Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Edie Miglio

Modellistica matematica e numerica per applicazioni ambientali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 503–506.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_503_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 503-506

Modellistica matematica e numerica per applicazioni ambientali.

EDIE MIGLIO

1. – Introduzione.

In molti problemi applicativi è richiesto lo studio del movimento dell'acqua: in particolare lo studio delle correnti a superficie libera e dei moti di filtrazione all'interno di mezzi porosi.

Lo studio delle correnti a superficie libera consente di descrivere la dinamica di fiumi, laghi e mari. Questi problemi sono caratterizzati appunto dalla presenza di una superficie libera e da una scala verticale molto più piccola di quella orizzontale e vengono perciò detti *shallow water flows*. In questo contesto una ipotesi molto comune è la cosidetta approssimazione idrostatica, secondo la quale la componente verticale dell'equazione della quantità di moto viene ridotta ad una relazione statica in cui la derivata in z della pressione è bilanciata dall'accelerazione di gravità; questa ipotesi consente però di descrivere solo *onde lunghe* [3]. Molti modelli 1D e 2D basati su tale approssimazione sono presenti in letteratura e sono ampiamente usati nelle applicazioni. Tuttavia in alcune situazioni la necessità di una descrizione più accurata del campo di velocità 3D, la presenza di fenomeni dispersivi o di elevate accelerazioni verticali (dovute ad esempio a forti gradienti della batimetria) rendono necessario l'utilizzo di modelli più sofisticati. Un modello 3D idrostatico consente di descrivere campi di moto tridimensionali (anche se la la componente verticale della velocità non è sempre accurata) tuttavia non permette di descrivere fenomeni dispersivi e/o forti accelerazioni verticali ed in tal caso si deve ricorrere ad un modello in cui l'ipotesi idrostatica viene rimossa.

Il moto di filtrazione in un mezzo poroso viene comunemente descritto facendo ricorso alla legge di Darcy che lega la velocità del fluido al gradiente di un potenziale idraulico.

È importante notare che i moti delle acque superficiali e di quelle sottorranee sono fenomeni strettamente legati tra loro; si consideri ad esempio un fiume ed un acquifero ad esso adiacente: è possibile avere un passaggio di acqua dal fiume verso l'acquifero e viceversa. Le stesse considerazioni si applicano ad un inquinante eventualmente presente nel fiume.

Dal punto di vista applicativo l'accoppiamento tra fluidi superficiali e sotterranei, insieme ad un modello per la diffusione-trasporto-reazione di sostanze chimiche, potrebbe risultare di grande aiuto nella simulazione degli effetti di medio e lungo termine di agenti inquinanti.

2. – Modellistica matematica e discretizzazione numerica.

Come precedentemente accennato in alcuni casi l'ipotesi idrostatica si rivela inadeguata e quindi si rende necessaria l'adozione di un modello più sofisticato che sia in grado di rappresentare anche fenomeni dispersivi. A questo scopo potrebbero essere impiegate le equazioni di Navier-Stokes per un fluido a supeficie libera, tuttavia tale sistema dal punto vista computazionale risulta essere molto oneroso. Per questo motivo è stata impiegata una opportuna riscrittura del sistema originale che si rivela particolarmente utile dal punto di vista computazionale; essenzialmente la pressione viene vista come somma di due contributi, uno idrostatico (che è legato al gradiente dell'elevazione) ed una correzione non-idrostatica (q):

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right) + g\nabla\eta + \nabla q = \mathbf{0}, \\
&\frac{Dw}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_v \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \\
&\nabla\cdot\mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla\cdot\int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\,\mathrm{d}z = \widetilde{Q},
\end{aligned}
\right.
\tag{1}
$$

dove $\mathbf{u}$ e w sono rispettivamente le componenti orizzontale e verticale della velocità, ν_z è la viscosità verticale, η è lo spostamento verticale della superficie libera rispetto ad un livello di riferimento, g rappresenta l'accelerazione di gravità, h è una funzione (di x ed y) che descrive la batimetria ed infine $\widetilde{Q}$ tiene conto dell'eventuale presenza di sorgenti o pozzi.

Dal punto di vista teorico è stato analizzato un modello 3D idrostatico linearizzato e semi-discretizzato in tempo: per tale problema, utilizzando la teoria sviluppata per i problemi punto-sella è stato ottenuto un risultato di esistenza ed unicità della soluzione.

Per la discretizzazione numerica di (1) è stato sviluppato uno schema basato su un approccio multistrato che combina l'uso di elementi finiti misti non lagrangiani (Raviart-Thomas di ordine 0) per l'approssimazione nel piano (x, y) ed elementi finiti lineari conformi per la discretizzazione lungo la coordinata verticale; per quanto riguarda l'approssimazione dei termini convettivi è stato impegato un metodo di tipo Lagrange-Galerkin che consente di ottenere buone proprietà di stabilità. Per la risoluzione efficiente del problema non-idrostatico, sono stati impiegati metodi basati su fattorizzazioni algebriche LU inesatte della matrice del sistema. Si ottengono in questo modo schemi di tipo fractional step in cui il primo passo conduce alla risoluzione di un problema idrostatico mentre nel secondo viene calcolata la componente non-idrostatica della pressione [2].

