Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefano Vignolo

Aspetti di gauge in dinamica lagrangiana ed hamiltoniana classica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 559–562.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_559_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 559-562

Aspetti di gauge in dinamica lagrangiana ed hamiltoniana classica.

STEFANO VIGNOLO

Le equazioni di Lagrange per un sistema $\mathcal{B}$ con n gradi di libertà

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

sono invarianti per trasformazioni arbitrarie della forma $L \to L' = L + \frac{df}{dt}$, $\frac{df}{dt}$ indicando la derivata temporale totale di una qualsiasi funzione $f = f(t, q^k)$.

In questo senso, piuttosto che rappresentare una quantità meccanica nel senso usuale, la lagrangiana L ha la natura di un «potenziale» atto alla determinazione delle equazioni del moto e, come tale, — come accade nella teoria classica dei campi — è definita a meno di un *gauge*.
Una dettagliata analisi di questo semplice fatto ha condotto ad una nuova formulazione della dinamica lagrangiana ed hamiltoniana classica in grado di incorporare automaticamente la gauge-invarianza della teoria [2, 3, 5].

L'intera costruzione poggia sull'introduzione del fibrato degli *scalari affini*.

Quest'ultimo, indicato con P, è un fibrato principale sullo spazio-tempo delle configurazioni $\mathcal{V}_{n+1}$ del sistema, con gruppo strutturale isomorfo a $(\Re, +)$. Il fibrato P induce due distinte azioni del gruppo $(\Re, +)$ sul fibrato dei primi getti $j_1(P, \Re)$, associato alla fibrazione $P \to \mathcal{V}_{n+1} \to \Re$. Quozientando $j_1(P, \Re)$ rispetto a tali azioni, si costruiscono due fibrati principali $\mathcal{L}(\mathcal{V}_{n+1})$ e $\mathcal{L}^c(\mathcal{V}_{n+1})$ sullo spazio delle velocità $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$; anch'essi hanno gruppo strutturale isomorfo a $(\Re, +)$ e sono detti rispettivamente il *fibrato lagrangiano* ed il *fibrato co-lagrangiano*.

Questi fibrati consentono una rivisitazione dei concetti di funzione lagrangiana, e di 1- e 2-forma di Poincaré-Cartan. Più precisamente, l'idea di funzione lagrangiana è sostituita da quella di *sezione lagrangiana* $l : j_1(\mathcal{V}_{n+1}) \to \mathcal{L}(\mathcal{V}_{n+1})$, vale a dire una sezione del fibrato lagrangiano, definita a meno dell'azione del gruppo di gauge; conseguentemente, lagrangiane gauge-equivalenti sono interpretate come differenti rappresentazioni della stessa sezione l, associate a differenti scelte della banalizzazione.

In questo ordine di idee, l'1-forma di Poincaré-Cartan $\theta := \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k\right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} dq^k$ assume il ruolo di rappresentazione di una connessione nel fibrato co-lagrangiano $\mathcal{L}^c(\mathcal{V}_{n+1}) \to j_1(\mathcal{V}_{n+1})$. La curvatura di questa connessione è un campo gauge-invariante su $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$, identico — a meno del segno — alla 2-forma di Poincaré-Cartan $\Omega := d\theta$.

Inoltre, una analisi più dettagliata delle proprietà geometriche del fibrato lagrangiano $\mathcal{L}(\mathcal{V}_{n+1})$ permette la costruzione di un formalismo presimplettico gauge-invariante per la trattazione della dinamica lagrangiana dipendente dal tempo; tale formalismo è particolarmente adatto allo studio delle lagrangiane singolari. Tramite questo, abbiamo esteso ai sistemi dipendenti dal tempo l'algoritmo di vincolo sviluppato da Gotay, Nester e Hinds, ed abbiamo discusso nel nuovo schema il problema dell'equazione differenziale del secondo ordine (la ricerca di soluzioni del moto cinematicamente ammissibili nel caso singolare).

Lo stesso impianto geometrico è stato poi applicato allo studio della dinamica anolonoma. L'analisi parte da una indagine sulla geometria della *varietà dei vincoli* $\mathcal{A}$, vale a dire della varietà rappresentativa degli stati cinetici di un sistema anolonomo [1, 4]; esaminando le proprietà differenziali del fibrato di Chetaev, vengono introdotti due campi tensoriali su $\mathcal{A}$ che caratterizzano intrinsecamente le proprietà di linearità (o non linearità) e di integrabilità (o non integrabilità) dei vincoli.

Il passo successivo mira ad estendere al caso anolonomo i concetti gauge-teorici sviluppati per i sistemi olonomi, al fine di fissare i fondamenti di una formulazione gauge-invariante della dinamica non-olonoma.

