Bollettino Unione Matematica Italiana

P. Podio-Guidugli

Le equazioni di evoluzione dei continui ferromagnetici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-B** (2001), n.1, p. 31–44.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_1_31_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
(8) 4-B (2001), 31-44

Le equazioni di evoluzione dei continui ferromagnetici.

P. PODIO-GUIDUGLI (*)

Summary. – *This expository paper is meant to be a faithful account the invited lecture I gave in Naples on September 14, 1999, during the 16th Congress of U.M.I., the Italian Mathematical Union. In Section 2, I consider the* Gilbert equation, *the parabolic equation that rules the evolution of the magnetization vector in a rigid ferromagnet. Among the issues I here discuss are the relations of the Gilbert equation to the harmonic map equation and its heat flow, the existence of global-in-time weak solutions, and some conjectures on the possible evolutions of singular solutions. Section 3 consists of an abridged presentation of* dynamical micromagnetics, *a general mathematical model for the dynamics of ferromagnetic bodies undergoing arbitrarily large deformations. In particular, I show how a generalized Gilbert equation can be arrived at, and I briefly discuss equilibria and dissipation mechanisms.*

Questo scritto riproduce fedelmente il testo della conferenza che ho tenuto nel corso del XVI Congresso dell'Unione Matematica Italiana. L'occasione mi consente di ringraziare ancora una volta per l'invito Alberto Conte, Presidente dell'U.M.I., nonchè Carlo Sbordone, Presidente della Commissione Scientifica del Congresso, e Salvatore Rionero, Presidente del Comitato Organizzatore.

1. – Introduzione.

Il mio scopo è discutere il modello matematico per l'evoluzione spazio-temporale di corpi continui fatti di materiale ferromagnetico.

Quando si vuol presentare un modello matematico che mira a catturare una certa classe di fenomeni fisici, le regole del mestiere sono:

– ricapitolare i fatti fisici salienti;

– collocare il modello in un'architettura teorica generale;

– sottolineare peculiarità e difficoltà di costruzione.

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 14 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

Proprio perchè lì risiedono gli stimoli primi della sua curiosità, chi fà il mio mestiere si propone sia di sottolineare le somiglianze con quel che è noto — in modo, appunto, da collocare il modello nel contesto che gli compete — sia di sottolineare le differenze, per trattare le quali è stato magari necessario risolvere problemi nuovi e difficili di modellistica.

Questo modo di procedere va benissimo quando l'uditorio è composto esclusivamente da «addetti ai lavori», con cultura di base e interessi sostanzialmente simili a quelli di chi parla. Ma quando l'uditorio è misto, questo modo di procedere va malissimo: all'analista, al geometra, all'algebrista seduto di fronte a voi, le finezze fisico-matematiche interessano di regola piuttosto poco. Non si può biasimare queste persone, naturalmente: se quelle finezze fossero loro interessate molto, avrebbero fatto un altro mestiere, il vostro. Quello che vogliono — quello che si spingono a chiedervi, se la fate troppo lunga — è «vedere le equazioni»: subito, e non alla fine di un brillante processo deduttivo, come voi vi eravate riproposti di fare.

Io non sono certo un analista, né sono stato invitato qui per fingere di esserlo. Questa deve essere e sarà una conferenza di fisica dei continui, ma voglio cominciarla spiegando perchè vi dovreste trovare ragioni di interesse, se siete interessati alle equazioni alle derivate parziali. Voglio insomma far vedere subito le equazioni, anzi, una versione ridotta all'osso di quelle. Non avrò il tempo per dispiegare tutta la ricchezza e complessità delle equazioni generali. Ma spero che il poco che riuscirò a dire riesca lo stesso a darvi un'idea della difficoltà e dell'interesse dei problemi coinvolti.

Il piano della mia esposizione è il seguente.

Nella prossima sezione introdurrò una versione semplificata della classica *equazione di Gilbert* [16] per l'evoluzione della magnetizzazione; l'enfasi sarà sulle somiglianze con l'*equazione delle mappe armoniche*, alla quale quell'equazione si riduce in statica, e sull'*evoluzione di soluzioni statiche singolari* scelte come condizioni iniziali. Prima esporrò brevemente i risultati noti di esistenza e non unicità per l'equazione di evoluzione delle mappe armoniche (Sottosezione 2.1). Quindi riferirò di un teorema di esistenza di soluzioni deboli, globali nel tempo, per l'equazione di Gilbert (Sottosezione 2.2); questo teorema, che ho ottenuto di recente in collaborazione con M. Bertsch e V. Valente [4], non è tanto interessante in sé quanto per la tecnica di prova, che suggerisce implicitamente di studiare certe varianti, più o meno fisicamente motivate [21], dell'equazione di Gilbert (1). Infine (Sottosezione 2.3) descriverò alcune congetture, formulate in [4], relative all'equazione di evoluzione dei ferromagneti.

