Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Bracci Filippo

Punti fissi di mappe olomorfe

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 407–410.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_407_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 407-410

Punti fissi di mappe olomorfe.

FILIPPO BRACCI

Un sistema dinamico discreto olomorfo è, in prima istanza, il dato di una varietà complessa M e di una mappa olomorfa $f: M \to M$. Molti fenomeni danno luogo in modo naturale a modelli di questo tipo: si pensi al metodo di Newton per la ricerca di radici di polinomi o al «modello logistico» in biologia. Capire il fenomeno oggetto di studio equivale spesso a conoscere il comportamento asintotico del modello, ovvero il comportamento al limite delle iterate di f. Questo è generalmente legato all'esistenza di punti fissi in M per f e alle loro caratteristiche.

Lo scopo di questo lavoro è di studiare sistemi dinamici discreti olomorfi in domini di $\mathbf{C}^n$ e più in generale su varietà complesse. In particolare lo studio è orientato verso (1) sistemi privi di punti fissi in domini limitati di $\mathbf{C}^n$, (2) sistemi olomorfi che commutano e (3) sistemi in cui il luogo di punti fissi è una sottovarietà compatta della varietà ambiente.

1. – Mappe olomorfe prive di punti fissi.

Sia D un dominio limitato di $\mathbf{C}^n$, $n \geq 1$, $f: D \to D$ una mappa olomorfa. La dinamica di f in assenza di punti fissi in D è controllata dalla geometria di D. Ad esempio, se D è un dominio strettamente convesso con bordo liscio, la successione delle iterate di f converge uniformemente sui compatti ad un unico punto sul bordo, si veda [1]. Tale punto è generalmente chiamato *punto di Wolff* di f. Utilizzando la *pseudo-distanza di Kobayashi* si definiscono degli assiomi, che chiamiamo *proprietà D, J* e *W*, che permettono di definire una classe di domini per cui vale un risultato analogo a quello richiamato per i domini strettamente convessi. In particolare si mostra che tale classe contiene i domini strettamente pseudoconvessi contrattili e i domini convessi di tipo finito. Le proprietà D e W sono analoghi multidimensionali del noto *teorema di Denjoy-Wolff* per il disco unitario di $\mathbf{C}$. La proprietà J risulta essere un analogo del *Lemma di Julia* in dimensione 1.

Nel caso della palla $B := \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\| < 1\}$ si studia il comportamento della mappa olomorfa $f: B \to B$ senza punti fissi in B, vicino al suo punto di Wolff, $\tau \in \partial B$. Si mette in relazione il comportamento del differenziale della f in τ — definito tramite limiti radiali — con la dilatazione di f sulle orosfere per la metrica di Kobayashi in B. In particolare si ricava che il *coefficiente di dilatazione* di f in τ è un autovalore per df_τ e si definiscono due spazi vettoriali, *lo spazio interno e lo spazio interno generalizzato*, che risultano essere intrinsecamente legati a f e che determinano il comportamento di f intorno a τ. Utilizzando tali strumenti si arriva ad una classificazione delle mappe lineari fratte della palla B di $\mathbf{C}^n$ ($n > 1$) e si ottengono risultati sulle proprietà di iperciclicità e ciclicità degli operatori di composizione associati a tali mappe.

2. – Mappe olomorfe che commutano.

Sia M una varietà complessa e $f, g : M \to M$ olomorfe tali che $f \circ g = g \circ f$. È facile verificare che se $x \in M$ è un punto fisso per f allora $g(x)$ è ancora un punto fisso di f. In particolare se f fissa il solo punto x, allora x risulta essere necessariamente un punto fisso per g. Dunque in questa situazione f e g hanno, generalmente, la stessa dinamica vicino a x. Il problema è capire cosa accade nel caso in cui l'insieme dei punti fissi di f è vuoto o contiene più di un punto. Se $M = D$ è un dominio limitato strettamente convesso di $\mathbf{C}^n$, utilizzando la teoria sviluppata in [4], si riesce a provare il seguente risultato:

TEOREMA 1. – *Sia D un dominio limitato strettamente convesso di $\mathbf{C}^n$ con bordo liscio. Siano $f, g : D \to D$ olomorfe e tali che $f \circ g = g \circ f$.*

