'applicazione, per la loro semplicità sono spesso studiati come banco di prova dei procedimenti perturbativi. Ma per i sistemi fisici più interessanti, in particolare per quelli sopra introdotti rilevanti in Meccanica Celeste, le ipotesi del teorema sono nettamente violate. Le difficoltà nell'applicazione del teorema sono di due tipi:

i. L'hamiltoniana diviene singolare in corrispondenza ad alcuni moti imperturbati, come le rotazioni proprie del corpo rigido, i moti in cui uno degli oscillatori armonici è a riposo, e anche, si potrebbe vedere, i moti prossimi ai moti circolari nel problema di Keplero (come si intuisce osservando che l'anomalia del perielio non è più definita). Attorno a tali moti imperturbati — che di frequente sono i più interessanti — viene meno la possibilità di introdurre le variabili di azione-angolo, tramite le quali il teorema è formulato e dimostrato. Una rivisitazione e generalizzazione del teorema, adattata alla presenza di singolarità nelle variabili di azione-angolo, appare indispensabile.

ii. Manca la quasi-convessità (o la *steepness*) di h . È il caso sia degli oscillatori armonici, in cui $h = H_2$ è lineare nelle azioni, sia dei sistemi degeneri come il corpo rigido e il problema di Keplero, in cui h non dipende da tutte le azioni. Per il corpo rigido, l'esempio della trottola di Lagrange mostra che il comportamento di m , e in particolare dell'azione degenera J , dipende in modo essenziale dalla perturbazione, in particolare dalla direzione della gravità, e l'azione degenera in generale non si conserva nel problema perturbato. La formulazione del teorema va evidentemente ripensata.

In anni recenti è stato fatto un grosso sforzo, soprattutto in Italia, per rivi-

sitare il teorema di Nekhoroshev, ed estenderlo in modo da ottenere risultati significativi per i sistemi fisici sopra introdotti (e altri, rilevanti ad esempio per la Meccanica Statistica). Nei prossimi paragrafi illustreremo sommariamente i principali risultati ottenuti; per i dettagli si rinvia alla bibliografia.

4. – Il corpo rigido di Eulero-Poinsot perturbato.

A. La struttura geometrica dello spazio delle fasi. Come abbiamo visto, lo spazio delle fasi \mathcal{M}_0 si copre con due carte di coordinate di azione-angolo, riferite a due scelte diverse dell'asse z . Per comprendere meglio la struttura di \mathcal{M}_0 osserviamo che (si veda [BF1,F] per i dettagli):

i. G e L , che sono definite intrinsecamente su \mathcal{M}_0 , stanno nel settore \mathcal{C} di piano definito da

$$\mathcal{C} = \{(G, L) \in \mathbb{R}^2: G > 0, |L| < G\}.$$

ii. Per ogni scelta di (G, L) , m sta sulla sfera $\|m\| = G$, ovvero $\mu = m/\|m\|$ sta su S^2 , e $(J^{(i)}, j^{(i)})$, $i = 1, 2$, forniscono un atlante di due carte su questa sfera.

iii. Infine, per ogni scelta di m sulla sfera, gli angoli $g^{(i)}$ e l corrono sul toro bidimensionale \mathbb{T}^2 .

Si vede così che \mathcal{M}_0 ha naturalmente una doppia struttura fibrata: una prima fibrazione ha fibra \mathbb{T}^2 , e base $\mathcal{C} \times S^2$; l'altra ha base \mathcal{C} , mentre per fibra ha il fibrato con base S^2 e fibra \mathbb{T}^2 (che non è banale solo perché l'origine di $g^{(i)}$

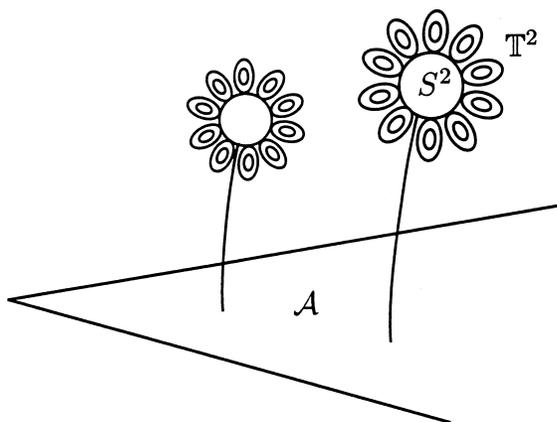


Figura 5. – Un'illustrazione pittorica della doppia fibrazione di $T^*SO(3)$: lo spazio \mathcal{C} delle azioni su cui corrono G e L ; attaccato a ciascun punto una sfera S^2 su cui corre $\mu = m/\|m\|$; attaccato a ciascun punto della sfera un toro \mathbb{T}^2 su cui corrono gli angoli g e l .

dipende dal punto su S^2). Una rappresentazione pittorica di \mathcal{M}_0 è offerta dalla figura 5 (tratta da [F, BF1]); si veda la didascalia. Questa coppia di fibrazioni è la naturale base di partenza per lo studio perturbativo del corpo rigido, ma anche (con naturali generalizzazioni) di ogni sistema degenerare [F], e sostituisce la descrizione, più rozza e in un certo senso fuorviante per i sistemi degeneri, fornita dal teorema di Liouville-Arnol'd. Qui \mathcal{C} è il vero spazio delle azioni, \mathbb{T}^2 il vero spazio degli angoli, ma lo spazio delle fasi non si riduce al prodotto dei due, e invece ha una struttura più complicata di cui si deve tener conto. Se ci si fissa a decomporre lo spazio delle fasi secondo il teorema di Liouville-Arnol'd, dunque cercando una fibrazione con base $B \in \mathbb{R}^3$ e fibra \mathbb{T}^3 , se ne dà una descrizione superficiale (in pratica, si decompone arbitrariamente S^2 , privata di due punti, come $(-G, G) \times S^1$, e si attacca $(-G, G)$ allo spazio delle azioni, e S^1 a \mathbb{T}^2 , in modo da formare \mathbb{T}^3 : operazione poco sensata, e necessariamente non priva di singolarità). Per una esposizione più dettagliata della questione si rinvia a [BF1] e [F].

