Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marco Mughetti

Ipoellitticità e buona posizione del problema di Cauchy per una classe di operatori ellittici degeneri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 511–514.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_511_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 511-514

Ipoellitticità e buona posizione del problema di Cauchy per una classe di operatori ellittici degeneri.

MARCO MUGHETTI

Nella tesi di dottorato si è studiata una classe di operatori differenziali lineari $P = p(x, D)$ del second'ordine di tipo «degenere», relativamente a due ordini di problemi:

a) Ipoellitticità in C^∞,

b) Buona posizione in C^∞ del problema di Cauchy.

L'idea guida è che ipoellitticità e buona posizione dipendano strettamente dalle proprietà spettrali di un opportuno «operatore test» P_ϱ, definito tramite lo sviluppo di Taylor del simbolo $p(x, \xi)$ nei punti ϱ della varietà caratteristica di P.

1. – Ipoellitticità per una classe di operatori pseudodifferenziali a caratteristiche doppie.

(1) Sia P un operatore pseudodifferenziale (propriamente supportato) di ordine m su un aperto Ω di $\mathbf{R}^n$ con simbolo totale $p(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} p_{m-j}(x, \xi)$. Il simbolo principale di P è $p_m(x, \xi)$ e il suo insieme caratteristico è dato da

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^* \Omega \backslash 0 \mid p_m(x, \xi) = 0\}.$$

Si dice che P è ipoellittico con perdita minimale $\delta \geq 0$ di regolarità se

$$\forall U \text{ aperto } \subset \Omega,\ \forall \mathrm{s} \in \mathbf{R} : \mathrm{Pu} \in \mathrm{H}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{U}) \Rightarrow \mathrm{u} \in \mathrm{H}^{\mathrm{s}+\mathrm{m}-\delta}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{U}).$$

Nel loro classico lavoro [B.G.H. [1]], Boutet-Grigis-Helffer considerano una classe di operatori pseudodifferenziali $P \in OPS^m(\Omega)$, il cui simbolo $p(x, \xi) \sim \sum p_{m-j}(x, \xi)$ «si annulla di ordine $k \geq 1$» su una sottovarietà conica chiusa Σ di $T^* \Omega \backslash 0$; precisamente, $p_{m-j}(x, \xi)$ si annulla almeno di ordine $k - 2j$ su Σ per $0 \leq j \leq k/2$, cioè (2),

$$|p_{m-j}(x, \xi)| \lesssim |\xi|^{m-j} dist_\Sigma(x, \xi)^{k-2j} \qquad \text{per } 0 \leq j \leq k/2,$$

(1) Le notazioni non spiegate sono standard e possono essere trovate nei volumi I e III di Hörmander [2].

(2) Date due funzioni non negative f, g definite su un aperto conico $\Gamma \subseteq T^\star R^n \backslash 0$, la notazione

$$f \lesssim g \qquad (o\ g \gtrsim f)$$

significa che per ogni sottocono $\Gamma' \subseteq \Gamma$ con base compatta e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una costante $C = C_{\Gamma'}, \varepsilon > 0$ tale che $f(x, \xi) \leq Cg(x, \xi)$, per ogni $(x, \xi) \in \Gamma'$, $|\xi| \geq \varepsilon$ (si scriverà $f \approx g$ quando $f \lesssim g$ e $g \lesssim f$).

dove $dist_\Sigma(x, \xi)$ indica la distanza di $(x, \xi/|\xi|)$ da Σ. Ci si domanda sotto quali condizioni P sia ipoellittico in Ω con perdita minimale di regolarità $k/2$. Nell'ipotesi che p_m sia trasversalmente ellittico, cioè

$$|\xi|^m dist_\Sigma(x, \xi)^k \lesssim |p_m(x, \xi)| \lesssim |\xi|^m dist_\Sigma(x, \xi)^k,$$

B. G. H. provano che l'ipoellitticità di P con perdita minimale $k/2$ è equivalente all'iniettività in L^2, per ogni $\varrho \in \Sigma$, di un certo «operatore test» P_ϱ, invariantemente definito a partire dallo sviluppo di Taylor in ϱ del simbolo di P. Nella mia tesi di dottorato si è modificato il calcolo sviluppato in [1], mostrando come esso possa essere convenientemente «adattato» a situazioni genuinamente anisotrope di cui l'operatore di Grushin è uno dei modelli più semplici

$$P = D_{x_1}^2 + x_1^{2h} D_{x_2}^2 + \lambda x_1^{h-1} D_{x_2} \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \quad (h \text{ intero} > 1, \lambda \in \mathbf{C}). \tag{1}$$

Tuttavia, a causa delle difficoltà incontrate, ci si è dovuti limitare a considerare una classe invariante di operatori pseudodifferenziali a caratteristiche doppie. Precisamente, si è supposto che Σ sia una sottovarietà simplettica data dall'intersezione trasversa di due sottovarietà coniche involutive Σ_1 e Σ_2 di codimensione ν in $T^*\Omega \backslash 0$.