È abituale ritenere quella di Gilbert un'equazione «fenomenologica» e for-

(1) Risultati di esistenza per l'equivalente *equazione di Landau-Lifshitz* erano già stati ottenuti, con tecniche diverse, da Visintin [24] nel 1985 e da Alouges e Soyeur [1] nel 1992.

nirne di conseguenza deduzioni per analogia che impiegano ragionamenti *ad hoc* non dissimili da quelli svolti da Landau e Lifshitz nel famoso lavoro [19] con il quale, nel 1935, ne dedussero una versione equivalente. Ora, non c'è niente di male nel procedere in modo euristico — specie se con la guida di un intuito fisico pari a quello di Landau e Lifshitz — ma una deduzione coerente con i principi primi è senz'altro preferibile, sia per evitare malcomprensioni che il procedere per analogia potrebbe render plausibili sia per proporre varianti significative ad un modello di successo [21].

Per queste ragioni, nella Sezione 3 presenterò brevemente un modello continuo di comportamento per i ferromagneti deformabili, la *micromagnetica evolutiva*. Si vedrà che l'equazione di Gilbert non è che la versione appropriata per i ferromagneti rigidi (o mantenuti privi di deformazioni pur mentre la magnetizzazione evolve [4]) di una delle equazioni generali di bilancio della micromagnetica. Disponendo di quelle equazioni e, insieme, di una teoria costitutiva termodinamicamente compatibile di pari generalità [13, 4, 21], si possono formulare problemi — anzi, classi di problemi, con dati iniziali ed al bordo — la cui difficoltà matematica cresce di regola con la capacità di descrizione del comportamento fisico. Accennerò ad alcuni di quei problemi per finire.

2. – L'Equazione di Gilbert.

Sia Ω una regione compatta di $\mathbb{R}^n$, $n \leqslant 3$, con un'onesta frontiera $\partial\Omega$, sia $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, e sia $\mathcal{V}^n$ uno spazio vettoriale $n-$dimensionale. Infine, sia

$$\boldsymbol{m} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{V}^n \tag{2.1}$$

un campo vettoriale che soddisfi identicamente nel cilindro spaziotemporale $\Omega \times \mathbb{R}^+$ la *condizione di saturazione*

$$|\boldsymbol{m}(x, t)| = 1 . \tag{2.2}$$

Per un campo vettoriale siffatto, consideriamo l'*equazione delle mappe armoniche*

$$\boldsymbol{0} = \Delta\boldsymbol{m} + |\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m} , \tag{2.3}$$

il suo «heat flow»

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \Delta\boldsymbol{m} + |\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m} , \tag{2.4}$$

e l'equazione «senza nome»

$$-\boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}} + \dot{\boldsymbol{m}} = \Delta\boldsymbol{m} + |\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m} ; \tag{2.5}$$

di quest'ultima, registriamo anche la versione equivalente

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m} \times \Delta \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}}\,, \tag{2.6}$$

l'*equazione di Gilbert*.

La giustapposizione di queste equazioni non è naturalmente casuale: la (2.4) e la (2.5), la cui natura parabolica dipende dal termine dissipativo $\dot{\boldsymbol{m}}$, differiscono solo per il termine non dissipativo $-\boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}}$; entrambe si riducono in statica all'equazione ellittica semilineare (2.3). Tanto la (2.3) che la (2.6) si incontrano nelle applicazioni: la prima, corredata di condizioni al bordo tipo Dirichlet, nella statica dei *cristalli liquidi nematici*, con il *direttore* $\boldsymbol{m}$ che dà conto dell'orientamento locale delle macromolecole allungate che costituiscono quei materiali; la seconda, corredata di condizioni al bordo tipo Neumann e di condizioni iniziali rispettose di (2.2), nella dinamica dei *solidi ferromagnetici isotropi*, con $\boldsymbol{m}$ la *magnetizzazione* ([2]). Entrambe le equazioni (2.3) e (2.6) sono dal punto di vista applicativo «equazioni giocattolo», in quanto riflettono un'informazione fisica estremamente semplificata. All'equazione (2.4) che fà matematicamente da ponte tra le due, l'equazione di *evoluzione delle mappe armoniche*, non compete una qualche interpretazione fisica significativa ([3]). E tuttavia queste tre equazioni racchiudono una fenomenologia matematica estremamente interessante.

2.1. *L'equazione delle mappe armoniche: evoluzione di soluzioni singolari.*

All'equazione delle mappe armoniche si perviene quando si vuole minimizzare sulla sfera unitaria l'integrale di Dirichlet

$$\int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{m}|^2 . \tag{2.7}$$

Brezis, Coron e Lieb [6], in un bel lavoro apparso nel 1986, hanno attirato l'at-

([2]) Preferisco chiamare isotropi quei ferromagneti che, avendo *energia di anisotropia* trascurabile, sono per questo detti *soft* nella letteratura in lingua inglese.