B. Moti non giroscopici. Consideriamo innanzitutto il caso di moti non giroscopici, precisamente con (M, m) in un insieme $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$, $c > 0$, definito da

$$\mathcal{M}_c = \{(M, m) \in \mathcal{M} : |\mu \times e_3| > c\varepsilon^{1/4}\}, \quad \mu = m/\|m\|.$$

Bisognerà consistentemente dimostrare che in un sistema di questo tipo si resta per tempi lunghi se, ad esempio, il dato iniziale sta nell'insieme poco più piccolo \mathcal{M}_{2c} . L'hamiltoniana $H = h + \varepsilon f$ è una funzione definita intrinsecamente in \mathcal{M}_c , e in ciascun sistema di coordinate $(G, L, J^{(i)}, g^{(i)}, l, j^{(i)})$, $i = 1, 2$, essa ha una rappresentativa locale $H^{(i)}$ della forma (6), con h della forma (5). Su queste rappresentative locali si lavora con gli strumenti consueti della teoria delle perturbazioni; è cruciale operare in modo tale che tutte le funzioni introdotte negli sviluppi perturbativi siano rappresentative locali di funzioni sulla varietà (non è ovvio). Dobbiamo qui limitarci a una esposizione un po' sommaria e qualitativa dei risultati, rinviando a [BF1] e [Gu] per una esposizione più dettagliata. Escludiamo dalle nostre considerazioni il caso $\eta = 0$ (corpo rigido a struttura sferica, poco interessante e da trattare a parte).

Innanzitutto, si prendono in considerazione tutte le *risonanze*, cioè le relazioni del tipo $\omega_2/\omega_1 = \nu_1/\nu_2$, con $\nu \in \mathbb{Z}^2$, e

$$|\nu| = |\nu_1| + |\nu_2| < N = C|\log \varepsilon|;$$

a ogni risonanza corrisponde una semiretta S_ν nello spazio \mathcal{C} delle azioni, di equazione $L/G = \eta^{-1} \nu_1/\nu_2$. Attorno a ciascuna S_ν si traccia una *zona risonante*, precisamente il settore centrato in S_ν , di ampiezza angolare non superiore a $C(N|\nu|)^{-1}$; i diversi settori risultano disgiunti. Il risultato principale è condensato nella seguente proposizione (presa da [BF1], tenendo però conto del miglioramento ottenuto in [Gu]):

PROPOSIZIONE 1. — *Sia H come sopra, definita e analitica in \mathfrak{N}_c . Esiste $\varepsilon_* > 0$ tale che se $\varepsilon < \varepsilon_*$, allora:*

i. *per dati iniziali in \mathfrak{N}_{2c} e tempi*

$$(8) \quad |t| \leq C e^{(\varepsilon_*/\varepsilon)^{1/4}},$$

il sistema non esce da \mathfrak{N}_c , inoltre si ha

$$|G(t) - G(0)|, |L(t) - L(0)|, |\dot{l}(t) - \dot{l}(0)| < C\sqrt{\varepsilon},$$

e in ciascuna carta anche

$$|\dot{g}^{(i)}(t) - \dot{g}^{(i)}(0)| < C\sqrt{\varepsilon}.$$

ii. *Per dati iniziali al di fuori delle zone risonanti, posto*

$$\bar{f}_{G,L}^{(i)}(J^{(i)}, j^{(i)}) = \int_{\mathbb{T}^2} f^{(i)}(G, L, J^{(i)}, g^{(i)}, l, j^{(i)}) dg^{(i)} dl$$

(potenziale mediato sugli angoli g e l), per la medesima scala di tempo (8) risulta

$$\bar{f}_{G(t),L(t)}^{(i)}(J^{(i)}(t), j^{(i)}(t)) - \bar{f}_{G(0),L(0)}^{(i)}(J^{(i)}(0), j^{(i)}(0)) \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Commenti.

1. Il primo punto sta a significare che per ogni dato iniziale in \mathfrak{N}_{2c} , e per una scala di tempo lunga, il corpo esegue un moto di precessione alla Poincaré attorno alla direzione istantanea del momento angolare. Questo tuttavia, a differenza del caso imperturbato, non è fisso nello spazio, ma si muove lentamente — con velocità di ordine ε , come segue immediatamente dalle equazioni di Hamilton — restando $\sqrt{\varepsilon}$ -vicino alla sfera $\|m\| = G(0)$.

