Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Sandra Pieraccini

Metodi ibridi per equazioni non lineari non differenziabili di tipo «semismooth»

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 527–530.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_527_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 527-530

Metodi ibridi per equazioni non lineari non differenziabili di tipo «semismooth».

SANDRA PIERACCINI

In questo lavoro vengono proposti e studiati alcuni metodi numerici per la risoluzione di sistemi di equazioni nonlineari di tipo *nonsmooth*

$$H(x) = 0, \tag{1}$$

con $H : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^n$. Con tale termine si indicano sistemi di equazioni nonlineari definite da funzioni H che non sono differenziabili nel senso tradizionale di Fréchet o Gâteaux.

La soluzione numerica di equazioni nonsmooth ha attratto sempre maggiore attenzione negli anni recenti. Uno dei motivi che sta alla base di tale interesse è che le equazioni nonsmooth costituiscono uno strumento per lo studio unificato di molti problemi di ottimizzazione ed equilibrio. Inoltre, la riformulazione di tali problemi tramite sistemi di equazioni nonsmooth ha fornito spesso, nel passato, la base per la definizione di nuovi metodi per la loro risoluzione che sono risultati molto efficienti e tali da sopperire alla mancanza di robustezza di molti metodi precedenti.

Tra le importanti classi di problemi da cui hanno origine sistemi nonsmooth, menzioniamo i Problemi di Complementarità Nonlineare, le Disuguaglianze Variazionali e i problemi di Programmazione Nonlineare. I Problemi di Complementarità Nonlineare hanno un vastissimo interesse applicativo: infatti il concetto di complementarità è strettamente collegato a quello di equilibrio, che interviene nella formulazione di molti problemi sia nel campo dell'ingegneria che dell'economia. A titolo di esempio, Problemi di Complementarità Nonlineare e Disuguaglianze Variazionali possono nascere da problemi di contatto, da problemi di meccanica strutturale, dal problema dell'ostacolo, da problemi di traffico e da problemi di equilibrio in sistemi economici [2]. Negli anni '80 un notevole interesse è stato posto soprattutto nella definizione di opportune estensioni del metodo di Newton ad alcune classi particolari di equazioni nonsmooth, ad esempio equazioni definite da funzioni C^1 a tratti, equazioni localmente lipschitziane, equazioni B-differenziabili.

Recentemente l'attenzione di molti ricercatori si è focalizzata su sistemi di equazioni *semismooth*. Il concetto di semismoothness, introdotto da Mifflin per funzioni a valori reali ed esteso da L. Qi e J. Sun [5] al caso di funzioni $H : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^n$, è uno strumento molto importante per poter dimostrare la convergenza superlineare di metodi di tipo Newton generalizzato. Per equazioni semismooth L. Qi e J. Sun [5] e in seguito L. Qi [4] hanno definito metodi di tipo Newton generalizzati localmente e superlinearmente convergenti, basati sull'utilizzo del Jacobiano generalizzato secondo Clarke e del B-subdifferenziale di H.

Per allargare il dominio di convergenza di tali metodi e ottenere procedimenti a convergenza globale sono state in seguito proposte diverse tecniche, principalmente basate sulla minimizzazione di una opportuna funzione di merito. Molti di tali procedimenti sono stati studiati e sviluppati nel contesto della risoluzione di Problemi di Complementarità Nonlineare. Questi problemi possono essere riformulati in vari modi come sistemi di equazioni nonsmooth. Una di tali riformulazioni, la riformulazione di Fischer-Burmeister, è particolarmente utilizzata nella recente letteratura in quanto essa consente di ottenere un sistema di equazioni nonsmooth in cui la funzione di merito naturale associata, ovvero la funzione $\frac{1}{2}\|H(x)\|^2$, è di classe C^1. Sfruttando questa notevole proprietà alcuni autori hanno proposto opportuni metodi di Newton generalizzato di tipo damped a convergenza globale nei quali si fa uso del gradiente della funzione di merito (si veda, ad esempio, [1]). L'ipotesi di avere a disposizione una funzione di merito differenziabile facilita notevolmente l'analisi della convergenza dei metodi numerici per generici sistemi nonsmooth ed è stata in seguito utilizzata da altri autori. L'utilizzo di schemi alle differenze finite per sistemi nonsmooth è stato scarsamente studiato fino ad oggi, per quanto tale approccio sembri particolarmente interessante nel caso nonsmooth, dal momento che il calcolo effettivo di elementi del Jacobiano generalizzato può risultare non facile. In alcuni lavori vengono utilizzate approssimazioni alle differenze finite per elementi del Jacobiano generalizzato di una funzione H, ma per poter ottenere risultati di convergenza dei metodi iterativi proposti occorrono ipotesi molto restrittive sulla struttura di H, difficilmente soddisfatte da problemi che nascono dalle applicazioni.

In [3] F. Potra, L. Qi e D. Sun propongono un metodo iterativo localmente convergente con velocità superlineare che utilizza differenze finite ed è applicabile a una particolare classe di funzioni semismooth, ovvero a funzioni che risultano essere la composizione di una parte smooth e una semismooth. Molti sistemi nonsmooth originati da applicazioni pratiche (come i Problemi di Complementarità Nonlineare e le Disuguaglianze Variazionali) hanno effettivamente tale struttura. Alla base di tale metodo vi è l'idea di trattare separatamente la parte smooth e la parte semismooth. In questo lavoro, partendo dalla proposta di [3], si studiano nuovi metodi iterativi a convergenza globale per la stessa classe di sistemi semismooth. Si tratta di metodi ibridi, nei quali si usa un metodo di Ricerca Diretta applicato alla minimizzazione di una opportuna funzione di merito per spingere le iterate verso il dominio di attrazione di un metodo a convergenza locale almeno superlineare. Questo metodo locale può essere visto come una generalizzazione del metodo di [3].