A tale scopo, attraverso pure e semplici procedure di pull-back, costruiamo corrispondenti *fibrati lagrangiani non–olonomi* $j_1^{\mathcal{A}}(P, \mathfrak{R})$, $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, e $\mathcal{L}^c(\mathcal{A})$, aventi un ruolo simile agli analoghi olonomi $j_1(P, \mathfrak{R})$, $\mathcal{L}(\mathcal{V}_{n+1})$ e $\mathcal{L}^c(\mathcal{V}_{n+1})$.

Così facendo, il concetto di sezione lagrangiana non-olonoma $l : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ continua ad avere senso come oggetto geometrico ma, da un punto di vista dinamico, non è più sufficiente a generare le equazioni del moto. L'origine di tale incompletezza è riconoscibile nel fatto che, diversamente da $j_1(P, \mathfrak{R})$ e $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$, nelle varietà $j_1^{\mathcal{A}}(P, \mathfrak{R})$ ed $\mathcal{A}$ manca una definizione intrinseca di tensore fondamentale, direttamente coinvolto nella costruzione della 1-forma di Poincaré-Cartan nel caso olonomo.

Per fare fronte a questa difficoltà, svolgiamo una analisi dettagliata del significato fisico e geometrico del concetto di tensore fondamentale. I risultati ottenuti possono essere riassunti come segue:

a) l'assegnazione di un tensore fondamentale su $\mathcal{A}$ è matematicamente equivalente alla decomposizione in somma diretta $T_{\mathcal{A}}(j_1(\mathcal{V}_{n+1})) = T(\mathcal{A}) \oplus W(\mathcal{A})$, dove $T_{\mathcal{A}}(j_1(\mathcal{V}_{n+1}))$ indica la restrizione ad $\mathcal{A}$ del fibrato tangente $T(j_1(\mathcal{V}_{n+1}))$ e $W(\mathcal{A})$ denota un opportuno fibrato vettoriale su $\mathcal{A}$. La caratterizzazione costitutiva dei vincoli (necessaria — insieme alla conoscenza delle forze attive — al fine di implementare correttamente il problema del moto) ha senso *solo* dopo aver assegnato un opportuno tensore fondamentale su $\mathcal{A}$. Infatti, indicando con $\varphi : \mathcal{A} \to T_{\mathcal{A}}(j_1(\mathcal{V}_{n+1}))$ il campo vettoriale (verticale) che esprime geometricamente la forza reattiva, una caratterizzazione costitutiva consiste in una prescrizione per il calcolo della parte tangente $\varphi_T \in T(\mathcal{A})$ in funzione di quella normale $\varphi_N \in W(\mathcal{A})$; in tal modo si ristabilisce il principio di determinismo.

Sotto questo punto di vista, l'assegnazione di un tensore fondamentale su $\mathcal{A}$ è una sorta di operazione pre–costitutiva che deve precedere la legge costitutiva e che rappresenta una informazione extra — non inclusa fra gli attributi intrinseci della verietà $\mathcal{A}$ — strettamente associata alla geometria estrinseca dei dispositivi coinvolti nella implementazione dei vincoli.

A questo proposito, proponiamo due esempi che mostrano che, in assenza di una precisa scelta pre–costitutiva, l'usuale procedura di Lagrange-Chetaev (il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, comunemente usato per derivare le equazioni dinamiche per sistemi non-olonomi) può produrre risultati erronei;

b) l'assenza di un tensore fondamentale in $j_1^{\mathcal{A}}(P, \mathfrak{R})$ preclude l'implementazione diretta di un algoritmo, analogo a quello olonomo, che associ ad ogni sezione lagrangiana non-olonoma $l : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ una corrispondente 1-forma di Poincaré-Cartan non-olonoma su $\mathcal{A}$.

La lacuna è colmata «sollevando» in $j_1^{\mathcal{A}}(P, \mathfrak{R})$ il tensore fondamentale pre–costitutivo dato su $\mathcal{A}$. L'operazione si basa sull'introduzione di un ulteriore oggetto geometrico che è identificato con una 1-forma di Chetaev gauge-dipendente χ_0 su $\mathcal{A}$.

Tale 1-forma non è inclusa tra gli attributi geometrici intrinseci della varietà $j_1^{\mathcal{A}}(P, \mathfrak{R})$, ma deve essere assegnata come oggetto dinamico indipendente, alla stessa stregua della sezione $l : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

L'informazione supplementare fornita dalla 1-forma χ_0 — unitamente alla sezione legrangiana l — è sufficiente a generare un algoritmo che conduce alla costruzione di una 1-forma di Poincaré-Cartan sulla varietà dei vincoli $\mathcal{A}$.

La trattazione dell'argomento è completata da una descrizione delle proprietà dei vari oggetti geometrici coinvolti rispetto alle trasformazioni di gauge. L'analisi porta alla definizione di uno speciale fibrato $\Gamma_\chi(\mathcal{L}(\mathcal{A})) \to \mathcal{A}$, chiamato il *fibrato dinamico*, che viene a rappresentare l'ambiente più adatto ad una formulazione intrinseca della dinamica lagrangiana non-olonoma.