2. Il secondo punto invece introduce una differenza rilevante tra i dati iniziali dentro e fuori le zone risonanti. Nel caso tipico in cui sull'insieme di livello

$$\bar{f}_{G(0),L(0)}^{(i)}(J^{(i)}, j^{(i)}) = \text{const.}$$

il gradiente di $\bar{f}_{G(0),L(0)}^{(i)}$ non si annulla, l'insieme stesso è una curva regolare (indipendente dalla carta) sulla sfera $\|m\| = G(0)$. Il secondo punto dice allora che, limitatamente a dati iniziali non risonanti, $m(t)$ si scosta al più di $C\sqrt{\varepsilon}$ dalla curva di livello cui appartiene $m(0)$, ovvero $\mu = m/G$ si scosta di poco da una curva ben definita e calcolabile sulla sfera unitaria. Il comportamento del sistema sulla scala di tempo (8) non differisce, in questo caso non risonante, da quello della trottola di Lagrange, se non per il fatto che le curve di livello del

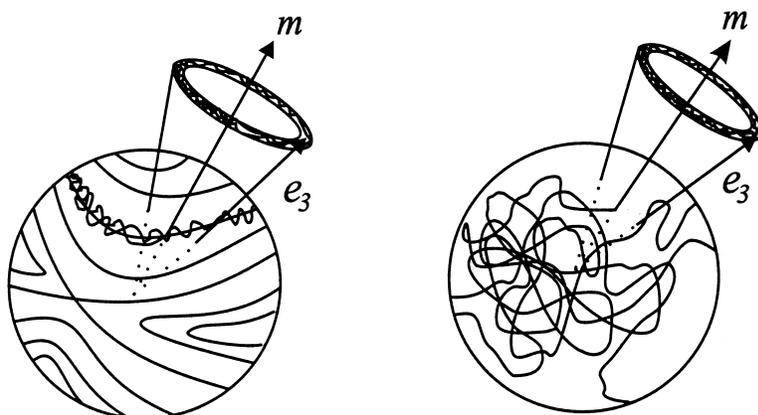


Figura 6. – Moti regolari prossimi a curve invarianti (sinistra) e moti caotici (destra) di $\mu = m/\|m\|$ su S^2 . In ogni caso e_3 precede regolarmente attorno a m .

potenziale mediato sono diverse, e che, per così dire, il quadro resta vero entro una tolleranza piccola con ε . Si veda la figura 6, parte sinistra.

3. Nessuna restrizione invece è posta al moto di m , più precisamente al moto di μ sulla sfera unitaria, nel caso di dati iniziali risonanti. In particolare, *non si escludono moti genuinamente bidimensionali*, anche caotici, di μ su S^2 : e questo *per ε comunque piccolo*. Si veda la figura 6, parte destra. Una parziale evidenza numerica dell'esistenza di tali moti, in risonanze basse, è riportata in [BF1]; uno studio più sistematico [BCF], pressoché concluso, conferma tali risultati preliminari.

4. In [BF1] si erano considerate risonanze fino a $N = C\varepsilon^{-1/4}$. Il miglioramento $N = C|\log \varepsilon|$, assai significativo perché riduce di molto l'insieme risonante per ε piccolo, è stato successivamente ottenuto in [Gu].

5. Per $\eta > 0$ (corpo *prolato*, cioè allungato come un sigaro lungo l'asse di simmetria) h è convessa, in particolare quasi-convessa; per $\eta < 0$ (corpo *oblato*, schiacciato lungo l'asse di simmetria) h non è convessa, ma si verifica facilmente che è quasi-convessa in tutto lo spazio delle azioni $|L| < G$.

B. Moti giroscopici. Il caso di moti prossimi alle rotazioni proprie attorno a e_3 , o moti giroscopici, presenta difficoltà tecniche non banali, legate come si è sopra accennato alla presenza di singolarità geometriche nello spazio delle fasi — i tori T^2 che compaiono nella doppia fibrazione degenerano in S^1 — e alla corrispondente impossibilità di usare in un loro intorno coordinate di azione-angolo. Non ci possiamo qui addentrare a illustrare tali aspetti tecnici. Ma in sostanza si procede così [BFG1]: innanzitutto, alle variabili di azione-angolo

$(G, L, g^{(i)}, l)$ si sostituiscono combinazioni lineari $(\Gamma, A, \gamma^{(i)}, \lambda)$, con

$$\Gamma = G \quad \lambda = G - L \quad \gamma^{(i)} = g^{(i)} + l \quad \lambda = -l$$

(la sostituzione è canonica). La singolarità corrisponde ora a $A = 0$, e su di essa la sola coppia (A, λ) perde significato, mentre si verifica facilmente che la coppia $(\Gamma, \gamma^{(i)})$ resta ben definita. Le coordinate di tipo polare (A, λ) si sostituiscono poi con variabili di tipo cartesiano (x, y) , precisamente

$$x = \sqrt{2A} \cos \lambda = \frac{\sqrt{2} m_2}{\sqrt{2G - A}}, \quad y = \sqrt{2A} \sin \lambda = \frac{\sqrt{2} m_1}{\sqrt{2G - A}},$$

e si verifica che $(\Gamma, \gamma^{(i)}, x, y, J^{(i)}, j^{(i)})$, $i = 1, 2$, forniscono un atlante analitico di $\overline{\mathfrak{M}}_c = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_c$ per ogni $c > 0$. Il procedimento, un po' laborioso ma non difficile, ricalca quello seguito da Poincaré per eliminare una analoga singolarità in corrispondenza alle orbite circolari nel problema di Keplero.

