Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Sinestrari

Formazione di singolarità nel moto per curvatura media

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-B** (2001), n.1, p. 107–119.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_1_107_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
(8) 4-B (2001), 107-119

Formazione di singolarità nel moto per curvatura media.

CARLO SINESTRARI (*)

Abstract. – *We study the formation of singularities for hypersurfaces evolving by mean curvature. After recalling the basic properties of the flow and the classical results about curves and convex surfaces, we give account of some recent developments of the theory for the case of surfaces with positive mean curvature. We show that for such surfaces we can obtain a–priori estimates on the principal curvatures which enable us to classify the singular profiles by the use of rescaling techniques.*

1. – Introduzione.

Il moto per curvatura media è uno degli esempi più studiati di problema di evoluzione geometrico; esso consiste nel considerare una superficie immersa nello spazio euclideo e nel farla evolvere richiedendo che ogni punto si muova con velocità normale pari all'opposto della curvatura media.

Vi sono varie motivazioni per lo studio di questo problema. Una di queste è che un tale moto è il flusso secondo il gradiente del funzionale area della superficie. Pertanto, esso compare in modo naturale in quei modelli fisici dove vi è un'interfaccia a cui è associata un'energia superficiale da minimizzare. Nello studio di questi modelli fisici è possibile ottenere la dinamica delle interfacce come limite di modelli microscopici; dal punto di vista analitico ciò corrisponde al fatto che il moto per curvatura media compare nello studio del limite singolare per $\varepsilon \to 0^+$ di equazioni di reazione diffusione del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'(u). \tag{1}$$

Ad esempio, se $W(u) = (u^2-1)^2$ (potenziale di doppio pozzo) si dimostra, in opportune ipotesi, che la soluzione u_ε dell'equazione (1) converge, per $\varepsilon \to 0^+$, ad una funzione che assume solo i valori ± 1 in regioni delimitate da un'interfaccia che si evolve per curvatura media. Per un approfondito esame di queste tematiche, si può consultare ad esempio [28].

(*) Comunicazione presentata a Napoli in occasione del XVI Congresso U.M.I.

Vi sono anche delle motivazioni puramente geometriche per studiare questo e altri problemi di evoluzione: intuitivamente parlando, si cerca di dimostrare l'esistenza di certi oggetti ottenendoli come stati limite di un problema di evoluzione. Il primo esempio di questo procedimento è dato dal lavoro di Eells e Sampson [11]. Essi considerano una mappa tra due varietà riemanniane e la fanno evolvere secondo l'equazione del calore, dimostrando che, se le varietà soddisfano ipotesi opportune, il problema ha una soluzione globale che converge ad una mappa armonica. Tra i lavori successivi ispirati a questo metodo ricordiamo quelli di Hamilton [17, 19] che utilizzano il flusso di Ricci, il lavoro di Andrews [4] che utilizza il moto secondo la curvatura media armonica e lo studio di Huisken e Ilmanen [24] dove si impiega l'evoluzione di superfici secondo l'inverso della curvatura media nella dimostrazione della congettura di Penrose in relatività generale.

Una caratteristica del moto per curvatura media e degli altri problemi di evoluzione geometrici sopra menzionati è la formazione di singolarità: vi è in generale un tempo critico in cui la superficie cessa di essere regolare. Può avvenire ad esempio che l'intera superficie si contragga fino a diventare un punto, oppure che solo una parte diventi singolare, ad esempio una stretta porzione cilindrica le cui pareti arrivino a toccarsi in un punto. Nel secondo caso è possibile definire un'evoluzione generalizzata per tempi successivi a quello critico che include anche superfici singolari.

In questa comunicazione descriveremo la formazione di singolarità nel moto per curvatura media, studiando in particolare il profilo della superficie per tempi vicini a quello critico. Esporremo alcuni classici risultati riguardanti il caso di curve [14, 15] e di superfici convesse [20] fino ad arrivare ai recenti risultati di [25, 26], dove si dà una classificazione dei possibili profili singolari per superfici con curvatura media positiva. Per ulteriori risultati sull'argomento il lettore può consultare gli articoli di rassegna [6, 22, 3, 23].

2. – Moto per curvatura media.