([3]) Per i cristalli liquidi, l'equazione dinamica dovrebbe in generale contenere un termine inerziale «iperbolicizzante», proporzionale all'accelerazione $\ddot{\boldsymbol{m}}$; per i ferromagneti, il termine inerziale «parabolicizzante» $-\boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}}$ non può essere ignorato perchè, comunque piccolo, il termine in questione induce una «rottura di simmetria» che complica notevolmente la ricerca di soluzioni: in sua assenza, $\boldsymbol{m}$, $\dot{\boldsymbol{m}}$ e $\Delta \boldsymbol{m}$ sono coplanari; in presenza, il moto di $\boldsymbol{m}$ è una *precessione* smorzata attorno a $\Delta \boldsymbol{m}$. La rappresentazione delle azioni d'inerzia nei ferromagneti è discussa in [12, 13] sulla base di argomentazioni generali sviluppate in [20].

tenzione sulle soluzioni singolari del tipo

$$\boldsymbol{m}(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}\,; \tag{2.8}$$

queste soluzioni, che per $n = 3$ hanno energia finita, sono interpretabili come i «difetti» ottici puntiformi osservati nei cristalli liquidi. Coron [11] ha mostrato che una condizione iniziale singolare di questo genere può dar luogo, in aggiunta all'ovvio processo statico, ad un processo dinamico che risolve l'equazione di evoluzione delle mappe armoniche. Dunque, ci si può attendere che, per equazioni paraboliche di questo tipo, l'*esistenza di singolarità puntuali in statica implichi non unicità in dinamica* (4).

Per meglio discutere questo tema, formuliamo (omettendo alcuni dettagli) il

Problema di evoluzione delle mappe armoniche. Dati la regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e il campo vettoriale

$$\boldsymbol{m}_0 \in H^1(\Omega;\, \mathbb{R}^n)\,, \qquad |\boldsymbol{m}_0| = 1 \ \text{ q.o. in } \ \Omega\,, \quad \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}_0|^2 < +\infty\,, \tag{2.9}$$

trovare un campo $\boldsymbol{m}$ su $\Omega \times \mathbb{R}^+$ che soddisfi, oltre alla condizione di saturazione (2.2) e alla condizione iniziale

$$\boldsymbol{m}(x,\,0) = \boldsymbol{m}_0(x) \qquad \text{in } \ \Omega\,, \tag{2.10}$$

l'equazione di evoluzione (2.4) e la condizione al bordo

$$\boldsymbol{m}(x,\,t) = \boldsymbol{m}_0(x) \qquad \text{in } \ \partial\Omega \times \mathbb{R}^+\,. \tag{2.11}$$

Sempre allo scopo di rendere evidenti somiglianze e differenze, conviene formulare subito anche il

Problema di evoluzione dei ferromagneti isotropi. Dati Ω e $\boldsymbol{m}_0$ come sopra, trovare un campo $\boldsymbol{m}$ su $\Omega \times \mathbb{R}^+$ che soddisfi, oltre alla condizione di saturazione (2.2) e alla condizione iniziale (2.10), l'equazione di evoluzione (2.6) e la condizione al bordo

$$\partial_n \boldsymbol{m}(x,\,t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{in } \ \partial\Omega \times \mathbb{R}^+\,. \tag{2.12}$$

Per il secondo problema ai pochi risultati noti si accostano varie congetture, suggerite dai risultati conosciuti per il primo problema, che riassumiamo qui di seguito.

L'*unicità di soluzioni classiche*, fin tanto che ne esistono, è stata provata da Struwe [23]. Si deve a Chang, Ding e Ye [9] un esempio esplicito di *blow-up in*

(4) Le singolarità delle mappe armoniche sono l'argomento di un recente articolo di rassegna di Hardt [17]; si veda anche [18].

tempo finito di un dato iniziale di classe C^∞ assegnato con simmetria cilindrica su un cilindro circolare retto di $\mathbb{R}^3$: all'istante $t_0 > 0$, si forma una *singolarità di linea* in corrispondenza dell'asse del cilindro ([5]). L'*esistenza di soluzioni deboli globali nel tempo* è stata dimostrata da Chen e Struwe [10]; Bethuel, Coron, Ghidaglia e Soyeur [5] hanno considerato il caso interessante in cui l'energia delle soluzioni delle quali si dimostra l'esistenza è equilimitata nel tempo dall'energia del dato iniziale:

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}(x,\, t)|^2 \leqslant \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}_0(x)|^2 , \qquad t \geqslant 0 \; ; \tag{2.13}$$

Freire [15] ha proposto un criterio di selezione tra le soluzioni basato sulla monotonia, provando che, per $n = 2$, esiste un'unica soluzione per la quale la mappa dell'energia

$$t \mapsto \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}(x,\, t)|^2 \tag{2.14}$$

è non crescente per ogni $t \geqslant 0$; infine, Bertsch, Dal Passo e Van der Hout [3], per un disco di $\mathbb{R}^2$, hanno fornito un esempio di dato iniziale regolare dal quale può evolvere anche una soluzione che verifica (2.13) ed è singolare nell'origine del disco per ogni $t > 0$.

2.2. *L'equazione di Gilbert: esistenza di soluzioni.*

L'equazione (2.5) — ricordiamolo — è equivalente all'equazione di Gilbert (2.6), si riduce in statica all'equazione delle mappe armoniche e differisce dall'«heat flow» di quest'ultima equazione per un termine che non è dissipativo e fà del moto della magnetizzazione una precessione. Come vedremo nella prossima sezione, è l'equazione di Gilbert ad avere il significato fisico-matematico diretto di legge di bilancio. Tuttavia, l'equazione (2.5) si presta ad una manipolazione che, da un lato, apre la strada alla dimostrazione del citato teorema di esistenza di [4] e, dall'altro, dirige l'attenzione sul ruolo dei meccanismi fisici di dissipazione nel decidere la fenomenologia matematica [21].