Una volta rimossa la singolarità, si sviluppa lo studio perturbativo secondo lo schema consueto, solo con qualche variante (non del tutto banale) legata alla presenza di variabili cartesiane, meno adatte agli sviluppi perturbativi in sistemi non isocroni. In ciascuna carta, a conti fatti, si ha una rappresentativa $K^{(i)}$ dell'Hamiltoniana del sistema, della forma

$$K^{(i)}(\Gamma, \gamma^{(i)}, x, y, J^{(i)}, j^{(i)}) = k(\Gamma, x, y) + \varepsilon V^{(i)}(\Gamma, \gamma^{(i)}, x, y, J^{(i)}, j^{(i)}),$$

con

$$k(\Gamma, x, y) = \frac{1}{A_3} [(1 - \beta) \Gamma^2 + \beta A(x, y)^2 - 2\beta \Gamma A(x, y)],$$

$$\beta = 1 - \frac{A_3}{A_1}, \quad -1 < \beta < 1,$$

ove si intende $A(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Va osservato, ed è importante, che sulla rotazione propria $A(x, y) = 0$ restano ben definite due frequenze non nulle, precisamente

$$\omega_1 = \Gamma/A_3, \quad \omega_2 = -\beta\Gamma/A_3.$$

Come risultato, la proposizione 1 sopra enunciata si traduce nella proposizione seguente, tratta da [BFG1] (tenendo anche conto del miglioramento ottenuto in [Gu]):

PROPOSIZIONE 2. – *Se H è analitica in $\overline{\mathfrak{M}}_c$, e ε è sufficientemente piccolo, allora per ogni dato iniziale in $\overline{\mathfrak{M}}_{c,2}$, e per la scala di tempo (8), il moto resta in $\overline{\mathfrak{M}}_c$, e*

i. G e L restano quasi costanti, precisamente

$$|G(t) - G(0)|, |A(t) - A(0)| < C\sqrt{\varepsilon},$$

ove si è usata la notazione breve $A(t) = A(x(t), y(t))$;

ii. se β è tale che la frequenza della rotazione propria è non risonante con ν , fino a $|\nu| \leq C|\log \varepsilon|$, allora posto

$$\bar{f}_G^{(i)}(J^{(i)}, j^{(i)}) = \int_{S^1} f^{(i)}(G, g^{(i)}, 0, 0, J^{(i)}, j^{(i)}) dg^{(i)},$$

si ha

$$|\bar{f}_G^{(i)}(t)(J^{(i)}(t), j^{(i)}(t)) - \bar{f}_G^{(i)}(0)(J^{(i)}(0), j^{(i)}(0))| < C\sqrt{\varepsilon}.$$

Commenti.

1. Come si vede, i risultati significativi del caso non giroscopico si trasportano al caso giroscopico. Tuttavia, la distinzione tra moti risonanti e non risonanti non dipende qui dal dato iniziale, ma solo da β , cioè dal corpo rigido in questione (è sufficiente considerare le proprietà di risonanza della frequenza della rotazione propria).

2. Per il caso non risonante, il risultato si può considerare come una prima formulazione e dimostrazione del *principio dell'effetto giroscopico* su una scala di tempo lunga, per generiche perturbazioni (analitiche) del sistema di Eulero-Poinsot.

3. La ricerca numerica dei moti caotici nel caso risonante, per valutare la possibile ottimalità qualitativa del risultato, è delicata. Risultati preliminari sembrano tuttavia indicare che i moti sono più regolari del previsto (tranne che per pochissime risonanze basse), e dunque dovrebbe essere possibile migliorare ancora la teoria.

5. – La stabilità dei punti lagrangiani L_4, L_5 .

Come già si è anticipato, prendendo come origine il punto lagrangiano, e facendo una scelta opportuna degli assi, tale da diagonalizzare la parte quadratica H_2 di H , l'hamiltoniana del sistema, per valori di μ al di sotto del limite di Routh μ_R , si scrive come perturbazione di un sistema di tre oscillatori armonici, cioè nella forma (3), con H_2 della forma (4) e $n = 3$. Interessano dati iniziali prossimi all'origine, diciamo con $\|I\| \leq \varepsilon$.

Numerosi studi condotti principalmente in Italia, a partire da [Ga, BG, GG, Gi], hanno tratto spunto dal teorema di Nekhoroshev per cercare risultati di stabilità delle azioni per tempi esponenzialmente lunghi, in generici sistemi di

n oscillatori armonici perturbati, o più specificamente nel caso degli equilibri lagrangiani L_4, L_5 [GDFGS]. Caratteristica comune a questi lavori, adattati al caso di hamiltoniana imperturbata isocrona (ω non dipende dalle azioni ma è un parametro di H), è l'introduzione di una ipotesi forte di non risonanza, del tipo

$$(9) \quad |\nu \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

ove γ e τ sono opportune costanti positive. Questa ipotesi aritmetica, introdotta da Siegel in uno studio perturbativo connesso al successivo teorema KAM, seleziona un insieme peculiare di frequenze, dette comunemente *diofantee*. Se consideriamo una qualunque palla $\Omega \in \mathbb{R}^n$, e denotiamo con $\Omega_{\gamma, \tau}$ il sottoinsieme delle frequenze diofantee, è noto che: (i) per $\tau < n - 1$, $\Omega_{\gamma, \tau}$ è vuoto; (ii) per $\tau = n - 1$, e γ sufficientemente piccolo, $\Omega_{\gamma, \tau}$ è non numerabile ma di misura nulla; (iii) per $\tau > n - 1$, $\Omega_{\gamma, \tau}$ è di misura quasi piena, precisamente il complementare $\overline{\Omega}_{\gamma, \tau} = \Omega \setminus \Omega_{\gamma, \tau}$ ha misura piccola: $\text{mes } \overline{\Omega}_{\gamma, \tau} < C\gamma$. (Si osservi tuttavia che $\overline{\Omega}_{\gamma, \tau}$ è aperto denso.) Per fissare le idee, e anche perché è una scelta conveniente, prenderemo $\tau = n$.