DEFINIZIONE 1. – *Siano h un intero ≥ 1 e $m \in \mathbf{R}$. Un operatore pseudodifferenziale classico $P = p(x, D)$ con simbolo $p \sim \sum_{j \geq 0} p_{m-j}$ appartiene alla classe $OPN_h^{m,2}(\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2)$ se soddisfa le condizioni:*

(H1) $|p_m(x, \xi)| \lesssim |\xi|^m (dist_{\Sigma_1}^h(x, \xi) + dist_{\Sigma_2}(x, \xi))^2$,

(H2) $|p_{m-1}^s(x, \xi)| \lesssim |\xi|^{m-1}(dist_{\Sigma_1}^{h-1}(x, \xi) + dist_{\Sigma_2}(x, \xi))$ *(se* $h > 1$),

dove $p_{m-1}^s(x, \xi) = p_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi)$ *è il simbolo sottoprincipale di* P.

Si prova che $OPN_h^{m,2}(\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2)$ è una classe invariante per cambiamento canonico di coordinate, ossia per coniugazione con operatori integrali di Fourier. Inoltre, ad ogni operatore $P \in OPN_h^{m,2}(\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2)$ può essere associato in modo invariante una famiglia $\{P_\varrho\}_{\varrho \in \Sigma}$ di operatori differenziali in $\mathbf{R}^\nu$ a coefficienti polinomiali, che, nel seguito, saranno chiamati operatori localizzati (Cfr. Section 2.2 [4]). Si può così enunciare il seguente

TEOREMA 1. – *Sia $P \in OPN_h^{m,2}(\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2)$ il cui simbolo principale sia trasversalmente ellittico in senso anisotropo, cioè*

$$|p_m(x, \xi)| \gtrsim |\xi|^m (dist_{\Sigma_1}^h(x, \xi) + dist_{\Sigma_2}(x, \xi))^2.$$

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(I) *per ogni $\varrho \in \Sigma$, l'operatore localizzato P_ϱ è iniettivo in $L^2(\mathbf{R}^\nu)$;*

(II) *l'operatore P è ipoellittico con perdita minimale $2h/(h+1)$ di regolarità.*

2. – Buona posizione del problema di Cauchy per una classe di operatori lineari debolmente iperbolici.

Il secondo argomento affrontato nella tesi riguarda la buona posizione del problema Cauchy (p.C.) in C^∞ per una classe di operatori lineari iperbolici, il cui prototipo è il d'Alambertiano in $\mathbf{R}^{n+1}$ associato ad operatori di tipo Grushin (ν intero, $1 \leqslant \nu < n$)

$$-D_0^2 + \sum_{j=1}^{\nu} D_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j^{2h}\right) \sum_{k=\nu+1}^{n} D_k^2 + \text{termini d'ordine inferiore}.$$

Sia P un operatore differenziale iperbolico del second'ordine su un aperto $X \subset \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}_{x_0} \times \mathbf{R}^n_{x'}$ (posto $D = (D_0, D') = (D_0, D_1, \ldots, D_n)$)

$$P = -D_0^2 + 2A_1(x, D')\, D_0 + A_2(x, D'),$$

dove $A_j(x, D')$ è un operatore differenziale a coefficienti in $C^\infty(X)$ di ordine j con simbolo principale $a_j(x, \xi')$ ($j = 1, 2$). L'iperbolicità (debole) di P, nella direzione «tempo» x_0, significa che il polinomio

$$\xi_0 \mapsto p_2(x, \xi) = -\xi_0^2 + 2a_1(x, \xi')\, \xi_0 + a_2(x, \xi')$$

ha radici reali per ogni $(x, \xi') \in X \times \dot{\mathbf{R}}^n$ ($\dot{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n \setminus 0$) che sono date da

$$\xi_0 = a_1(x, \xi') \pm \sqrt{\Delta(x, \xi')}, \qquad \Delta(x, \xi') = a_1(x, \xi')^2 + a_2(x, \xi') \geqslant 0.$$