La manipolazione cui mi riferisco consiste nella scrittura di una versione penalizzata e regolarizzata della (2.5):

$$-\tau \Delta \dot{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}} + \dot{\boldsymbol{m}} = \Delta \boldsymbol{m} + \varepsilon^{-1}(|\boldsymbol{m}|^2 - 1)\, \boldsymbol{m} \, . \tag{2.15}$$

Il termine di *penalizzazione* $\varepsilon^{-1}(|\boldsymbol{m}|^2 - 1)\boldsymbol{m}$, nel limite $\varepsilon \to 0$, riconduce le soluzioni $\boldsymbol{m}^{\varepsilon,\,\tau}$ di (2.15) sulla sfera unitaria, dove la condizione di saturazione (2.2) pretende che stiano; il termine di *regolarizzazione* $-\tau \Delta \dot{\boldsymbol{m}}$ consente di trattare

([5]) Per la precisione, l'esempio di Chang, Ding e Ye concerne una singolarità puntuale che si forma in tempo finito al centro di un disco di $\mathbb{R}^2$.

(2.15), corredata da un'opportuna condizione iniziale che si riduce a (2.10) nel limite $\varepsilon \to 0$, come un problema di Cauchy per un'equazione ordinaria in un appropriato spazio di funzioni.

La prima e più importante parte della dimostrazione di esistenza di soluzioni deboli globali del problema di evoluzione dei ferromagneti isotropi è la prova che esiste ad ogni istante una soluzione forte di un'equazione ordinaria ad essa associata. Questa prova procede come segue. Per ogni arbitraria coppia di valori positivi di ε e τ, si introducono l'applicazione

$$\boldsymbol{f}_\varepsilon(\mathbf{v}) = \Delta\mathbf{v} + \varepsilon^{-1}(|\boldsymbol{m}|^2 - 1)\,\mathbf{v}\,, \tag{2.16}$$

definita sulla collezione dei campi vettoriali di classe $C^{2,\lambda}$, e l'operatore ellittico lineare

$$\boldsymbol{G}_\tau(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = -\tau\Delta\mathbf{u} - \mathbf{v}\times\mathbf{u} + \mathbf{u} \tag{2.17}$$

che, per ogni fissato $\mathbf{v}$ di classe C^λ, trasforma i campi vettoriali $\mathbf{u}$ di classe $C^{2,\lambda}$ che verificano la condizione al bordo (2.12) in campi di classe C^λ. Stabilito che questo operatore ha inverso Lipschitz-continuo $(\boldsymbol{G}_\tau(\mathbf{v}))^{-1}$, si considera l'applicazione

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon,\tau}(\mathbf{v}) = (\boldsymbol{G}_\tau(\mathbf{v}))^{-1}[\boldsymbol{f}_\varepsilon(\mathbf{v})]\,, \tag{2.18}$$

se ne prova la regolarità locale, e se ne deduce l'esistenza locale di soluzioni per il *problema di Cauchy* relativo all'equazione ordinaria

$$\dot{\boldsymbol{m}}^{\varepsilon,\tau} = \boldsymbol{F}_{\varepsilon,\tau}(\boldsymbol{m}^{\varepsilon,\tau})\,. \tag{2.19}$$

Infine, si prova l'esistenza di un'unica soluzione di questa equazione per ogni t.

La seconda e ultima parte del teorema di esistenza consiste nel mostrare che, per ogni $T > 0$, $\boldsymbol{m}^{\varepsilon,\tau}$ converge debolmente, per $\varepsilon, \tau \to 0$, ad un campo di classe $H^1(\Omega, [0, T])$ che risolve una versione debole dell'equazione (2.5) e soddisfa tutte le condizioni accessorie, di saturazione, iniziale ed al bordo.

2.3. *L'equazione di Gilbert: congetture sull'evoluzione di soluzioni singolari* [4].

Alouges e Soyeur [1] hanno dimostrato per l'*equazione di Landau-Lifshitz*

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m}\times\Delta\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{m}\times\Delta\boldsymbol{m})\,, \tag{2.20}$$

corredata della condizione al bordo (2.12), un risultato di non unicità simile a quello già citato di Coron [11] per l'equazione di evoluzione delle mappe armoniche con la condizione al bordo (2.11): da una condizione iniziale singolare del tipo di (2.8) può evolvere un processo dinamico non banale. Ora, l'equazione di Landau-Lifschitz, *modulo* un riscalamento temporale, non è che una forma equivalente dell'equazione di Gilbert (2.6). Dunque, anche per i ferromagneti isotropi, l'esistenza di singolarità puntuali in statica implica non unicità in dinamica.

È pensabile che si verifichino nei ferromagneti fenomeni di *blow-up*, con concentrazione di quantitativi finiti di energia su insiemi di misura nulla? Se ciò dovesse accadere all'istante t_0, come potrebbe comportarsi la soluzione *dopo*?

