Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Federico M. Vegni

Modelli di phase-field conservati con memoria nello spazio delle storie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 555–558.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_555_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 555-558

Modelli di phase-field conservati con memoria nello spazio delle storie.

FEDERICO M. VEGNI

Si studia un modello che descrive un materiale in transizione di fase, le cui equazioni costitutive tengono conto di effetti di memoria termica (sperimentalmente osservati nel comportamento di fluidi viscosi alle basse temperature). L'evoluzione termodinamica di tali materiali è assegnata dalla temperatura θ (relativa a quella cui avviene la transizione di fase) e dalla variabile di fase χ; si scrive $\theta^t(s) = \theta(t-s)$, $s \geqslant 0$, per indicare la storia passata della temperatura.

In un conduttore di calore isotropo, rigido, omogeneo che occupa un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cui viene fornito calore secondo la forzante non autonoma f. L'evoluzione dello stato termodinamico è descritta dall'equazione di bilancio

$$\partial_t e + \nabla \cdot \mathbf{q} = f$$

e dalle equazioni costitutive dell'energia interna relativa allo stato critico e e della quantità di calore $\mathbf{q}$

$$e(t) = \theta + \int_0^\infty a(\sigma)\, \theta^t(\sigma)\, d\sigma + \lambda(\chi(t))$$

$$q(t) = -k\nabla\theta(t) - \int_0^\infty b(\sigma)\, \nabla\theta^t(\sigma)\, d\sigma$$

dove $k \geqslant 0$ è la conducibilità istantanea e λ è una funzione regolare. L'evoluzione della temperatura è dunque retta dall'equazione integrodifferenziale

$$\partial_t \theta + \lambda'(\chi)\, \partial_t \chi + \theta - k\Delta\chi + \int_0^\infty a'(\sigma)\, \theta^t(\sigma)\, d\sigma - \int_0^\infty b(\sigma)\, \Delta\theta^t(\sigma)\, d\sigma = f$$

Rispetto alla primitiva temporale della temperatura questa equazione è parabolica se $k > 0$, oppure iperbolica nel caso $k = 0$. Il modello viene studiato in entrambi i casi.

L'evoluzione della fase è descritta da un'equazione tipo Cahn-Hilliard

$$\partial_t \chi - \Delta w = 0$$
$$w = -\Delta\chi + \chi^3 + \gamma'(\chi) - \lambda'(\chi)\, \theta$$

dove w è il cosiddetto potenziale chimico e $\chi^3 + \gamma'(\chi)$ è la derivata di un potenziale generalmente a doppio pozzo con γ funzione regolare.

Al sistema sono associate opportune condizioni iniziali ed al contorno, compatibili con la termodinamica. In particolare, una condizione di Neumann per il potenziale chimico rende il modello conservato nella media della fase.

La buona positura di un modello di transizione di fase conservato con effetti di memoria è stata studiata, p. es., in [2] (cfr. anche i relativi riferimenti), dove è analizzato anche il comportamento di lungo periodo di una singola soluzione. L'analisi proposta in questo lavoro differisce sostanzialmente da quella presentata in [2], dove la storia passata della temperatura viene inglobata nel termine forzante, vincolandosi così ad un preciso istante iniziale. Si vuole estendere lo studio fatto in [3] e [4] nel caso di un sistema di phase-field non conservato, dove l'evoluzione della fase è descritta dall'equazione

$$\partial_t \chi + w = 0$$

Si introduce come nuova variabile la storia passata integrata della temperatura

$$\eta^t(s) = \int_0^s \theta^t(y)\, dy$$

e si formula il problema nello spazio delle storie

$$\partial_t(\theta + \lambda(\chi)) + \theta - k\Delta\chi + \nu_0 \int_0^\infty \nu(\sigma)\, \eta(\sigma)\, d\sigma - \int_0^\infty \mu(\sigma)\, \Delta\eta(\sigma)\, d\sigma = f$$

$$\partial_t \chi - \Delta(-\Delta\chi + \chi^3 + \gamma'(\chi) - \lambda'(\chi)\, \theta) = 0$$

$$\partial_t \eta + \partial_s \eta = \theta$$

dove si è posto

$$\nu_0 \nu(s) = -a''(s)$$

$$\mu(s) = -b'(s)$$

Il coefficiente $\nu_0 = 1, -1$ distingue i due casi, considerati nel seguito e consistenti con la termodinamica, di nucleo di memoria dell'energia crescente, limitato, concavo oppure decrescente, convesso ed integrabile.