Nella tesi viene inizialmente proposto un primo metodo ibrido, chiamato metodo MIB1. Lo schema è ottenuto dalla combinazione del metodo di tipo Newton generalizzato alle differenze finite, a cui si è associata una strategia di linesearch, e di un metodo di Ricerca Diretta per la minimizzazione non vincolata della funzione di merito naturale $\theta(x) = \frac{1}{2}\|H(x)\|^2$ associata al problema (1).

Il metodo MIB1 non coinvolge il calcolo di derivate della componente smooth di H e nella tesi viene mostrato come esso sia immediatamente applicabile a riformulazioni nonsmooth di Problemi di Complementarità Nonlineare e Disuguaglianze Variazionali. Lo studio teorico delle proprietà di convergenza del metodo mostra che, sotto ipotesi standard, MIB1 converge globalmente e la successione generata tende ad una soluzione di (1) con velocità di convergenza superlineare o quadratica.

Lo studio teorico è accompagnato dai risultati di alcuni esperimenti numerici, tesi a verificare l'efficienza e la robustezza del metodo. La sperimentazione è stata effettuata su un ampio insieme di problemi test tratti da Problemi di Complementarità e da Disuguaglianze Variazionali diffusamente utilizzati in letteratura.

Il metodo MIB1 è applicabile sotto l'ipotesi che la funzione di merito $\theta(x)$ sia differenziabile con continuità. Nella tesi viene quindi proposto un secondo schema ibrido (chiamato metodo MIB2) che nasce come una generalizzazione di MIB1. In esso vengono combinati gli stessi metodi già utilizzati per MIB1, ma utilizzando due funzioni di merito diverse: più precisamente, nel metodo di tipo Newton la linesearch è applicata ad una funzione di merito $\theta_1(x)$, mentre il metodo ausiliario di Ricerca Diretta minimizza una funzione di merito $\theta_2(x)$. La caratteristica importante è che, mentre è ancora richiesta la differenziabilità di $\theta_2(x)$, tale ipotesi non è necessaria per $\theta_1(x)$. Questo risulta particolarmente utile quando si vogliono risolvere Problemi di Complementarità o Disuguaglianze Variazionali. Infatti MIB2 è molto più flessibile di MIB1, in quanto permette di utilizzare riformulazioni che non possono essere impiegate con MIB1 e che possono risultare molto più convenienti dal punto di vista numerico. Aggiungendo alcune ipotesi tecniche che legano fra loro le due funzioni di merito, si sono ricavati per MIB2 risultati di convergenza analoghi a quelli ottenuti per il metodo precedente: sotto opportune ipotesi, anche questo metodo risulta essere globalmente convergente con velocità di convergenza superlineare o quadratica.

Anche per questo metodo viene riportata un'ampia sperimentazione numerica; essa dimostra che il metodo MIB2, pur avendo le stesse proprietà teoriche del primo metodo, risulta nella pratica più efficiente, per quanto concerne la soluzione di Problemi di Complementarità e Disuguaglianze Variazionali.

Molti problemi applicativi, come ad esempio alcune Disuguaglianze Variazionali che derivano dalla discretizzazione di problemi nel continuo, portano a sistemi con dimensione molto elevata in cui le matrici d'iterazione sono sparse. Questo ha suggerito l'utilizzo di metodi iterativi per la risoluzione dei sistemi lineari. Nella tesi viene quindi proposta anche una variante inesatta del metodo MIB2, in cui ad ogni iterazione i sistemi lineari sono risolti a meno di un residuo del tipo $\eta_k \|H(x_k)\|$, con $\eta_k \in [0, 1)$. Sotto opportune ipotesi sui termini forzanti η_k, si dimostra che vengono mantenute le proprietà di convergenza di MIB2.

Anche per il metodo inesatto vengono riportati risultati numerici con i quali se ne sono verificate sperimentalmente le proprietà. La sperimentazione è stata eseguita su problemi test di grande dimensione originati da Problemi di Complementarità e Disuguaglianze Variazionali.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. De Luca and F. Facchinei and C. Kanzow, *A Semismooth Equation Approach to the Solution of Nonlinear Complementarity Problems,* Mathematical Programming, **75** (1996), 407-439.

[2] M. C. Ferris and J.-S. Pang, *Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems,* SIAM Review, **39** (1997), 669-713.

[3] F. A. Potra and L. Qi and D. Sun, *Secant Methods for Semismooth Equations,* Numerische Mathematik, **80** (1998), 305-324.

[4] L. Qi, *Convergence Analysis of Some Algorithms For Solving Nonsmooth Equations,* Mathematics of Operations Research, **18** (1993), 227-244.

[5] L. Qi and J. Sun, *A Nonsmooth Version of Newton's Method,* Mathematical Programming, **58** (1993), 353-367.

Dipartimento di Matematica, Università di Milano
e-mail: pieraccini@ciro.de.unifi.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttori di ricerca: Proff. A. Pasquali e M. G. Gasparo, Università di Firenze