Con metodi puramente analitici e aritmetici, cioè senza bisogno di entrare nella struttura geometrica dello spazio delle fasi, non è difficile dimostrare che se H è analitica e la (9) è soddisfatta, allora esiste $\varepsilon_* > 0$ tale che, se la distanza ε del dato iniziale $I(0)$ dall'origine è inferiore a ε_* , allora tale distanza (ad esempio) al più raddoppia, per

$$|t| < Ce^{(\varepsilon_*/\varepsilon)^a}, \quad a = 1/(n + 1).$$

Sfortunatamente, l'ipotesi (9) non è costruttiva: da una misurazione, non si potrà mai dire se in un certo sistema fisico essa è soddisfatta. Inoltre in un caso come quello degli equilibri lagrangiani, in cui ω dipende da un parametro μ in un intervallo, e al variare di μ descrive una curva in \mathbb{R}^n , l'abbondanza statistica delle frequenze diofantee nella palla Ω non si traduce necessariamente nell'abbondanza statistica delle frequenze diofantee sulla curva.

Un metodo di dimostrazione sostanzialmente diverso, in cui si sostituisce all'ipotesi aritmetica (9) un'ipotesi di convessità di una opportuna parte integrabile dell'hamiltoniana, è stato introdotto di recente in [FGB, Ni, GFB], raccogliendo un suggerimento dello stesso Nekhoroshev [Ne2]. L'idea, ripulita dagli aspetti tecnici, è questa: escludendo solo un numero finito di risonanze $\nu \cdot \omega = 0$, con $|\nu| \leq r$ finito, $r \geq 4$, in un intorno dell'origine con una trasformazione canonica preliminare è sempre possibile portare l'hamiltoniana nella *forma normale di Birkhoff* di ordine r , precisamente (senza timore di confusione non

mutiamo nome né alle variabili né alle funzioni)

$$(10) \quad H(p, q) = \sum_{j=1}^{[n/2]} h_{2j}(I(p, q)) + f_{r+1}(p, q) + \dots,$$

ove $[.]$ denota la parte intera, e l'indice a piede di ogni termine della serie denota il grado in p, q ; in particolare

$$h_2(I) = \omega \cdot I, \quad h_4(I) = \frac{1}{2} AI \cdot I,$$

con A matrice $n \times n$. Su questa hamiltoniana trasformata, se l'ipotesi di quasi-convessità è soddisfatta da $h = h_2 + h_4$, si riesce a lavorare nella linea del teorema di Nekhoroshev, benchè con molte attenzioni dovute alle singolarità per $I_j = 0$. Per comprendere, può essere utile il riscaldamento (canonico)

$$p_j = \sqrt{\varepsilon} p'_j, \quad q_j = \sqrt{\varepsilon} q'_j, \quad H' = \varepsilon^{-1} H,$$

che porta la palla $\|I\| < \varepsilon$ nella palla unitaria, e muta H in

$$H'(p', q') = \sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon^{j-1} h_{2j}(I(p', q')) + \varepsilon^{n/2} f_{r+1}(p', q') + \dots;$$

le funzioni di piccolo parametro sono svolte da $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{n/2}$, ma la quasi-convessità tende a perdersi per ε piccolo, e la situazione nel complesso è delicata.

Come risultato, in [FGB, Ni, GFB] si è ottenuta la stabilità alla Nekhoroshev del punto di equilibrio. Un enunciato possibile, tratto da [FGB] (tenendo anche conto del miglioramento ottenuto in [BFG2]), è il seguente:

PROPOSIZIONE 3. – *Sia data H della forma (10), con $r \geq 4$, convergente in un intorno dell'origine. Sia $h = h_2 + h_4$ quasi convessa. Esistono ε_* , a , b tali che se*

$$\varepsilon = \|I(0)\| < \varepsilon_*,$$

allora risulta

$$(11) \quad \|I(t)\| < C(\varepsilon_*/\varepsilon)^a \quad \text{per } |t| < C\varepsilon^{(\varepsilon_*/\varepsilon)^b}.$$

Possibili valori di a, b sono $a = b = 1/n$, o anche $a = 1/2, b = 1/(2n)$.

$I(t)$ è qui un'abbreviazione per $I(p(t), q(t))$. Si osservi che i tempi di stabilità dipendono in questo caso dal dato iniziale, e crescono esponenzialmente con il diminuire della distanza dal punto di equilibrio. L'ipotesi di quasi-convessità, a differenza della (9), è costruttiva. Non è richiesto che le componenti di ω siano positive.

Questa proposizione, o le proposizioni simili dimostrate poi in [Ni] e [GFB]

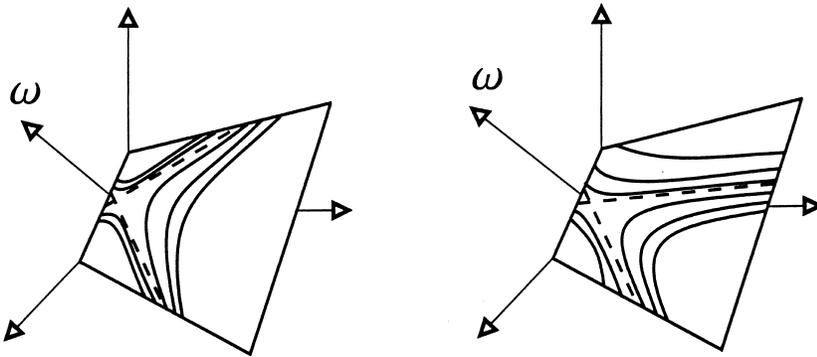


Figura 7. – Ad illustrazione della nozione di quasi convessità direzionale.