Dopo aver formulato il problema in ambito variazionale, se ne prova la buona positura con tecniche Faedo-Galerkin. La formulazione nello spazio delle storie permette di associare alla soluzione del problema un processo $U(t, \tau)$. Riferendosi, p. es., a [5], il concetto di semigruppo è generalizzato al caso non autonomo nella nozione di processo. Si dice *processo*, o *sistema dinamico*, la famiglia di operatori $U(t, \tau)$: $X \to X$, dove X è uno spazio metrico, che per ogni $t \geqslant \tau$ e per ogni $\tau \in$

$\mathbb{R}$ soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} U(t,\, t) &= \mathbb{I}_X \\ U(t,\, s)\, U(s,\, \tau) &= U(t,\, \tau) \qquad && t \geqslant s \geqslant \tau \\ U(t,\, \tau)\, z_0 &\in C([\tau,\, +\infty);\, X) && \forall z_0 \in X \\ U(t,\, \tau) &\in C(X;\, X) \end{aligned}$$

Si può rendere esplicita la dipendenza dal simbolo funzionale f dopo averlo opportunamente ambientato in uno spazio metrico $\mathcal{F}$.

Il sistema dinamico introdotto è un sistema dissipativo. Infatti, tramite stime dell'energia uniformi in t, si prova che la famiglia di processi $\{U_f(t,\, \tau),\, f \in \mathcal{F}\}$ possiede un *insieme uniformemente assorbente* B_0, ovvero che per ogni insieme limitato $\mathcal{B} \subset X$ esiste $t_{\mathcal{B}} \geqslant 0$ tale che per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ e $t \geqslant \tau + t_{\mathcal{B}}$

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} U_f(t,\, \tau)\, \mathcal{B} \subset B_0$$

A causa della conservatività del modello, per determinare B_0 occorre che lo spazio X in cui agisce il processo non sia lineare.

Nel caso in cui il problema sia parabolico, ovvero se $k > 0$, è possibile studiare il comportamento di lungo periodo del sistema dinamico provando che possiede un attrattore uniforme, ovvero un insieme contenuto nell'insieme assorbente sul quale le soluzioni convergono. $\mathcal{A} \subset X$ è un *insieme uniformemente attraente* per la famiglia di processi $\{U_f(t,\, \tau),\, f \in \mathcal{F}\}$ se per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ e ogni insieme limitato $\mathcal{B} \subset X$

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \delta_{\mathrm{H}}(U_f(t,\, \tau)\, \mathcal{B},\, \mathcal{A}) \right] = 0$$

dove $\delta_{\mathrm{H}}(\mathrm{A},\, \mathrm{B})$ è la semidistanza di Hausdorff tra i due insiemi A e B. Il chiuso $\mathcal{A}$ è un *attrattore uniforme* se è uniformemente attraente e contenuto nella chiusura di ogni insieme attraente. Per provare l'esistenza dell'attrattore uniforme si procede decomponendo la soluzione. Per la componente generata dalla parte lineare del sistema viene fornita una stima di decadimento, per le componenti generate dalla parte non lineare e da quella sulla quale agisce la forzante esterna si prova la limitatezza in spazi immersi, con immersione compatta, in X. L'esistenza di un insieme uniformemente attraente compatto è sufficiente a provare l'esitenza dell'attrattore uniforme, grazie ad un risultato di Chepyzhov-Vishik (cf. [1]).

Introdotta la *dimensione frattale* di un insieme $\mathcal{A} \subset X$ come

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} = \sup \left\{ d > 0 : \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^d\, n_{\mathcal{A}}(\varepsilon) = +\infty \right\}$$

dove $n_{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ è il minimo numero di bolle di raggio ε necessarie a ricoprire $\mathcal{A}$, si dimostra infine che l'attrattore uniforme del problema parabolico ha dimensione frattale finita.

BIBLIOGRAFIA

[1] Chepyzhov V. V. e Vishik M. I., *Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimensions,* J. Math. Pures Appl., **73** (1994), 279-333.
[2] Colli P., Gilardi G., Laurençot Ph. e Novick-Cohen A., *Uniqueness and long-time behavior for the conserved phase-field system with memory,* Discrete Contin. Dynam. Systems, **5** (1999), 375-390.
[3] Giorgi C., Grasselli M. e Pata V., *Uniform attractors for a phase-field model with memory and quadratic nonlinearity,* Indiana Univ. Math. J., **48** (1999), 1395-1445.
[4] Giorgi C., Grasselli M. e Pata V., *Well-posedness and longtime behavior of the phase-field model with memory in a history space setting,* Quart. Appl. Math. (to appear).
[5] Haraux A., *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications,* Masson, Paris (1991).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Brescia
e-mail: federico@ing.unibs.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Maurizio Grasselli
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano