

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

RAFFAELLA GUGLIELMANN

## Una metodologia per l'identificazione di sistemi dinamici non lineari

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 4-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 467–470.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2001\\_8\\_4A\\_3\\_467\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_467_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Una metodologia per l'identificazione di sistemi dinamici non lineari.

RAFFAELLA GUGLIELMANN

### 1. – Motivazioni ed obiettivo.

Il tema affrontato nella tesi riguarda l'identificazione di sistemi dinamici non lineari. L'approccio alla risoluzione di tale problema può essere *strutturale* o di tipo *input-output*. Nel primo caso si utilizza la conoscenza circa le leggi fisiche che governano la dinamica del sistema in esame per scrivere un sistema di ODE:

$$(1) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

dove  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$  rappresenta il vettore delle variabili di stato e  $\mathbf{F}$ , che dipende da un insieme di parametri i cui valori vanno stimati sulla base dei dati sperimentali, è un vettore di funzioni che descrivono i legami fisici tra le grandezze di interesse; la soluzione (esatta o numerica) di (1) approssima la dinamica reale del sistema in esame. In molti contesti applicativi però la conoscenza strutturale disponibile non consente di definire opportunamente le non linearità contenute in  $\mathbf{F}$ ; eventuali ipotesi di linearità introdotte per formulare il modello potrebbero peraltro rivelarsi troppo restrittive e quindi non adatte a descrivere la dinamica del sistema. Inoltre, anche qualora sia disponibile un modello differenziale, la stima dei valori dei parametri può essere resa problematica dalla scarsità e/o dalla bassa qualità dei dati. Una soluzione alternativa alla modellizzazione differenziale è rappresentata dai cosiddetti schemi input-output, che descrivono il sistema in termini di relazioni funzionali  $\mathbf{f} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  tra le variabili di input e quelle di output (variabili osservabili); tali relazioni<sup>(1)</sup> vengono ricostruite sulla base dei soli dati sperimentali mediante schemi di approssimazione quali reti neurali, sistemi a logica fuzzy, wavelets, splines. Occorre sottolineare che (i) l'approssimatore fornito da questi schemi non contiene nessuna informazione sulla struttura del sistema, (ii) la definizione della struttura ottimale di  $\mathbf{f}$  può risultare computazionalmente molto onerosa, (iii) una notevole quantità di dati sperimentali è necessaria per stimare i parametri.

Il lavoro di tesi si propone di superare i limiti dei due approcci descritti definendo una metodologia ibrida, chiamata FS-QM [2, 3], che consente di formulare un modello *input-output* che includa tutta la conoscenza strutturale disponibile, sebbene incompleta. L'idea di base è quella di integrare i *sistemi a logica fuzzy* [5] e i *modelli qualitativi* [4] con un duplice obiettivo: migliorare l'efficienza dei

<sup>(1)</sup> Nel seguito ci si riferirà a sistemi multiple-input single-output (MISO) per i quali cioè  $m = 1$ .

primi e sfruttare tutta la conoscenza strutturale disponibile. I sistemi fuzzy sono ampiamente utilizzati in molti contesti applicativi poichè consentono di esprimere mediante regole linguistiche, le *regole fuzzy*, la conoscenza a priori e, sotto opportune ipotesi, soddisfano le condizioni di applicabilità del teorema di approssimazione universale [5]. L'approccio qualitativo consente di sfruttare tutta la conoscenza strutturale disponibile, anche se incompleta, al fine di formulare un modello strutturale in termini di equazioni differenziali qualitative (EDQ) [4]. Un'EDQ è di fatto un'astrazione di un'equazione differenziale ordinaria in cui (i) i valori della variabili vengono descritti mediante cosiddetti *valori soglia* o *landmark*, (ii) le relazioni funzionali in  $\mathbf{F}$  sono rappresentate in termini di regioni di monotonicità.

Per quanto riguarda gli aspetti applicativi, l'interesse è rivolto alla Medicina ed in particolare ai seguenti sistemi metabolici: 1) il sistema glucosio-insulina in soggetti affetti da diabete mellito insulino-dipendente, 2) la cinetica della tiamina (vitamina  $B_1$ ) nelle cellule del tessuto intestinale. Entrambe i sistemi considerati presentano notevoli difficoltà di modellizzazione: sia l'approccio strutturale che quello input-output si sono rivelati inadeguati [1, 2, 3].