Consideriamo una superficie regolare n-dimensionale $\mathcal{M}$ immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$. Una *evoluzione per curvatura media* di $\mathcal{M}$ è una famiglia di immersioni dipendente dal tempo $F : \mathcal{M} \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ che soddisfa

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) = -H(p, t)\, \nu(p, t), \qquad p \in \mathcal{M},\ t \geq 0, \tag{2}$$

$$F(\cdot, 0) = Id, \tag{3}$$

dove $H(p, t)$ e $\nu(p, t)$ indicano la curvatura media e il versore normale nel punto $F(p, t)$ alla superficie $\mathcal{M}_t = F(\cdot, t)(\mathcal{M})$. Si possono studiare generalizzazioni di questo problema, prendendo varietà di codimensione maggiore di uno, o scegliendo come spazio ambiente una varietà riemanniana generale, ma questi casi esulano dalla presente trattazione.

Se si introduce un sistema di coordinate locali $x = (x_1, \dots, x_n)$ su $\mathcal{M}$ si trova che il problema (2)-(3) dà luogo a un sistema parabolico degenere quasilineare nelle componenti dell'immersione F. Inoltre, se si scrive una porzione della superficie come grafico di funzione $x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n)$, si trova che la funzione u deve soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + |Du|^2} \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} . \tag{4}$$

Utilizzando il teorema delle funzioni implicite di Nash–Moser, Gage e Hamilton [17, 14] hanno dimostrato un teorema di esistenza e unicità locale per soluzioni regolari di (2)-(3). Successivamente lo stesso risultato è stato ottenuto mediante altre tecniche, vedi ad esempio [13].

Mediante tecniche standard è possibile dimostrare (vedi [20, Teor. 8.1]) che la soluzione locale di (2)-(3) può essere prolungata in un intervallo massimale $[0, T)$, dove $T = +\infty$ oppure T è tale che la curvatura di $\mathcal{M}_t$ diventa illimitata per $t \to T$. I seguenti esempi mostrano che entrambi i comportamenti possono effettivamente avere luogo.

ESEMPIO 1. – Sia $\mathcal{M}$ una sfera di raggio R_0. Allora l'evoluzione per curvatura media è data da sfere concentriche a $\mathcal{M}$ di raggio decrescente e tendente a 0 in tempo finito. Precisamente, si verifica che $\mathcal{M}_t$ è la sfera di raggio $R(t)$ con

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2nt} .$$

Quindi la superficie si contrae in un punto quando $t \to T = R_0^2 / 2n$. Osserviamo che la curvatura della superficie tende a infinito con ordine $1/\sqrt{T-t}$.

ESEMPIO 2. – Sia $n = 1$ e sia $\mathcal{M}$ la curva di equazione

$$y = -\ln(\cos x), \qquad x \in (-1, 1) .$$

In questo caso il moto per curvatura media ha una soluzione traslatoria; la curva al tempo t è data dal grafico della funzione $y = -\ln(\cos x) + t$. Pertanto l'evoluzione è definita per ogni $t > 0$.

Esempi come quelli riportati in cui l'evoluzione per curvatura media si può determinare esplicitamente sono assi rari. Tuttavia in molti casi si possono ottenere informazioni qualitative mediante tecniche di confronto. Vale infatti il risultato seguente, che si dimostra applicando il principio di massimo per equazioni paraboliche all'equazione (4).

TEOREMA 3. – *Siano $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ due superfici regolari e siano $\mathcal{M}_t$ e $\mathcal{N}_t$ le loro evoluzioni per curvatura media. Supponiamo che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ siano disgiunte.*

Allora anche $\mathcal{M}_t$ e $\mathcal{N}_t$ sono disgiunte per ogni t per cui sono definite entrambe le evoluzioni.

3. – Formazione di singolarità.

Quando l'evoluzione per curvatura media di una superficie $\mathcal{M}$ termina a un tempo $T < +\infty$ in cui la curvatura diventa illimitata, diciamo che la superficie *diventa singolare* al tempo T. Utilizzando le osservazioni preliminari del paragrafo precedente possiamo mostrare che una superficie chiusa diventa necessariamente singolare in tempo finito.

TEOREMA 4. – *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare chiusa. Allora l'evoluzione per curvatura media di $\mathcal{M}$ diventa singolare in un tempo $T \leq R^2/2n$, dove R è il raggio di una sfera contenente $\mathcal{M}$.*

DIMOSTRAZIONE. – È sufficiente applicare il teorema di confronto (Teorema 3) prendendo come superficie $\mathcal{N}$ una sfera di raggio R contenente $\mathcal{M}$. Poiché $\mathcal{M}_t$ è contenuta in $\mathcal{N}_t$ che si contrae in un punto per $t \to R^2/2n$, $\mathcal{M}_t$ non può essere definita per $t \geq R^2/2n$. ∎

Osserviamo che l'argomentazione usata nella dimostrazione precedente non implica che $\mathcal{M}_t$ si contrae in un punto come accade per la sfera che la contiene, ma solo che diventa singolare in un tempo minore di quello della sfera. In realtà esistono superfici chiuse che diventano singolari senza contrarsi in un punto, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 5. – Descriveremo questo esempio in modo intuitivo, poiché un'esposizione rigorosa richiederebbe una lunga analisi. Sia $n \geq 2$ e sia $\mathcal{M}$ una superficie consistente in due sfere unite da un cilindro sottile. Sia le parti sferiche che la parte cilindrica tendono a contrarsi; tuttavia, se il raggio del cilindro è sufficientemente piccolo rispetto a quello delle sfere, la contrazione del cilindro sarà più rapida. Pertanto, ci si aspetta intuitivamente che il tratto cilindrico diventi singolare prima che le sfere abbiano ultimato la contrazione. Una dimostrazione precisa di questa proprietà è stata data da Grayson [16] (vedere anche [2] per una trattazione più approfondita).

Una volta osservato che la formazione di singolarità può avvenire in modi differenti, viene naturale considerare le questioni seguenti:

(i) Studiare il comportamento della superficie per tempi vicini a quello critico e nella regione dove la curvatura diventa illimitata. La tecnica naturale per uno studio di questo tipo è quella dei riscalamenti, usata con profitto in numerosi altri ambiti (ad es. la regolarità delle superfici minime o il profilo di blowup per soluzioni illimitate di equazioni a derivate parziali).

(ii) Dare una nozione generalizzata di moto per curvatura media per poter definire un'evoluzione anche per tempi successivi a quello critico. In casi come quelli dell'Esempio 5, infatti, è naturale cercare di definire un'evoluzione anche dopo che il cilindro si è ristretto; intuitivamente ci si aspetta che la superficie si divida in due parti e che ciascuna delle due prosegua la contrazione fino a diventare un punto. Per poter dare un significato rigoroso a queste considerazioni bisogna introdurre una definizione di moto per curvatura media che si possa applicare a oggetti più generali delle superfici regolari.

Lo scopo di questa comunicazione è di esporre alcuni recenti risultati riguardanti la tematica in (i) e pertanto rinunciamo a dare un resoconto dei numerosi studi riguardanti la (ii), per i quali rimandiamo ad esempio alla rassegna [3] o alla comunicazione di M. Novaga in questo convegno. Ci limitiamo a ricordare, tra i numerosi metodi introdotti per definire un'evoluzione generalizzata, quello di Brakke basato sulla teoria dei varifolds [9] (cf. anche [27]) e quello degli insiemi di livello che utilizza la teoria delle soluzioni di viscosità [10, 12]. I maggiori problemi aperti in questo ambito riguardano l'unicità e la regolarità delle soluzioni deboli, e i legami tra le soluzioni deboli definite con questi diversi approcci.

Osserviamo che vi è una potenziale connessione tra le tematiche (i) e (ii): una dettagliata conoscenza del profilo della superficie per tempi vicini a quello critico consente di definire un'evoluzione generalizzata tramite una procedura di «surgery». Tale procedura è stata portata avanti da Hamilton [19] per il moto secondo la curvatura di Ricci e la sua applicazione al moto per curvatura media è un importante obiettivo per la futura ricerca.

4. – Invarianza della convessità.

Uno strumento importante nell'analisi delle singolarità è dato dall'invarianza rispetto al moto per curvatura media di varie proprietà di convessità.

TEOREMA 6. – *Sia $\mathcal{M}_t$ l'evoluzione per curvatura media di $\mathcal{M}$. Se $\mathcal{M}$ ha curvatura media positiva, allora lo stesso vale per $\mathcal{M}_t$, per ogni $t \in (0, T)$. Analogamente, se $\mathcal{M}$ è convessa (cioè se è il bordo di un insieme convesso) la proprietà si conserva per ogni $t \in (0, T)$.*

DIMOSTRAZIONE. – Un calcolo diretto [20] mostra che la curvatura media H soddisfa l'equazione

$$\partial_t H = \Delta H + |A|^2 H ,$$

dove Δ è l'operatore di Laplace-Beltrami su $\mathcal{M}_t$ e $|A|^2$ indica la somma dei quadrati delle curvature principali di $\mathcal{M}_t$. Per il principio di massimo, se $H > 0$ al tempo iniziale allora $H > 0$ per tutti i tempi successivi.