All'interno di questo schema, le equazioni del moto hanno origine dallo studio della distribuzione caratteristica dell'ideale generato dalle 1-forme di Chetaev e dalla 2-forma di Poincaré-Cartan non-olonoma Ω_Λ indotta da una qualsiasi data *sezione dinamica* $\Lambda : \mathcal{A} \to \Gamma_\chi(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$.

A conclusione di questo punto, è presentata una formulazione non-olonoma del calcolo variazionale, particolarmente adatta ad una rilettura in senso variazionale delle equazioni dinamiche.

Successivamente, viene discussa la controparte hamiltoniana della teoria. Come nel contesto lagrangiano, la discussione si basa sulla costruzione di due speciali fibrati principali $\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1})$ e $\mathcal{H}^c(\mathcal{V}_{n+1})$ sullo spazio delle fasi $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ del sistema, detti rispettivamente il *fibrato hamiltoniano* ed il *fibrato co-hamiltoniano*.

In tale ambito, vengono esaminati alcuni aspetti classici della dinamica hamiltoniana, vista come studio delle *sezioni hamiltoniane* $h : \pi(\mathcal{V}_{n+1}) \to \mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1})$. In particolare, la costruzione è applicata allo studio del legame tra struttura simplettica del fibrato hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1})$ e struttura di Poisson dello spazio delle fasi $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$, alla rilettura geometrica delle equazioni di Hamilton, allo studio delle trasformazioni canoniche come sottogruppo del gruppo delle trasformazioni simplettiche su $\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1})$, ed alla interpretazione geometrica dell'equazione di Hamilton–Jacobi nel fibrato hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1})$.

Nuovamente, l'azione del gruppo di gauge in ambito hamiltoniano è discussa in dettaglio. È inoltre illustrato un approccio ai sistemi hamiltoniani vincolati su $\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1})$. Ancora, coerentemente con il quadro matematico sviluppato nel corso della discussione, viene proposta una interpretazione della trasformazione di Legendre inquadrata nell'ambito di un omomorfismo tra fibrati lagrangiani e fibrati hamiltoniani.

Per finire, viene proposto un ambiente matematico perticolarmente adatto ad una formulazione unificata della dinamica lagrangiana ed hamiltoniana per sistemi dipendenti dal tempo. A tal fine, si pone l'attenzione sul fibrato dei primi getti $j_1(\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1}), \mathfrak{R})$, associato alla fibrazione $\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1}) \rightarrow \mathfrak{R}$. Viene mostrato che quest'ultimo è fibrato sia sullo spazio delle velocità $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$ sia sullo spazio delle fasi $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$, ed è dotato di una 1-forma canonica Λ.

In tal modo, le dinamiche lagrangiane ed hamiltoniane possono essere rappresentate, in termini geometrici, da superfici di $j_1(\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1}), \mathfrak{R})$, caratterizzabili come immagini di opportune sezioni $\tilde{l}: j_1(\mathcal{V}_{n+1}) \rightarrow j_1(\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1}), \mathfrak{R})$ e $\tilde{h}: \pi(\mathcal{V}_{n+1}) \rightarrow j_1(\mathcal{H}(\mathcal{V}_{n+1}), \mathfrak{R})$, ed univocamente individuate dalla richiesta che i pull-back $\tilde{l}^*(\Lambda)$ e $\tilde{h}^*(\Lambda)$ si annullino identicamente. Il passaggio dalla rappresentazione lagrangiana a quella hamiltoniana (e viceversa) è pilotato da due distinte rappresentazioni della stessa 1-forma Λ. Queste rappresentazioni sono messe in relazione l'una con l'altra per mezzo di trasformazione di coordinate. L'intera costruzione si rifà alle idee originariamente introdotte da Tulczyjev per sistemi scleronomi, estendendole al nuovo quadro geometrico.

BIBLIOGRAFIA

[1] MASSA E. e PAGANI E., *A new look at Classical Mechanics of constrained systems,* Ann. Inst. Henry Poincaré, Physique Théorique, **66** (1997), 1-36.

[2] MASSA E., PAGANI E. e LORENZONI P., *On the gauge structure of Classical Mechanics,* Transport Theory and Statistical Physics, **29** (2000), 69-91.

[3] MASSA E. e VIGNOLO S., *A new geometrical framework for time-dependent Hamiltonian Mechanics* (2000), preprint.

[4] MORANDO P. e VIGNOLO S, *A geometric approach to constrained mechanical systems, symmetries and inverse problems,* J. Phys. A: Math. Gen., **31** (1998), 8233-8245.

[5] VIGNOLO S, *A new presymplectic geometrical framework for time-dependent Lagrangian systems: the constraint algorithm and the second-order differential equation problem,* J. Phys. A: Math. Gen., **33** (2000), 5117-5135.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova
e-mail: vignolo@dima.unige.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Enrico Massa, Università di Genova