con tecniche un po' diverse, potrebbero sembrare pronte all'uso per lo studio della stabilità degli equilibri lagrangiani L_4, L_5 . In realtà non vi si applicano direttamente perchè, come mostra il calcolo esplicito di h_2 e h_4 in questo specifico problema (il calcolo, pur in linea di principio fattibile a mano, è stato effettuato con *Mathematica*), per *nessun* valore di μ nell'intervallo $(0, \mu_R)$ l'ipotesi di quasi convessità è soddisfatta. Le curve di livello di $h = h_2 + h_4$, nel piano ortogonale a ω , hanno in ogni caso la struttura iperbolica illustrata in figura 7 [BFG2]. Le due parti della figura, tuttavia, differiscono per un fatto essenziale: nella parte destra uno almeno degli asintoti delle iperboli punta nel primo ottante di \mathbb{R}^3 , ed effettivamente rappresenta una possibile «via di fuga» del sistema della quale ci si deve preoccupare. Nella parte sinistra invece entrambi gli asintoti puntano alle pareti dell'ottante. Ma *le pareti non possono essere oltrepassate, perché per qualunque valore di (p, q) , le $I_j(p, q)$ sono necessariamente non negative*. È allora spontaneo cercare di sostituire l'ipotesi di quasi-convessità della proposizione 3 con l'ipotesi più debole, battezzata in [BFG2] «quasi-convessità direzionale» (QCD), che nessuno degli asintoti, se presenti, punti nel primo ottante di \mathbb{R}^n .

Effettivamente, *l'ipotesi di QCD si dimostra sufficiente a dimostrare la stabilità alla Nekhoroshev degli equilibri ellittici*. Più precisamente, la dimostrazione della proposizione 3 prodotta in [FGB] sopporta questo indebolimento dell'ipotesi (a differenza di quelle in [Ni] e [GFB], a testimonianza della delicatezza del problema), senza indebolimento della tesi.

La verifica dell'ipotesi di QCD per la particolare hamiltoniana degli equilibri lagrangiani L_4 e L_5 mostra tuttavia che la situazione è complicata. Facciamo riferimento alla figura 8, che rappresenta l'asse μ tra 0 e μ_R ; nella parte in grassetto, cioè ad esclusione del piccolo intervallo tratteggiato $[\mu_1, \mu_2]$, si trova che la QCD è soddisfatta, e corrispondentemente la stabilità alla Nekhoroshev

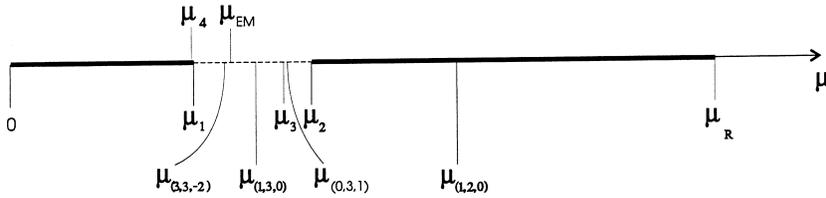


Figura 8. – L'asse μ tra 0 e μ_R . Sulla parte in grassetto l'ipotesi di quasi-convessità direzionale è soddisfatta.

shev è assicurata, con l'eccezione di un solo valore di μ , denotato in figura $\mu_{(1,2,0)}$, ove ω risuona con $\nu = (1, 2, 0)$; per tale valore non è nemmeno possibile introdurre la forma normale (10). Nell'intervallo $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ invece la QCD non è soddisfatta. Va detto che l'intervallo è particolarmente interessante in Meccanica Celeste, perché vi cade il valore di μ del sistema Terra-Luna, denotato μ_{EM} in figura.

In assenza di quasi-convessità, è naturale prendere in considerazione ipotesi di *steepness* più deboli, come la non-degenerazione del 3-jet della parte normale $h_2 + h_4 + h_6$ dell'hamiltoniana (10), a somiglianza di quanto fatto, in un diverso problema di Meccanica Celeste, in [GM]. Tale studio ha successo: precisamente si trova che l'altra dimostrazione, quella prodotta in [GFB], sopporta tale l'indebolimento dell'ipotesi. Un enunciato possibile è il seguente:

PROPOSIZIONE 4. – *Sia data H della forma (10), con $n = 3$ e $r \geq 8$. Se: (i) la parte integrabile $h = h_2 + h_4 + h_6$ soddisfa l'ipotesi (5), e inoltre (ii) la matrice A ristretta al piano ortogonale a ω è non singolare: $AI \neq 0$ per $\omega \cdot I = 0$, allora valgono le stime (11), con $a = 1$ e $b = \min \left(\frac{r-7}{20}, \frac{r+1}{36} \right)$.*

Si osservi il peggioramento dell'esponente b , e con esso della scala di tempo di stabilità (l'esponente a invece migliora rispetto alla proposizione 3).

Per verificare se la proposizione si può applicare alla particolare hamiltoniana degli equilibri lagrangiani L_4 e L_5 , bisogna costruire la forma normale di Birkhoff fino all'ordine 8, manipolando polinomi, e poi vedere se sono soddisfatte le ipotesi (i) e (ii). Complessivamente l'operazione è *molto* complicata, e l'uso di metodi numerici è indispensabile. Metodi affidabili (ancora *Mathematica*) mostrano tuttavia che la forma normale si può effettivamente costruire nell'intervallo $[\mu_1, \mu_2]$, salvo che in tre punti, denotati $\mu_{(1,3,0)}$, $\mu_{(0,3,1)}$ e $\mu_{(3,3,-2)}$ in figura 8, ove la presenza di risonanze con $|\nu| \leq 8$ non consente di effettuare la costruzione. Quanto alle ipotesi (i) e (ii), esse risultano soddisfatte nell'intervallo, ad eccezione di un quarto punto μ_3 , ove il 3-jet di h è degenere. Con queste sole eccezioni, che si aggiungono al valore $\mu_{(1,2,0)}$ precedentemen-

te trovato, la stabilità alla Nekhoroshev degli equilibri lagrangiani L_4 e L_5 , nel problema a tre corpi ristretto circolare spaziale, risulta dimostrata.