L'invarianza della convessità si dimostra in modo analogo tenendo presente che tale proprietà equivale alla positività dell'operatore di Weingarten. Si calcola allora l'equazione di evoluzione per tale operatore e si utilizza un principio di massimo per tensori (vedere [20] per i dettagli). ■

Un primo risultato che descrive la formazione di singolarità riguarda le superfici convesse chiuse, e mostra che hanno un comportamento molto simile a quello visto per la sfera nell'Esempio 1.

TEOREMA 7. – *Sia $\mathcal{M}$ convessa e chiusa e sia $\mathcal{M}_t$, con $t \in [0, T)$, la sua evoluzione per curvatura media. Allora $\mathcal{M}_t$ si contrae in un punto per $t \to T$; inoltre, se si dilata $\mathcal{M}_t$ in modo da mantenere il raggio costante, le corrispondenti superfici tendono a una sfera.*

Il teorema precedente è dovuto a Gage-Hamilton [14] nel caso $n = 1$ (curve nel piano) e a Huisken [20] nel caso $n > 1$. Nel caso di una curva nel piano il risultato vale anche senza l'ipotesi di convessità, come mostrato da Grayson [15].

TEOREMA 8. – *Sia $\mathcal{M}$ una curva piana chiusa, regolare e semplice. Allora la sua evoluzione $\mathcal{M}_t$ secondo la curvatura media è convessa da un certo tempo in poi, e pertanto vale la conclusione del Teorema* 7.

Il teorema precedente non è valido per curve immerse con autointersezioni. In questo caso le curve possono sviluppare singolarità senza contrarsi in un punto; uno studio approfondito del profilo asintotico è dovuto ad Angenent e Velazquez [5, 7].

5. – Convessità e singolarità.

Nel Teorema 7 abbiamo visto che un'arbitraria superficie convessa che si evolve per curvatura media tende ad assumere un profilo sferico per tempi vicini a quello critico. Nel seguito restringeremo la nostra attenzione alle superfici con curvatura media positiva. Come vedremo, si tratta di una classe sufficientemente ampia da includere numerosi esempi significativi e da presentare una gamma di risultati più ricca del caso convesso; d'altro lato, l'ipotesi di positività sulla curvatura media riduce l'arbitrarietà del comportamento delle superfici e rende possibile una descrizione dei possibili profili singolari.

I risultati che descriveremo sono contenuti in [25, 26] e sono basati su certe stime a priori che, intuitivamente parlando, mostrano che le proprietà di convessità della superficie non solo sono invarianti rispetto all'evoluzione, ma «migliorano» quando vi è formazione di singolarità. Per descrivere queste stime è necessario introdurre alcune notazioni.

Indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ le curvature principali della superficie. Indichiamo quindi, per ogni intero $k = 1, \ldots, n$, con S_k il k-simo polinomio simmetrico elementare calcolato nelle curvature, definito al modo seguente:

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k} .$$

Osserviamo che $S_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ coincide con la curvatura media H. Ricordiamo anche che $S_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1} \lambda_n$ è detta *curvatura scalare* e $S_n = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ è detta *curvatura gaussiana*. Si può dimostrare che

$$\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0 \Leftrightarrow S_1 \geqslant 0, \ldots, S_n \geqslant 0 . \tag{5}$$

In altre parole, la convessità della superficie equivale alla positività dei polinomi S_k. Le stime a priori che ora presentiamo sono delle stime dal basso per questi polinomi.

TEOREMA 9. – *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare chiusa e con curvatura media positiva, e sia $\mathcal{M}_t$ la sua evoluzione secondo la curvatura media. Allora per ogni $\eta > 0$ esiste $C_\eta > 0$ tale che, per ogni $k = 2, \ldots, n$,*

$$S_k > -\eta H^k - C_\eta \tag{6}$$

su $\mathcal{M}_t$, per ogni $t \in [0, T)$.

Il teorema precedente si dimostra con un procedimento induttivo. Il caso $k = 2$ segue da un teorema in [25], mentre il passaggio da k a $k+1$ è dimostrato in [26]. La dimostrazione sfrutta le proprietà algebriche dei polinomi S_k, l'equazione di evoluzione per la curvatura e una disuguaglianza di tipo Sobolev per superfici immerse. In ciascun passo induttivo si dimostra una stima a priori per il quoziente S_{k+1}/S_k di due polinomi elementari consecutivi, utilizzando la proprietà che tale quoziente è una funzione concava.