## 2. - Il metodo.

FS-QM costruisce un approssimatore input-output di tipo MISO caratterizzato dalla seguente espressione:

$$(2) \quad f(\underline{x}, \underline{\theta}) = \sum_{j=1}^M \hat{y}_j \frac{\prod_{i=1}^n \mu_i^j(x_i)}{\sum_{j=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_i^j(x_i)},$$

dove  $M$  è il numero di regole fuzzy,  $\mu_i^j(x_i)$  indicano la funzioni di appartenenza (FA) che definiscono gli *insiemi fuzzy* <sup>(2)</sup> associati alla variabile di input  $x_i$  e  $\underline{\theta}$  è il vettore dei parametri, ovvero  $\hat{y}_j$  e i parametri relativi alle FA  $\mu_i^j(x_i)$ . In accordo con gli schemi *autoregressivi* in cui il vettore  $\underline{x}$  comprende anche la variabile di output, la dinamica del sistema viene così approssimata:

$$y_{k+1} = f(\underline{x}_k, \underline{\theta}) + \varepsilon_{k+1} \quad k = 1, \dots, N-1$$

dove  $\underline{x}_k$  indica i dati relativi alle variabili di input all'istante di tempo discreto  $k$ ,  $y_{k+1}$  e  $\varepsilon_{k+1}$  sono rispettivamente il valore osservato dell'output e l'errore di misura all'istante  $k+1$ ,  $N$  è il numero di dati sperimentali.

L'espressione (2) è ottenuta applicando opportuni operatori basati sui principi della logica fuzzy [5], fra i quali il *motore inferenziale fuzzy* che consente di interpretare matematicamente regole fuzzy del tipo:

$$\text{IF } x_1 \text{ IS } \mathcal{F}_1 \text{ AND } \dots \text{ AND } x_n \text{ IS } \mathcal{F}_n \text{ THEN } y \text{ IS } \mathcal{F}_y$$

<sup>(2)</sup> Un *insieme fuzzy*  $\mathcal{F}$  in  $\mathfrak{R}$  è definito dalla funzione di appartenenza  $\mu_{\mathcal{F}}: \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$ ;  $\forall \xi \in \mathfrak{R}$ ,  $\mu_{\mathcal{F}}(x)$  indica il grado di appartenenza di  $x$  all'insieme  $\mathcal{F}$ . Nella tesi si è scelto  $\mu_{\mathcal{F}}(x) = e^{-\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)^2}$ .

dove  $\mathcal{F}_i$  e  $\mathcal{F}_y$  indicano gli insiemi fuzzy associati rispettivamente alle variabili di input e di output. La costruzione di una base di regole non ridondante ed allo stesso tempo in grado di esprimere la dinamica del sistema fisico è uno dei problemi cruciali in questo ambito. Poichè l'esperto raramente riesce a fornire un insieme significativo di regole, generalmente queste vengono costruite dai dati; questa procedura si rivela spesso inefficiente e poco robusta. Il metodo proposto costruisce automaticamente le regole dalla conoscenza a priori disponibile e più precisamente dai comportamenti qualitativi del sistema fisico generati dalla simulazione di EDQ scritte nel linguaggio di QSIM [4]. In QSIM a ciascuna variabile è associato un insieme finito e totalmente ordinato di valori soglia, o *landmark*,  $\{l_j\}_{j=1, \dots, s}$ : ciascun landmark rappresenta un valore reale non noto con precisione in corrispondenza del quale la variabile  $v$  subisce dei cambiamenti di stato significativi. Tali valori simbolici consentono di definire il *valore qualitativo*,  $qv(v(t))$ , che può essere un landmark o un intervallo fra landmarks  $(l_j, l_{j+1})$ . L'insieme dei valori qualitativi di tutte le variabili e del segno della loro derivata all'istante  $t$  definisce lo *stato qualitativo*  $QS(t)$  del sistema. L'algoritmo di simulazione qualitativa genera a partire da uno stato iniziale  $QS(t_0)$  tutte le possibili successioni di stati qualitativi consistenti con le equazioni: ciascuna di queste successioni definisce un *comportamento qualitativo*. Tali comportamenti vengono tradotti in un insieme di regole fuzzy; l'algoritmo di estrazione delle regole da un comportamento qualitativo  $\mathcal{B}$  segue il seguente schema:

1. sia  $Q_{L_v} = l_1 \cup \{(l_k, l_{k+1}), l_{k+1}\}_{k=1, \dots, s-1}$ : in corrispondenza a ciascun elemento di  $Q_{L_v}$  viene definito un insieme fuzzy  $\mathcal{F}_v^k$  e si ottiene così l'insieme  $Q_{F_v} = \{\mathcal{F}_v^k\}_{k=1, \dots, 2s-1}$ .  $Q_{L_v}$  e  $Q_{F_v}$  forniscono entrambe una rappresentazione qualitativa dei valori in  $\mathfrak{R}$  assunti da  $v$ ;
2.  $\forall QS(t), QS(t+1) \in \mathcal{B}$  si considerano  $qv(x_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $qv(y(t+1))$ ;
3. in virtù della corrispondenza definita al punto 1, si considerano gli insiemi fuzzy  $\mathcal{F}_i^{k_i} \in Q_{F_{x_i}}$  e  $\mathcal{F}_y^k \in Q_{F_y}$  corrispondenti a  $qv(x_i(t))$  e  $qv(y(t+1))$ , dove  $k_i = 1, 2, \dots, |Q_{F_{x_i}}|$ ,  $k = 1, 2, \dots, |Q_{F_y}|$ ;
4. si costruisce la regola linguistica:

$$\text{IF } x_1 \text{ IS } \mathcal{F}_1^{k_1} \text{ AND } \dots \text{ AND } x_n \text{ IS } \mathcal{F}_n^{k_n} \text{ THEN } y \text{ IS } \mathcal{F}_y^k$$

che traduce la transizione dallo stato  $QS(t)$  a  $QS(t+1)$ .