Questo soltanto oggi possiamo dire in merito alla prima domanda, che il modello di Gilbert né prelude esplicitamente al *blow-up* né lo preclude; e che non ci sono, a nostra nozione, evidenze sperimentali di alcun tipo. Quanto alla seconda, vediamo due possibilità. La prima, che l'energia concentratasi su un insieme di misura nulla ivi rimanga indefinitamente, mentre l'energia residua decresce (non cresce) nel tempo; la seconda, che l'energia concentrata venga rilasciata ad un istante t_1 successivo a t_0, con l'energia totale che di nuovo decresce (non cresce) dopo t_1.

Nel secondo caso, di nuovo sono possibili molte soluzioni al problema evolutivo. Possiamo trovare un criterio che selezioni quelle (quella) fisicamente significative? Possiamo costruire effettivamente soluzioni nel corso delle quali (una parte del)l'energia viene prima concentrata e poi rilasciata?

Una risposta alla prima tra queste altre domande sembra poter venire da un impiego un po' diverso dai soliti del secondo principio della termodinamica; ma questi sviluppi sono al momento ancora incompleti. Quanto alla seconda domanda, si possono avanzare due congetture: che, per $\varepsilon \to 0$, le soluzioni dell'*equazione penalizzata*

$$-\boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}} + \dot{\boldsymbol{m}} = \Delta \boldsymbol{m} + \varepsilon^{-1}(|\boldsymbol{m}|^2 - 1)\,\boldsymbol{m}\,. \tag{2.21}$$

tendano a soluzioni del problema di Gilbert con energia totale monotona nel tempo; e che, per $\varepsilon \to 0$, le soluzioni dell'*equazione regolarizzata*

$$-\tau(\Delta \dot{\boldsymbol{m}} - (\boldsymbol{m} \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{m}})\,\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}} + \dot{\boldsymbol{m}} = \Delta \boldsymbol{m} + |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m} \tag{2.22}$$

tendano invece a soluzioni del problema di Gilbert con energia totale non monotona. Lo sforzo per verificare o falsificare queste congetture è in corso.

3. – Micromagnetica evolutiva.

La teoria fisico-matematica che ha per oggetto i fenomeni di evoluzione nei corpi ferromagnetici deformabili si chiama in lingua inglese *micromagnetics*, un nome il cui pregio principale è riprodurre il titolo di una monografia [8] di uno dei padri della teoria, W. F. Brown. Per Brown — ma non per Landau e Lifshitz [19], nel lavoro dei quali i semi della teoria sono per la prima volta gettati — la micromagnetica è una teoria di equilibrio di natura variazionale, regolata dalle proprietà di un funzionale di energia che egli discute a fondo in [7]. Gli studi di magnetoelasticità fin qui condotti, tutti in statica, sono basati sull'approssimazione di un funzionale essenzialmente non convesso nell'intorno di un suo putativo minimo locale: non possono quindi insegnarci granchè sul comportamento evolutivo di un ferromagnete elastico suscettibile di deformazioni qualsiasi. Per una rivisitazione recente della micromagnetica evolutiva, che non procede *ab initio* con un formato variazionale e si propone di risultar coerente con i principi e i metodi della meccanica razionale dei mezzi continui, si può vedere [13] e due lavori collegati [12, 14]; quanto segue si basa sugli sviluppi contenuti nella Sezione 2 di [4].

3.1. *Un modello matematico sommario di corpo ferromagnetico deformabile.*

Dal punto di vista della fisica dei continui, lo stato microscopico di un corpo materiale ferromagnetico è descritto da un campo vettoriale $\boldsymbol{m}(y, t)$, la *magnetizzazione*, definito in ciascun punto y della regione occupata all'istante t dal corpo nel suo *moto*. Un moto è una famiglia di deformazioni ad un parametro, il tempo: la *deformazione* $f(\cdot, t)$ determina ad ogni fissato istante $t \in \mathbb{R}^+$ la forma $f(\Omega, t)$ che la regione Ω occupata dal corpo all'istante, poniamo, $t = 0$ assume all'istante corrente; così, all'istante t, il punto $x \in \Omega$ occupa il punto $y = f(x, t)$, dove la magnetizzazione vale appunto $\boldsymbol{m}(y, t)$.

Una difficoltà caratteristica, anzi, la principale difficoltà nello studio della statica e, sopratutto, della dinamica dei ferromagneti deformabili risiede proprio nella necessità di considerare come incognite, ad ogni istante t dell'intervallo temporale di interesse, la coppia di campi $(f(\cdot, t), \boldsymbol{m}(\cdot, t))$, con il secondo campo definito sull'immagine $f(\Omega, t)$ della regione Ω fornita dal primo. Questa difficoltà evapora, naturalmente, se si restringe l'attenzione ai ferromagneti indeformabili. Va da sé che far questo preclude lo studio dell'effetto di magnetostrizione. Ma, come già dicevamo, l'analisi dell'evoluzione della magnetizzazione in un ferromagnete rigido è comunque interessante, a qualunque dei livelli di generalità ai quali è possibile.

In estrema sintesi, l'idea che guida la modellazione è di *riguardare un corpo ferromagnetico deformabile come la composizione di due continui interagenti*, l'uno essenzialmente «meccanico», l'altro «magnetico». Questi sono i passi principali.