Le stime (6) sono significative in un intorno del tempo critico, quando la curvatura della superficie diventa illimitata. Essendo S_k un polinomio di grado k, la sua crescita naturale è la stessa di H^k. Le stime mostrano che la parte negativa dei polinomi S_k è trascurabile quando la curvatura diventa illimitata. Infatti, a secondo membro è presente il termine ηH^k dove $\eta > 0$ è arbitrario, e la costante C_η che è trascurabile rispetto agli altri termini che sono illimitati. Per porre queste considerazioni in forma precisa passiamo ora a introdurre una procedura di riscalamento per l'analisi delle singolarità.

6. – Riscalamento.

Nel corso del paragrafo $\mathcal{M}_t$ è una famiglia di superfici chiuse che si evolve secondo la curvatura media in un intervallo massimale $[0, T)$. Supponiamo inoltre che $T < \infty$.

PROPOSIZIONE 10. – *Si ha, per ogni* $t \in [0, T)$,

$$\max_{\mathcal{M}_t} |A|^2 > \frac{1}{2(T-t)}. \tag{7}$$

DIMOSTRAZIONE. – Ricordiamo (vedi [20]) che $|A|^2$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4.$$

La tesi si ottiene allora per confronto con l'equazione ordinaria $\dot{y} = 2y^2$. ■

Il risultato precedente suggerisce di suddividere le singolarità a seconda che valga o meno una stima dall'alto analoga a (7).

DEFINIZIONE 11. – *Diciamo che la superficie sviluppa una singolarità di* tipo I *se esiste una costante* $C > 0$ *tale che*

$$\max_{\mathcal{M}_t} |A|^2 \leq \frac{C}{T-t}. \tag{8}$$

In caso contrario diciamo che la singolarità è di tipo II.

Come osservato nell'Esempio 1, una sfera sviluppa una singolarità di tipo I, e lo stesso vale per un cilindro o per una superficie convessa chiusa. Le curve con un'autointersezione considerate in [5, 7] sviluppano invece una singolarità di tipo II. Nel seguito (Esempio 16) daremo un esempio di una superficie senza autointersezioni per cui si ha una singolarità di tipo II.

Il riscalamento viene definito in modo diverso a seconda che la singolarità sia di tipo I o II. In entrambi i casi il primo passo consiste nel fissare un'opportuna successione $\{(x_h, t_h)\}$ lungo la quale la curvatura diventa illimitata. Nel caso I prendiamo come $\{t_h\}$ una qualunque successione tendente a T e scegliamo $\{x_h\}$ tale che

$$|A|^2(x_h, t_h) = \max_{\mathcal{M}_{t_h}} |A|^2.$$

Nel caso II effettuiamo la scelta in modo più restrittivo. Per ogni intero $h \geq 1$

scegliamo $t_h \in [0, T - 1/h]$, $x_h \in \mathcal{M}$ tali che

$$|A|^2(x_h, t_h)\left(T - \frac{1}{h} - t_h\right) = \max_{\substack{t \leq T - 1/h \\ x \in \mathcal{M}}} |A|^2(x, t)\left(T - \frac{1}{h} - t\right). \tag{9}$$

Poniamo inoltre

$$L_h = |A|^2(x_h, t_h), \qquad \alpha_h = -L_h t_h, \qquad \omega_h = L_h\left(T - t_h - \frac{1}{h}\right) \tag{10}$$

e definiamo per ogni h la famiglia di superfici riscalate $\mathcal{M}_{h,\tau}$ definita dalle immersioni

$$F_h(\cdot, \tau) = \sqrt{L_h}\left(F\left(\cdot, \frac{\tau}{L_h} + t_h\right) - F(x_h, t_h)\right), \qquad \tau \in [\alpha_h, \omega_h]. \tag{11}$$

È immediato verificare che anche $\mathcal{M}_{h,\tau}$ si muove secondo la curvatura media. Indichiamo con H_h la curvatura media associata a F_h. Valgono le proprietà seguenti.