Il caso strettamente iperbolico, i.e. $\Delta(x, \xi') > 0$, è stato ampiamente studiato [Cfr., ad esempio, Hörmander [2] Vol. III]. Qui siamo interessati al caso in cui $\Delta(x, \xi')$ si annulli su una sottovarietà $\Sigma' \subset X \times \dot{\mathbf{R}}^n$; cioè, se definiamo

$$ch(P) = \{(x, \xi) \in T^*X \,|\, \xi' \neq 0,\ \xi_0 = a_1 \pm \sqrt{\Delta}\},$$

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*X \,|\, (x, \xi') \in \Sigma',\ \xi_0 = a_1(x, \xi')\},$$

ci interessa, precisamente, la situazione nella quale $\emptyset \neq \Sigma$ sia strettamente contenuto in $ch(P)$. Il caso in cui $\Delta(x, \xi')$ sia trasversalmente ellittico rispetto a Σ' è stato ampiamente trattato (Ivrii-Petkov, Ivrii, Hörmander, Nishitani, Melrose, Bove-Bernardi-Parenti) e sono ben note condizioni necessarie e/o sufficienti per la buona posizione in C^∞ del problema di Cauchy. Nella mia tesi si suppone che esistano due sottovarietà chiuse Σ_1', $\Sigma_2' \subseteq X \times \dot{\mathbf{R}}^n$, ' con intersezione trasversa $\Sigma' = \Sigma_1' \cap \Sigma_2'$, tali che

$$\Delta(x, \xi') \approx |\xi'|^2 (dist_{\Sigma_1'}(x, \xi')^h + dist_{\Sigma_2'}(x, \xi'))^2.$$

Pertanto, posto $\Sigma_1 = \{(x, \xi) \in T^*X \,|\, (x, \xi') \in \Sigma_1'\}$ e $\Sigma_2 = \{(x, \xi) \in T^*X \,|\, (x, \xi') \in \Sigma_2', \xi_0 = a_1(x, \xi')\}$, la sottovarietà dei punti caratteristici doppi di P è $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Si assumerà che Σ_1, Σ_2 siano sottovarietà involutive di codimensione ν, $\nu + 1$, rispettivamente, e che Σ' sia una sottovarietà simplettica di codimensione 2ν (con ν intero, $1 \leqslant \nu < n$). Inoltre si supporrà che il simbolo sottoprincipale $p_1^s(x, \xi)$ di P soddisfi la condizione di annullamento

$$se\ \ h > 1, \qquad |p_1^s(x, \xi)| \lesssim |\xi|(dist_{\Sigma_1}(x, \xi)^{h-1} + dist_{\Sigma_2}(x, \xi)).$$

Possiamo ora associare a P una famiglia $\{P_\varrho\}_{\varrho \in \Sigma}$ di operatori differenziali in $\mathbf{R}^\nu$, autoaggiunti e a coefficienti polinomiali. Nel seguito si assumerà che il simbolo principale dell'operatore «test» P_ϱ sia non negativo e globalmente ellittico in $T^*\mathbf{R}^\nu$ per ogni $\varrho \in \Sigma$ (Cfr. [5]). In particolare questo garantisce che lo spettro di P_ϱ è limitato inferiormente ed è composto di soli autovalori di molteplicità finita.

TEOREMA 2. – *Supponiamo che l'operatore P sopra descritto soddisfi le condizioni:*

1. $|Im\ p_1^s(x, \xi)| \lesssim |\xi|(dist_{\Sigma_1}(x, \xi)^h + dist_{\Sigma_2}(x, \xi))$,
2. *per ogni $\varrho \in \Sigma$, l'operatore test P_ϱ è positivo in $L^2(\mathbf{R}^\nu)$, cioè $(P_\varrho f, f) > 0$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$, $f \neq 0$.*

Allora il problema di Cauchy per P è ben posto in C^∞ in $X_r = \{x \in X | x_0 > r\}$ per ogni $r \in \mathbf{R}$.

Terminiano la sezione osservando che, quando $h = 1$, il risultato ottenuto si riduce al classico Teorema 4.3.2 di Hörmander [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BOUTET DE MONVEL - A. GRIGIS - B. HELFFER, *Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples*, Astérisque, **34-35** (1976), 93-121.
[2] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I-III, Springer-Verlag (1983/85).
[3] L. HÖRMANDER, *The Cauchy problem for differential equations with double characteristics*, J. d'Analyse Mathématique, **32** (1977), 118-196.
[4] M. MUGHETTI, *A problem of transversal anisotropic ellipticity*, Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, **CVI** (2001), 111-142.
[5] M. MUGHETTI, *Wellposedness of the Cauchy problem for a class of linear weakly hyperbolic operators*, preprint (2002).

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: mughetti@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Cesare Parenti, Università di Bologna