- La cinematica del continuo composito è descritta dalla coppia (moto, magnetizzazione).

- Vari sistemi di forze sono coniugati ai tassi temporali di variazione di (moto, magnetizzazione) dalla scelta di una densità di *potenza* per unità di volume della regione $f(\Omega, t)$; si distinguono: *forze di interazione* tra i due continui e *forze specifiche* di ciascuno di essi; e, tra queste ultime, forze specifiche *interne* (che possono essere sia *forze mutue* tra parti distinte del corpo sia *au-*

toforze, che una parte esercita su se stessa) e forze specifiche *esterne* (che possono essere *inerziali* e non).

- L'invarianza della potenza sotto opportune trasformazioni della soggiacente struttura spazio-temporale è garantita se questi sistemi di forze soddisfano certe *equazioni di bilancio*, sia per il continuo composito che per i continui costituenti.

- La peculiarità di comportamento di una classe di corpi ferromagnetici è descritta dalla scelta della sua *risposta costitutiva* alle storie di (moto, magnetizzazione) in una collezione fissata; la scelta dev'essere compati-bile con un *principio di dissipazione*, ciò che esclude i tipi di risposta ritenuti fisicamente inammissibili.

Due (di quattro) sono le equazioni di bilancio principali, a valere per ogni istante t in ogni punto di $f(\Omega, t)$:

- l'equazione di bilancio delle forze agenti sul continuo composito,

$$\mathbf{b} + \operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{0}\,; \tag{3.1}$$

- l'equazione di bilancio delle coppie agenti sul continuo «magnetico»,

$$\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{k} + \operatorname{div}\boldsymbol{C}) = \mathbf{0}\,. \tag{3.2}$$

La forza $\mathbf{b}$ e la coppia $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{c}$ sono azioni specifiche esterne; per semplicità, le immaginiamo qui esclusivamente di tipo inerziale, assegnando loro la forma

$$\mathbf{b} = -\varrho\dot{\mathbf{v}}, \qquad \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{c} = -\gamma^{-1}\dot{\boldsymbol{m}} \tag{3.3}$$

(qui

$$\mathbf{v}(y, t) = \partial_t f(f^{-1}(y, t), t)$$

è il campo di *velocità* su $f(\Omega, t)$, mentre

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \operatorname{grad}\boldsymbol{m}\cdot\mathbf{v} + \partial_t\boldsymbol{m}\,;$$

ϱ è la densità di massa della regione $f(\Omega, t)$ e γ è una costante positiva). È per via di queste rappresentazioni delle azioni d'inerzia che le equazioni di bilancio (3.1) e (3.2) divengono equazioni di evoluzione di natura, rispettivamente, iperbolica e parabolica.

La coppia $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{k}$ è di interazione: precisamente, raffigura l'azione del continuo «meccanico» su quello «magnetico».

Nell'equazione di bilancio delle forze agenti sul continuo composto, il termine $\operatorname{div}\mathbf{T}$ descrive l'azione a distanza corrispondente all'azione meccanica di contatto descritta dal *tensore di sforzo di Cauchy* $\mathbf{T}$. Similmente, nell'equazio-ne di bilancio delle coppie agenti sul continuo «magnetico», il termine $\boldsymbol{m} \times \operatorname{div} \boldsymbol{C}$ descrive l'azione a distanza corrispondente all'azione di contatto di origine magnetica descritta dal *tensore di sforzo di coppia* $\boldsymbol{C}$.

Le variabili che debbono essere fatte oggetto di scelta costitutiva sono $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{C}$; tutte appaiono, assieme alla densità di *energia libera* ψ, nella

- disequazione di dissipazione,

$$\mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \boldsymbol{C} \cdot \operatorname{grad} \dot{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{k} \cdot \dot{\boldsymbol{m}} - \varrho \dot{\psi} \geqslant 0 \,. \tag{3.4}$$

3.2. *Verso un'equazione di Gilbert generalizzata.*

Un esempio significativo è quello dei materiali ferromagnetici capaci di risposta meccanica di tipo elastico in condizioni di equilibrio, di tipo elasto-viscoso altrimenti. Per questi materiali,

$$\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}; \dot{\mathbf{F}}, \dot{\boldsymbol{M}}, \dot{\boldsymbol{m}}), \qquad \mathbf{F} = \nabla f, \; \boldsymbol{M} = \operatorname{grad} \boldsymbol{m} \,, \tag{3.5}$$

e similmente per $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{C}$, mentre

$$\psi = \widehat{\psi}(\mathbf{F}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}) \,. \tag{3.6}$$