LEMMA 12. – *Si ha, per $h \to \infty$,*

$$t_h \to T, \qquad L_h \to \infty, \qquad \alpha_h \to -\infty, \qquad \omega_h \to \Omega,$$

dove Ω è un opportuno valore in $(0, \infty)$ se la singolarità è di tipo I *e $\Omega = +\infty$ se la singolarità è di tipo* II. *Inoltre, per ogni T_0, T_1 tali che $-\infty < T_0 < T_1 < \Omega$, la famiglia di superfici $\mathcal{M}_{h,\tau}$ ha curvatura uniformemente limitata per $\tau \in [T_0, T_1]$ e per h sufficientemente grande.*

DIMOSTRAZIONE. – Vedi [25, Lemma 4.4]. ■

Mediante tecniche standard è possibile ottenere la compattezza nella norma uniforme di una famiglia di superfici che soddisfino una limitazione uniforme sulla curvatura. Pertanto la stima uniforme sulla curvatura data dal lemma precedente consente di dire che una sottosuccessione delle $\mathcal{M}_{h,\tau}$ tende a una famiglia $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ definita per $\tau \in (-\infty, \Omega)$.

Se restringiamo l'attenzione al caso in cui la superficie originaria ha curvatura media positiva possiamo utilizzare le stime (6) e dedurre che le superfici riscalate $\mathcal{M}_{h,\tau}$ soddisfano

$$S_{k,h} > -\eta H_h^k - L_h^{-k/2} C_\eta.$$

Passando al limite per $h \to \infty$, troviamo che la superficie limite soddisfa $\widetilde{S}_k \geq -\eta \widetilde{H}^k$ per ogni $\eta > 0$, e quindi $\widetilde{S}_k \geq 0$. Ricordando la proprietà (5) deduciamo

COROLLARIO 13. – *Sia $\mathcal{M}$ una superficie chiusa di curvatura media positiva e sia $\mathcal{M}_t$ la sua evoluzione per curvatura media. Allora ogni famiglia $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ ottenuta come limite di riscalamenti di $\mathcal{M}_t$ secondo la procedura descritta* *sopra è costituita da superfici convesse. Inoltre la famiglia* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ *è definita per* $\tau \in (-\infty, \Omega)$, *con* Ω *finito, se la singolarità di* $\mathcal{M}_t$ *è di tipo* I, *mentre è definita per* $\tau \in (-\infty, +\infty)$ *se la singolarità è di tipo* II.

Osserviamo che le superfici riscalate soddisfano stime uniformi sulla curvatura ma i loro diametri non sono necessariamente equilimitati. Pertanto le superfici della famiglia limite $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ possono essere illimitate; ad esempio, esse sono sicuramente illimitate nei casi in cui la famiglia originaria $\mathcal{M}_t$ non si contrae in un punto per $t \to T$.

Osserviamo anche che le superfici della famiglia limite sono convesse, ma non necessariamente strettamente convesse. Tuttavia, ci si può sempre ricondurre al caso in cui la convessità sia stretta, in virtù del risultato seguente.

TEOREMA 14. – *Sia* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ *come nel corollario precedente. Se le superfici* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ *non sono strettamente convesse, allora* (*a meno di un movimento rigido*) *si possono scrivere come prodotto* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau = \Gamma^k_\tau \times \mathbb{R}^{n-k}$, *dove* $1 \leq k \leq n$ *e* Γ^k_τ *è una famiglia di superfici k-dimensionali strettamente convesse.*

DIMOSTRAZIONE. – Vedi [26, Teor. 4.1]. ■

Nel paragrafo successivo vedremo come questi risultati consentono di ottenere una classificazione di tutte le possibili famiglie limite $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$. Segnaliamo che un'altra dimostrazione della convessità del limite delle famiglie di riscalamenti è stata data in seguito da White [29] con tecniche di teoria geometrica della misura che si possono applicare anche a soluzioni generalizzate.

7. – Classificazione delle singolarità.

Possiamo ora formulare il nostro risultato principale, che classifica i possibili profili singolari per superfici chiuse con curvatura media positiva.

TEOREMA 15. – *Sia* $\mathcal{M}$ *una superficie regolare chiusa di curvatura media positiva, sia* $\mathcal{M}_t$ *la sua evoluzione per curvatura media e sia* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ *una famiglia ottenuta come limite di riscalamenti di* $\mathcal{M}_t$ *secondo la procedura descritta nel paragrafo precedente.*

(i) *Se la singolarità è di tipo* I, *allora* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ *è una famiglia di superfici che si contraggono omoteticamente. Più precisamente, le superfici* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ *sono sfere, oppure cilindri, oppure hanno la forma* $\mathbb{R}^{n-1} \times C_\tau$, *dove* C_τ *è una delle curve piane che si contraggono omoteticamente classificate da Abresch e Langer in* [1].