Il vettore  $\underline{\theta}$  è anch'esso inizializzato sulla base della conoscenza a priori, seppure parziale, circa i landmarks: il sistema fuzzy così costruito include tutta l'informazione strutturale disponibile. L'identificazione del modello fuzzy termina con la procedura di stima dei valori dei parametri. Sperimentalmente si osserva che, grazie alla buona inizializzazione di  $f$ , la procedura di stima, che utilizza un algoritmo di tipo back-propagation [5], converge ad un vettore  $\underline{\hat{\theta}}$  che rende robusto l'approssimatore  $f(\underline{x}, \underline{\hat{\theta}})$ .

I maggiori problemi affrontati nella definizione e nell'applicazione del metodo hanno riguardato principalmente:

– l'algoritmo di simulazione qualitativa, che può generare comportamenti spuri [4]; si è dovuto procedere ad un filtraggio dei comportamenti, che comunque non garantisce la completa eliminazione degli spuri. Nella tesi si dimostra che,

TABELLA 1. – Th, ThPP e ThMP sono le tre forme di tiamina le cui dinamiche sono approssimate da altrettanti sistemi fuzzy. L'errore è calcolato come MSE.

	Cicli di BP		Errore di Identificazione		Errore di Validazione	
	FS-QM	FS-DD	FS-QM	FS-DD	FS-QM	FS-DD
Th	64	9	$9.862 \times 10^{-5}$	$2.6 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-3}$	$1.54 \times 10^{-2}$
ThPP	32	633	$9.376 \times 10^{-5}$	$3.89 \times 10^{-3}$	$2.9 \times 10^{-3}$	$1.56 \times 10^{-2}$
ThMP	32	104	$7.472 \times 10^{-5}$	$2.45 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-3}$	$3.70 \times 10^{-3}$

nell'ipotesi  $S \ll M$ , dove  $S$  è il numero di regole generate solo da comportamenti spuri, l'influenza di tali regole sulla capacità di approssimazione di  $f$  risulta trascurabile rispetto a quella delle regole «buone».

– Filtraggio delle regole sulla base di principi di equivalenza.

– Analisi di diversi algoritmi di ottimizzazione per la stima dei parametri (minimi quadrati lineari, integrazione di back-propagation e minimi quadrati lineari).

*Risultati sperimentali:* per dare un'idea della maggiore efficienza e maggiore robustezza di FS-QM rispetto ai metodi tradizionali, si riportano in Tabella 1 alcuni dei risultati ottenuti applicando al secondo sistema metabolico studiato FS-QM e un metodo che costruisce i sistemi fuzzy a partire dai soli dati (FS-DD). Si noti che con l'approccio FS-DD la procedura di stima dei parametri non converge al valore soglia desiderato ( $10^{-4}$ ) per l'errore di identificazione e questo rende gli approssimatori non robusti (si osservino gli errori di validazione).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BELLAZZI R., IRONI L., GUGLIELMANN R. and M. STEFANELLI, *Qualitative models and fuzzy systems: an integrated approach for learning from data*, Artificial Intelligence in Medicine, **14** (1998), 5-28.
- [2] BELLAZZI R., GUGLIELMANN R. and IRONI L., *How to improve Fuzzy-Neural system modeling by means of qualitative simulation*, IEEE Transactions on Neural Networks, **11** (2000), 249-253.
- [3] BELLAZZI R., GUGLIELMANN R., IRONI L. and C. PATRINI, *A hybrid input-output approach to model metabolic systems: an application to intracellular thiamine kinetics*, Journal of Biomedical Informatics (to appear).
- [4] KUIPERS B. J., *Qualitative Reasoning: modeling and simulation with incomplete knowledge*, MIT Press, Cambridge MA (1994).
- [5] WANG L. X., *Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis*, Englewood Cliff, NJ:Prentice-Hall, (1994).

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia  
e-mail: raffy@ian.pv.cnr.it

Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa  
(sede amministrativa: Università degli Studi di Milano) - Ciclo XII

Direttore di ricerca: Dott.ssa Liliana Ironi, Istituto di Analisi Numerica (CNR), Pavia