Perchè le equazioni costitutive (3.5)-(3.6) siano compatibili con la disequazione di dissipazione (3.4), occorre che la risposta elastica di equilibrio

$$\widehat{\mathbf{T}}^{eq}(\mathbf{F}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}; \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ etc.} \tag{3.7}$$

sia completamente determinata da $\widehat{\psi}$:

$$\mathbf{T}^{eq} = \varrho(\partial_{\mathbf{F}} \psi)\, \mathbf{F}^T - \varrho \boldsymbol{M}^T(\partial_{\boldsymbol{M}} \psi), \qquad \boldsymbol{C}^{eq} = \varrho(\partial_{\boldsymbol{M}} \psi), \qquad \boldsymbol{k}^{eq} = -\varrho(\partial_{\boldsymbol{m}} \psi); \tag{3.8}$$

e che, in aggiunta, la risposta viscosa

$$\widehat{\mathbf{T}}^{vs}(\mathbf{F}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}; \dot{\mathbf{F}}, \dot{\boldsymbol{M}}, \dot{\boldsymbol{m}}) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}; \dot{\mathbf{F}}, \dot{\boldsymbol{M}}, \dot{\boldsymbol{m}}) - \widehat{\mathbf{T}}^{eq}(\mathbf{F}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{m}) \; etc. \tag{3.9}$$

sia compatibile con la disequazione di dissipazione *ridotta*

$$\mathbf{T}^{vs} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \boldsymbol{C}^{vs} \cdot \operatorname{grad} \dot{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{k}^{vs} \cdot \dot{\boldsymbol{m}} \geqslant 0 \,. \tag{3.10}$$

Il problema di evoluzione che risulta dalla combinazione con opportune condizioni iniziali ed al contorno delle equazioni di bilancio (3.1)-(3.2) e delle relazioni costitutive (3.3) e (3.5)-(3.10) appare alquanto complesso, pur essendo una versione volutamente semplificata del problema di evoluzione formulato con maggior precisione e dettaglio in [4]. Per questo problema, che generalizza il problema di Gilbert di evoluzione della magnetizzazione accoppiandolo con il problema di evoluzione della forma (*magnetostrizione*), non si conoscono risultati matematici di sorta.

Val la pena tuttavia di indicare quali scelte costitutive particolarmente semplici, nel caso di ferromagneti immobili per i quali non importa considerare l'equazione che regola l'evoluzione di forma, consentano di ridurre l'altra equazione di evoluzione alla forma di Gilbert (2.6). Basta prendere per energia libera l'energia detta *di scambio*:

$$\psi = \frac{1}{2}\alpha|\nabla \boldsymbol{m}|^2, \qquad \alpha > 0\,, \tag{3.11}$$

donde

$$\boldsymbol{C}^{eq} = \alpha\nabla\boldsymbol{m}\,, \qquad \boldsymbol{k}^{eq} = \boldsymbol{0}\,; \tag{3.12}$$

e per meccanismo di dissipazione quello detto *relativistico*:

$$\boldsymbol{C}^{vs} = \boldsymbol{0}\,, \qquad \boldsymbol{k}^{vs} = -\mu\dot{\boldsymbol{m}}\,, \qquad \mu > 0\,, \tag{3.13}$$

ciò che è naturalmente compatibile con la disequazione (3.10). Con l'uso di $(3.3)_2$ si conferisce allora all'equazione (3.2) l'aspetto

$$-\gamma^{-1}\dot{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{m}\times(-\mu\dot{\boldsymbol{m}} + \alpha\Delta\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{0}\,, \tag{3.14}$$

quello, cioè, dell'equazione di Gilbert (pur di assegnare a tutte le costanti fisiche il valore 1, un malvezzo cui un fisico matematico ammodo non cede altro che in presenza di un uditorio misto).

3.3. *Stati di equilibrio e meccanismi di dissipazione.*

Quand'anche si concentri l'attenzione sull'evoluzione delle *strutture di dominio* (ad esempio, sul moto delle pareti dei domini magnetici), e quindi si continui a fissar l'attenzione su ferromagneti immobili e indeformabili, si possono tuttavia considerare relazioni costitutive termodinamicamente compatibili assai più generali delle (3.11)-(3.13).

Quel che conta per determinare l'evoluzione è il combinato disposto della collezione degli *stati di equilibrio*, cioè, delle soluzioni dell'equazione statica

$$\boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{k}^{eq} + \operatorname{div}\boldsymbol{C}^{eq}) = \boldsymbol{0}\,, \tag{3.15}$$

e dei *meccanismi di dissipazione*, cioè, dei termini $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{k}^{vs}$ e $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{C}^{vs}$ dell'equazione dinamica [21].

Nel caso dell'equazione di Gilbert standard, gli stati di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione

$$\boldsymbol{m}\times\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}\,, \tag{3.16}$$

e l'unico meccanismo di dissipazione è quello relativistico $-\mu\boldsymbol{m}\times\dot{\boldsymbol{m}}$. Si possono tuttavia considerare differenti collezioni di stati di equilibrio, ad esempio,

$$\boldsymbol{m}\times(\Delta\boldsymbol{m} - \eta\Delta\Delta\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{0}\,, \qquad \eta > 0\,,$$

che risulta prendendo un energia libera contenente anche un termine «di secondo gradiente» [2, 22]; e differenti meccanismi di dissipazione, ad esempio, la dissipazione *di scambio* $-\tau\Delta\dot{\boldsymbol{m}}$, $\tau > 0$, introdotta nell'equazione di Gilbert regolarizzata (2.22). Infine, si possono considerare meccanismi di dissipazione, come quello tipo *attrito secco* proposto in [25], che inducono anche cambiamenti nella collezione degli stati di equilibrio.