5. – Conclusioni.

Come si è visto, tra la formulazione astratta del teorema di Nekhoroshev, in ipotesi per così dire «matematicamente spontanee», e la sua applicazione a modelli fisici concreti, c'è un salto non indifferente. La teoria di Nekhoroshev in questo non costituisce un'eccezione, anzi si può dire che la situazione illustrata è tipica almeno di molti settori della Fisica Matematica, nei quali ricerca pura e applicata si compenetrano.

I risultati qui esposti — altri se ne potrebbero aggiungere — mostrano che la teoria di Nekhoroshev, opportunamente sviluppata, può essere uno strumento di valido aiuto per la comprensione di diversi modelli rilevanti in Meccanica Celeste. Il lavoro da svolgere, tuttavia, è ancora molto. Non solo perché, come è ovvio, i risultati vanno ancora migliorati e estesi possibilmente a modelli più realistici (ad esempio, per gli equilibri lagrangiani, sarebbe importante studiare il caso ellittico). Ma soprattutto perché deve essere vagliata con attenzione, e con atteggiamento critico, l'effettiva significatività dei risultati ottenuti, e corrispondentemente dei metodi di studio impiegati.

Consideriamo, per fissare le idee, il problema appena discusso della stabilità di L_4 e L_5 . La linea di ricerca esposta in questa nota dà molto risalto alle proprietà geometriche dell'hamiltoniana, a differenza di altri studi che invece, come si è già accennato, preferiscono far leva su proprietà di tipo aritmetico e algebrico. È importante capire se le proprietà geometriche dell'hamiltoniana siano effettivamente rilevanti per la determinazione dei tempi di stabilità attorno ai punti di equilibrio, e non invece un mero strumento tecnico di dimostrazione. Una via naturale per comprendere è quella di osservare se le proprietà di stabilità mutino o no significativamente al mutare delle proprietà geometriche, e dunque al variare del parametro μ in $(0, \mu_R)$, nei modi previsti dalla teoria: in particolare peggiorino prendendo μ dentro l'intervallo $[\mu_1, \mu_2]$ in cui l'ipotesi di QCD cessa di essere soddisfatta, e peggiorino, o addirittura la stabilità si perda, in corrispondenza a quei valori eccezionali di μ ai quali le proposizioni sopra enunciate non si applicano. L'osservazione che, ad esempio, il valore μ_{EM} del sistema Terra-Luna cade proprio nella zona in cui le proprietà di stabilità sono peggiori, e corrispondentemente non si osserva materiale attorno a L_4 e L_5 , stuzzica l'interesse, ma non si può considerare realmente significativa, perchè il modello adottato è ancora troppo semplice: ad esempio non si tiene conto dell'eccentricità dell'orbita della Luna, nè della non piccola perturbazione del Sole. Risposte interessanti possono tuttavia venire non da esperimenti veri, ma da simulazioni numeriche degli stessi modelli semplificati

sui quali la teoria è stata sviluppata. È uno studio che si annuncia pesante, e richiede un investimento non da poco di risorse sia umane che di calcolo, ma che si ritiene opportuno iniziare, procedendo se possibile in contatto con gruppi di Meccanica Celeste, come completamento opportuno, e in un certo senso a coronamento, del lavoro svolto fino ad ora.

Verifiche numeriche condotte con il medesimo spirito per il corpo rigido di Eulero-Poinsot perturbato, come già si è detto, sono in corso. I risultati fino ad ora ottenuti per i moti non giroscopici combaciano ragionevolmente bene con la fenomenologia descritta dalla proposizione 1, e in particolare i moti caotici di μ su S^2 si trovano laddove sono ammessi teoricamente. Da questo punto di vista la proposizione 1 potrebbe essere qualitativamente ottimale. Più delicata è la situazione per quanto riguarda i moti giroscopici, che appaiono invece regolari, per ε piccolo, anche dove la proposizione 2 non lo pretende. Si tratta di una indicazione forte che la teoria, per tali moti, dovrebbe essere migliorabile, e si cercherà di fare uno sforzo in questa direzione.

BIBLIOGRAFIA

- [A] H. ANDOYER, *Cours de Méchanique Celeste* (Gautier-Villars, Paris 1923).
- [BCG] G. BENETTIN - A. CARATI - G. GALLAVOTTI, *A rigorous implementation of the Landau-Teller approximation for adiabatic invariants*, *Nonlinearity*, **10** (1997), 479-505.
- [BCF] G. BENETTIN - A. M. CHERUBINI - F. FASSÒ, *Regular and chaotic behaviour of rigid bodies in fast rotation: a numerical study*, In corso di stesura.
- [BF1] G. BENETTIN - F. FASSÒ, *Fast rotations of the symmetric rigid body: a general study by Hamiltonian perturbation theory, Part I*, *Nonlinearity*, **9** (1996), 137-186.
- [BF2] G. BENETTIN - F. FASSÒ, *Classical «freezing» of plane rotations: a proof of the Boltzmann-Jeans Conjecture*, *Journ. Stat. Phys.*, **63** (1991), 737.
- [BG] G. BENETTIN - G. GALLAVOTTI, *Stability of Motions near Resonances in Quasi Integrable Hamiltonian Systems*, *Journ. Stat. Phys.*, **44** (1986), 293.
- [BFG1] G. BENETTIN - F. FASSÒ - M. GUZZO, *Fast rotations of the symmetric rigid body, a study by Hamiltonian perturbation theory. Part II, Gyroscopic rotations*, *Nonlinearity*, **10** (1997), 1695-1717.
- [BFG2] G. BENETTIN - F. FASSÒ - M. GUZZO, *Nekhoroshev-stability of L_4 and L_5 in the spatial restricted three-body problem*, *Regular and Chaotic Dynamics*, **3** (1998), 56-72.
- [BFGG] G. BENETTIN - G. FERRARI - L. GALGANI - A. GIORGILLI, *An Extension of the Poincaré-Fermi Theorem on the Non-Existence of Invariant Manifolds in Nearly-Integrable Hamiltonian Systems*, *Nuovo Cimento B*, **72** (1982), 137-148.