(ii) *Se la singolarità è di tipo* II, *allora si ha* $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau = \Gamma^k_\tau \times \mathbb{R}^{n-k}$, *dove* $1 \leq k \leq n$ *e* Γ^k_τ *è una famiglia di superfici k-dimensionali che si evolvono per curvatura media traslando con velocità costante.*

DIMOSTRAZIONE. – (cenni) Il procedimento nel caso (i) utilizza la cosiddetta *formula di monotonia* [21, Teor. 3.1], nella quale si dimostra che un opportuno funzionale (l'integrale su $\mathcal{M}_t$ del nucleo del calore retrogrado) è non crescente. Se la singolarità è di tipo I, si dimostra che per la famiglia limite $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ tale funzionale è costante. Calcolando la derivata del funzionale si trova che la condizione affinché sia costante è che valga identicamente $\widetilde{H} = \widetilde{F}\tilde{\nu}$, proprietà che caratterizza le soluzioni del moto che si contraggono omoteticamente. Un'ulteriore analisi consente di dire che le uniche soluzioni con questa proprietà sono quelle indicate nell'enunciato.

Nel caso (ii) si utilizza un risultato dovuto a Hamilton [18] che afferma che le uniche soluzioni globali (cioè definite per $\tau \in (-\infty, \infty)$) e strettamente convesse del moto per curvatura media sono soluzioni traslatorie. Applicando questo risultato alle superfici Γ_τ^k del Teorema 14 otteniamo la tesi. ■

ESEMPIO 16. – Per ogni $\lambda > 0$, consideriamo la funzione

$$\phi_\lambda(x) = \sqrt{(1-x^2)(x^2+\lambda)}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1 .$$

Fissato $n \geqslant 2$, chiamiamo $\mathcal{M}^\lambda$ la superficie n-dimensionale in $\mathbb{R}^{n+1}$ ottenuta ruotando intorno a un asse il grafico di ϕ_λ. Allora valgono le seguenti proprietà, dimostrate in [2].

(a) Se λ è sufficientemente grande la superficie $\mathcal{M}^\lambda$ diventa convessa in tempo finito; pertanto il profilo limite è sferico e la singolarità è di tipo I.

(b) Se λ è sufficientemente piccolo la superficie $\mathcal{M}^\lambda$ ha le caratteristiche dell'Esempio 5; la singolarità è ancora di tipo I, ma il profilo è cilindrico.

(c) Esiste almeno un valore di $\lambda > 0$ per cui $\mathcal{M}^\lambda$ ha curvatura media positiva e la sua evoluzione per curvatura media sviluppa una singolarità di tipo II.

In termini intuitivi, $\mathcal{M}^\lambda$ è costituita approssimativamente da due sfere unite da un cilindro; il parametro λ influenza il raggio del cilindro, mentre quello delle sfere resta invariato. Se il cilindro è stretto, allora diventa singolare prima delle sfere e si ha il comportamento in (b). Se il cilindro è largo, le sfere si restringono per prime, vengono «assorbite» dal cilindro, la superficie assume la forma di un ellissoide e si ha il comportamento in (a). Il caso (c) si verifica in corrispondenza di un valore critico del raggio del cilindro, tale che sfere e cilindro si restringono allo stesso tempo. Si verifica che la curvatura massima è assunta alle due estremità della superficie. Riscalando il flusso in quelle regioni si ottiene una soluzione traslatoria del moto, come previsto dal Teorema 15-(ii). Un'approfondita analisi di una classe di superfici di rotazione del tipo di quella del caso (c) è stata compiuta in [8].

8. – Problemi aperti.

Alla luce della seconda parte del Teorema 15, sarebbe interessante descrivere tutte le soluzioni traslatorie convesse del moto per curvatura media. Nel caso $n=1$ è facile mostrare che la curva piana dell'Esempio 2 è l'unica soluzione traslatoria a meno di movimenti rigidi e dilatazioni. Analogamente, per $n>1$, si trova che esiste un'unica soluzione traslatoria a simmetria di rotazione. Non si sa tuttavia se esistano soluzioni traslatorie convesse non a simmetria di rotazione.