Differenti espressioni per l'energia libera e i termini dissipativi inducono, almeno in linea di principio, differenti soluzioni di equilibrio e differenti processi di rilassamento verso tali equilibri. Sempre in linea di principio, questi cambiamenti di modello potrebbero selezionare le più regolari o più fisicamente significative tra le molte (forse, infinite) soluzioni deboli dell'equazione di partenza. Queste considerazioni ci riconducono alle domande poste alla fine della Sezione 2 ed alle congetture avanzate là: i termini addizionali di energia e dissipazione che abbiamo considerato — o magari, altri termini termodinamicamente legali — rendono eventualmente impossibile nei ferromagneti lo sviluppo di singolarità di dimensione bassa con energia finita? ovvero, selezionano uno specifico tipo di evoluzione successiva all'istante in cui una singolarità si è comunque formata?

Ringraziamenti. Il lavoro su cui qui si riferisce è stato svolto nell'ambito del Progetto Cofinanziato 1998 «Modelli Matematici per la Scienza dei Materiali» e del TMR Contract FMRX-CT98-0229 «Phase Transitions in Crystalline Solids».

REFERENCES

[1] F. Alouges - A. Soyeur, *On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations: existence and nonuniqueness*, Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl., **18** (1992), 1071.

[2] V. G. Baryakthar - B. A. Ivanov - A. L. Sukstanskii - E. Yu. Melikhov, *Soliton relaxation in magnets*, Phys. Rev. B, **56** (1997), 619.

[3] M. Bertsch - R. Dal Passo - R. Van der Hout, *Nonuniqueness for the heat flow of harmonic maps on the disk*, Quad. I.A.C.-C.N.R. 9/1999.

[4] M. Bertsch - P. Podio-Guidugli - V. Valente, *On the dynamics of deformable ferromagnets. I. Global weak solutions for soft ferromagnets at rest.* I.A.C. Quad. 1/1999, in corso di stampa su Annali Mat. Pura Appl.

[5] F. Bethuel - J.-M. Coron - J. M. Ghidaglia - A. Soyeur, *Heat flows and relaxed energies for harmonic maps*, In Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States, Gregynog, Birkhäuser (1990).

[6] H. Brezis - J.-M. Coron - E. H. Lieb, *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys., **107** (1986), 649.

[7] W. F. Brown, Magnetoelastic Interactions, Springer-Verlag (1966).

[8] W. F. Brown, Micromagnetics, Krieger, 1978.
[9] K.-C. Chang - W.-Y. Ding - R. Ye, *Finite-time blow-up of the heat flow of harmonic maps from surfaces*, J. Differential Geometry, **36** (1992), 507.
[10] Y. Chen - M. Struwe, *Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps*, Math. Z., **201** (1989), 83.
[11] J.-M. Coron, *Nonuniqueness for the heat flow of harmonic maps*. Ann. Inst. Henri Poincaré, **7** (1990), 335.
[12] A. DeSimone - P. Podio-Guidugli, *Inertial and self interactions in structured continua: liquid crystals and magnetostrictive solids*, MECCANICA, **30** (1995), 629.
[13] A. DeSimone - P. Podio-Guidugli, *On the continuum theory of deformable ferromagnetic solids*, Arch. Rational Mech. Anal., **136** (1996), 201.
[14] A. DeSimone - P. Podio-Guidugli, *Pointwise balances and the construction of stress fields in dielectrics*, Math. Models & Methods Appl. Sci., **7** (1997), 477.
[15] A. Freire, *Uniqueness for the harmonic map flow from surfaces to general targets*, Comment. Math. Helv., **70** (1995), 310.
[16] T. L. Gilbert, *A Lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetization field*, Phys. Rev., **100** (1955) 1243.
[17] R. M. Hardt, *Singularities of harmonic maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **34** (1997), 15.
[18] M.-C. Hong, *Some new examples for nonuniqueness of the evolution problem of harmonic maps*, Comm. Anal. Geom., **6** (1998), 779.
[19] L. Landau - E. Lifshitz, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Z. Sowjet., 8 (1935), 153. Ristampato alle pp. 101-114 di «Collected Papers of L.D. Landau», D. ter Haar Ed., Pergamon Press (1965).
[20] P. Podio-Guidugli, *Inertia and invariance*, Ann. Mat. Pura Appl., **172** (1997), 103-124.
[21] P. Podio-Guidugli, *On dissipation mechanisms in micromagnetics*, inviato per la pubbl. (2000).
[22] P. Podio-Guidugli - V. Valente, *Existence of global weak solutions to a modified Landau-Lifshitz equation*, in preparazione (1999).
[23] M. Struwe, *Geometric evolution problems* of «Nonlinear Partial Differential Equations in Differential Geometry», IAS Park City Math. Ser., Vol. **2**, Am. Math. Soc. (1996), 257.
[24] A. Visintin, *On Landau-Lifshitz' equations for ferromagnetism*, Japan J. Appl. Math., **2** (1985), 69.
[25] A. Visintin, *Modified Landau-Lifshitz equation for ferromagnetism*, Physica B, **233** (1997), 365.

Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Roma «Tor Vergata»
Via di Tor Vergata 110 - 00133 Roma, Italia
e-mail: ppg@uniroma2.it