- [BGG1] G. BENETTIN - L. GALGANI - A. GIORGILLI, *A Proof of Nekhoroshev Theorem for Nearly-Integrable Hamiltonian Systems*, *Celestial Mechanics*, **37** (1985), 1-25.
- [BGG2] G. BENETTIN - L. GALGANI - A. GIORGILLI, *Realization of Holonomic Constraints and Freezing of High Frequency Degrees of Freedom, in the Light of Classical Perturbation Theory. Part I*, *Comm. Math. Phys.*, **113** (1987), 87-103.
- [BGG3] G. BENETTIN - L. GALGANI - A. GIORGILLI, *Realization of Holonomic Constraints and Freezing of High-Frequency Degrees of Freedom in the Light of Classical Perturbation Theory. Part II*, *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), 557-601.
- [D] A. DEPRIT, *Free rotation of a rigid body studied in phase plane*, *Am. J. Phys.*, **55** (1967), 424.
- [F] F. FASSÒ, *The Euler-Poinsot top, a non-commutatively integrable system without global action-angle coordinates*, *J. Appl. Math. Phys.*, **47** (1996), 953-976.
- [FGB] F. FASSÒ - M. GUZZO - G. BENETTIN, *Nekhoroshev-stability of elliptic equilibria of Hamiltonian systems*, *Comm. Math. Phys.*, **197** (1998), 347-360.
- [FL] F. FASSÒ - DEBRA LEWIS, *Stability properties of the Riemann ellipsoids*, preprint 2000.
- [Ga] G. GALLAVOTTI, *Quasi-Integrable Mechanical Systems*, in *Critical phenomena, Random Systems, Gauge Theories*, edito da K. Osterwalder and R. Stora, *Les Houches*, Session XLIII, 1984 (North-Holland, Amsterdam 1986).
- [GDFGS] A. GIORGILLI - A. DELSHAMS - E. FONTICH - L. GALGANI - C. SIMÓ, *Effective Stability for a Hamiltonian System near an Elliptic Equilibrium Point, with an Application to the Restricted three Body Problem*, *J. Diff. Eq.*, **77** (1989), 167-198.
- [GFB] M. GUZZO - F. FASSÒ - G. BENETTIN, *On the stability of elliptic equilibria*, *Math. Phys. Electronic Journal*, Vol. 4, No. 1 (1998).
- [GG] *Rigorous estimates for the series expansions of Hamiltonian perturbation theory*, *Celestial Mech.*, **37** (1985), 95-112.
- [Gi] A. GIORGILLI, *Rigorous results on the power expansions for the integrals of a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point*, *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique Théorique*, **48** (1988), 423-439.
- [GM] M. GUZZO - A. MORBIDELLI, *Construction of a Nekhoroshev like result for the asteroid belt dynamical system*, *Cel. Mech. & Dyn. Astr.*, **66** (1997), 255-292.
- [Gu] M. GUZZO, *Nekhoroshev stability of quasi-integrable degenerate Hamiltonian Systems*, *Regular and Chaotic Dynamics*, **4** (1999), 78-102.
- [GM] M. GUZZO - A. MORBIDELLI, *Construction of a Nekhoroshev like result for the asteroid belt dynamical system*, *Cel. Mech. & Dyn. Astr.*, **66** (1997), 255-292.
- [Lo] P. LOCHAK, *Canonical perturbation theory via simultaneous approximation*, *Russ. Math. Surv.*, **47** (1992), 57-133.
- [LN] P. LOCHAK - A. I. NEISHTADT, *Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian*, *Chaos*, **2** (1992), 495-499.
- [MG] A. MORBIDELLI - M. GUZZO, *The Nekhoroshev theorem and the Asteroid Belt dynamical system*, *Cel. Mech. & Dyn. Astr.*, **65** (1997), 107-136.

- [Ne1] N. N. NEKHOROSHEV, *Behaviour of Hamiltonian systems close to integrability*, *Funct. Anal. Appl.*, **5** (1971), 338-339. (*Funk. An. Ego Prilozheniya*, **5** (1971), 82-83).
- [Ne2] N. N. NEKHOROSHEV, *An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems*, *Usp. Mat. Nauk*, **32:6** (1977), 5-66 (*Russ. Math. Surv.*, **32:6** (1977), 1-65).
- [Ni] L. NIEDERMAN, *Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in an Hamiltonian system*, *Nonlinearity*, **11** (1998), 1465-1479.
- [Po] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vol. 1 (Gautier-Villars, Paris, 1892).
- [Pö] J. PÖSCHEL, *Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian Systems*, *Math. Z.*, **213** (1993), 187-216.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
Università di Padova, Via Belzoni 7 - 35131 Padova, Italia
e-mail: benettin@math.unipd.it