Eccettuati casi particolari, nulla si sa dire sull'unicità del limite $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau$ dei flussi riscalati. A priori tale limite potrebbe dipendere sia dalla scelta della successione (x_k, t_k) che dalla scelta della sottosuccessione convergente di flussi riscalati. Una risposta a questo problema sarebbe possibile se si disponesse di una disuguaglianza di tipo Harnack sulla curvatura media o di una stima sul gradiente, ma entrambe le proprietà non sono note al di fuori del caso di superfici convesse.

Nell'Esempio 16 abbiamo osservato che la singolarità di tipo II si verifica per un valore critico del parametro λ. Questo suggerisce che nel moto per curvatura media le singolarità di tipo II siano un comportamento instabile per piccole perturbazioni e che il tipo I sia generico; anche questa congettura tuttavia, non sembra facilmente dimostrabile con le tecniche attualmente disponibili.

BIBLIOGRAFIA

[1] U. Abresch - J. Langer, *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, J. Differential Geom., **23** (1986), 175-196.

[2] S. Altschuler - S. B. Angenent - Y. Giga, *Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation*, J. Geom. Analysis, **5** (1995), 293-358.

[3] L. Ambrosio, *Geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions*, in «Calculus of variations and partial differential equations (Pisa, 1996)» (G. Buttazzo, A. Marino, M.K.V. Murthy eds.) Springer. Berlin, (2000).

[4] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in Riemannian spaces*, J. Differential Geom., **39** (1994), 407-431.

[5] S. B. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Differential Geom., **33** (1991), 601-633.

[6] S. B. Angenent, *Some recent results on mean curvature flow*, in «Recent advances in partial differential equations (El Escorial, 1992)», RAM Res. Appl. Math., **30**, Masson, Paris, 1994.

[7] S. B. Angenent - J. J. L. Velazquez, *Asymptotic shape of cusp singularities in curve shortening*, Duke Math. J., **77**, no. 1 (1995), 71-110.

[8] S. B. Angenent - J. J. L. Velazquez, *Degenerate neckpinches in mean curvature flow*, J. Reine Angew. Math., **482** (1997), 15-66.

[9] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, Princeton (1978).

[10] Y. G. CHEN - Y. GIGA - S. GOTO, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geom., **33** (1991), 749-786.

[11] J. EELLS - J. H. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., **86** (1964), 109-160.

[12] L. C. EVANS - J. SPRUCK, *Motion of level sets by mean curvature, I*, J. Differential Geom., **33** (1991), 635-681.

[13] L. C. EVANS - J. SPRUCK, *Motion of level sets by mean curvature, II*, Trans. Amer. Math. Soc., **330** (1992), 321-332.

[14] M. GAGE - R. S. HAMILTON, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom., **23** (1986), 69-96.

[15] M. A. GRAYSON, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom., **26** (1987), 285-314.

[16] M. A. GRAYSON, *A short note on the evolution of a surface by its mean curvature*, Duke Math. J., **58** (1989), 555-558.

[17] R. S. HAMILTON, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom., **17** (1982), 255-306.

[18] R. S. HAMILTON, *Harnack estimate for the mean curvature flow*, J. Differential Geom., **41** (1995), 215-226.

[19] R. S. HAMILTON, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom., **5** (1997), 1-92.

[20] G. HUISKEN, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom., **20** (1984), 237-266.

[21] G. HUISKEN, *Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom., **31** (1990), 285-299.

[22] G. HUISKEN, *Local and global behaviour of hypersurfaces moving by mean curvature*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **54** (1993), 175-191.

[23] G. HUISKEN, *Evolution of hypersurfaces by their curvature in Riemannian manifolds*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. (1998), 349-360.

[24] G. HUISKEN - T. ILMANEN, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*, in corso di stampa su J. Differential Geom.

[25] G. HUISKEN - C. SINESTRARI, *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*, Calc. Variations, 8 (1999), 1-14.

[26] G. HUISKEN - C. SINESTRARI, *Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces*, Acta Math., **183** (1999), 45-70.

[27] T. ILMANEN, *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, Mem. Amer. Math. Soc., **108** (1994).

[28] P. E. SOUGANIDIS, *Front propagation: theory and applications* in: «Viscosity solutions and applications» (I. Capuzzo Dolcetta and P.L. Lions, Eds.), Springer-Verlag, Berlin (1997), 186-242.

[29] B. WHITE *The nature of singularities in mean curvature flow of mean-convex sets*, preprint (1998).

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «Tor Vergata»
Via della Ricerca Scientifica - 00133 Roma, Itala
e-mail: sinestra@mat.uniroma2.it