Il metodo numerico è stato validato sia su casi test che su casi di reale interesse applicativo, dimostrando buone proprietà di accuratezza e tempi di calcolo contenuti.

Il problema del moto del fluido nel mezzo poroso è stato affrontato utilizzando l'equazione di Darcy che accoppiata all'equazione di continuità consente di ottenere la seguente equazione nella sola incognita Φ detta *carico piezometrico*:

$$S_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\underline{\underline{K}} \nabla \Phi), \tag{2}$$

dove S_0 e $\underline{\underline{K}}$ sono proprietà del mezzo poroso, rispettivamente dette storatività e conducibilità idraulica.

Per la risoluzione numerica di (2) è stato sviluppato un solutore basato sull'uso di elementi finiti misti su prismi: in tale contesto è stata estesa al caso dei prismi una formula di quadratura per la diagonalizzazione della matrice di massa originariamente introdotta da Baranger *et al.* per triangoli e tetraedri.

3. – Accoppiamento tra fluidi superficiali e sotterranei.

Come visto nella precedente sezione, il moto di un fluido a superficie libera ed il moto di filtrazione di un fluido in un mezzo poroso sono governati da equazioni differenziali a derivate parziali di tipo diverso, quindi il problema accoppiato considerato è di tipo eterogeneo. L'aspetto cruciale, sia dal punto di vista matematico che fisico, in questo tipo di accoppiamento è l'individuazione di opportune condizioni di interfaccia tra i due problemi.

Nel 1967 Beavers and Joseph [1], sulla base di alcuni esperimenti, hanno supposto che le velocità all'interfaccia tra il dominio fluido e quello poroso potessero essere legate da una relazione che prevede una discontinuità nella componente tangenziale della velocità stessa.

Sulla base di questa idea nella tesi è stato proposto il seguente set di condizioni di interfaccia

$$\begin{cases} \mathbf{V}_f \cdot \mathbf{n}_f = -\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{n}_p \\ \nu_v \dfrac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial z} = \dfrac{\nu_v \alpha_{BJ} \sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{tr} \underline{\underline{K}}}} (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \\ \varrho_f g \Phi = p_f, \end{cases} \tag{3}$$

dove i pedici f e p denotano rispettivamente quantità relative al dominio fluido ed al mezzo poroso. Inoltre $\mathbf{u}_f$ e $\mathbf{u}_p$ sono le componenti orizzontali delle velocità mentre $\mathbf{V}_f$ e $\mathbf{V}_p$ sono i vettori velocità 3D completi; infine p_f è la pressione esercitata dal fluido sul fondo e $\mathbf{n}_f$ e $\mathbf{n}_p$ sono le normali unitarie all'interfaccia rispettivamente nel dominio fluido e nel mezzo poroso. Il parametro α_{BJ} è un coefficiente empirico adimensionale che dipende dalle proprietà del mezzo poroso.

Per disaccoppiare il calcolo delle variabili fisiche nel dominio fluido e nel mezzo poroso è stato adottato uno schema iterativo ispirato al metodo di Dirichlet-Neumann utilizzato nell'ambito della domain-decomposition. In tale ottica le condizioni 3 sono state impegate nel seguente modo: (3_1) e (3_2) vengono assegnate al fluido a superficie libera mentre (3_3) viene impiegata come condizione di Dirichlet per il mezzo poroso.

Alcuni test numerici, effettuati su problemi modello, hanno dimostrato l'efficacia del set di condizioni di intefaccia utilizzate e la convergenza del metodo iterativo proposto [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] Beavers G.S. e Joseph D.D., *Boundary conditions at a naturally permeable wall*, J. Fluid Mech., **30** (1967), 197-207.

[2] Causin P., Miglio E. e Saleri F., *Algebraic factorizations for non-hydrostatic 3D free surface flows*, Quaderno del Dipartimento di Matematica «F. Brioschi», Politecnico di Milano, n.422/P, accettato per la pubblicazione su *Computer and Visualization in Science* (2000).

[3] Landau L. D. e Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, New York (1987).

[4] Miglio E., Quarteroni A. e Saleri F., *Coupling of free surface and groundwater flows*, Quaderno del Dipartimento di Matematica «F. Enriques», Universitá degli Studi di Milano, n.10, accettato per la pubblicazione su *Computer & Fluids* (2001).

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
e-mail: edie@mate.polimi.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. A. Quarteroni, Politecnico di Milano / EPFL Losanna
Correlatore: Prof. F. Saleri, Politecnico di Milano