1. *Se gli insiemi dei punti fissi di f e di g in D sono non vuoti, allora la loro intersezione è non vuota.*
2. *Se l'insieme dei punti fissi di f in D è non vuoto, l'insieme dei punti fissi di g in D è vuoto e $\tau \in \partial D$ è il punto di Wolff di g, allora τ è un punto fisso per f e g nel senso dei limiti ammissibili.*

Nel caso in cui sia f che g non abbiano punti fissi nel dominio limitato D e quest'ultimo goda delle proprietà D, J e W di cui nella prima sezione, si riesce a provare che il punto di Wolff di f su ∂D è un punto fisso per limiti ammissibili sia per f che per g (e lo stesso per il punto di Wolff di g). Di fatto, nel caso di domini strettamente convessi, si prova che molto di più è vero. Diciamo che $\varphi : \Delta := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\} \to D$ olomorfa è una *geodetica complessa* se è una isometria tra la metrica di Poincaré di Δ e la metrica di Kobayashi di D. Se $f : D \to D$, diremo che una geodetica complessa $\varphi : \Delta \to D$ è invariante per f se $f(\varphi(\Delta)) \subseteq \varphi(\Delta)$. Con questa terminologia abbiamo

TEOREMA 2. – *Sia D un dominio limitato strettamente convesso di $\mathbf{C}^n$ con bordo liscio. Siano $f, g : D \to D$ olomorfe senza punti fissi in D e tali che $f \circ g = g \circ f$. Allora f e g hanno lo stesso punto di Wolff su ∂D a meno che esista una (unica a meno di riparametrizzazioni del disco) geodetica complessa $\varphi : \Delta \to D$ invariante per f e g e tale che $f_{|\varphi(\Delta)}$, $g_{|\varphi(\Delta)}$ siano due automorfismi iperbolici di $\varphi(\Delta)$.*

Questo teorema è dovuto a Behan [2] nel caso $D = \Delta$ il disco unitario di $\mathbf{C}$. Nel caso generale si utilizzano la *proprietà J* di D e alcune stime sull'azione di f sulla distanza di Kobayashi vicino al punto di Wolff di g per ricondurci al caso del disco.

Dato il precedente risultato, risulta naturale esaminare il problema di riconoscere una mappa olomorfa $f: \Delta \to \Delta$ all'interno del suo centralizzante in termini della sua dinamica. In altri termini ci si pone il problema di terminare quali condizioni di carattere analitico in un intorno del punto di Wolff di f assicurino che se $g: \Delta \to \Delta$ olomorfa è tale che $f \circ g = g \circ f$ allora $f \equiv g$. Il risultato che si ottiene è il seguente:

TEOREMA 3. – *Sia f: $\Delta \to \Delta$ olomorfa. Sia $\tau \in \overline{\Delta}$ il punto di Wolff di f. Allora esiste un numero naturale $N > 0$ (dove N è al più 3 se $\tau \in \partial\Delta$) tale che per ogni $g : \Delta \to \Delta$ olomorfa tale che $f \circ g = g \circ f$ si ha $f \equiv g$ se le prime N derivate di f e g sono uguali in τ.*

Aggiungiamo che, nel precedente teorema, se $\tau \in \Delta$, allora N è il primo numero naturale tale che $f^{(N)}(\tau) \neq 0$. Se $\tau \in \partial\Delta$ allora il numero delle derivate richieste — rispettivamente una, due o tre — come anche la regolarità da richiedere a f e g in τ — rispettivamente nessuna, di classe $3 + \varepsilon$ o di classe $5 + \varepsilon$ — dipende dalla dinamica di f.

3. – Mappe olomorfe con una curva di punti fissi.

Come ultimo oggetto del nostro studio consideriamo il caso di una varietà complessa M di dimensione due e di una mappa olomorfa $f: M \to M$ con la proprietà che l'insieme dei punti fissi di f in M è una curva S (possibilmente singolare) compatta, connessa, ridotta e globalmente irriducibile. Un tipico esempio di tale situazione si ottiene scoppiando il punto fisso di un germe di diffeomorfismo olomorfo tangente all'identità in tale punto. Fissiamo un punto $p \in S$. Nel lavoro definiamo un *numero di degenerazione* di f lungo S in p che sostanzialmente misura quanto sia fisso p in S rispetto ad una qualsiasi direzione trasversa a S in p. Tale numero risulta essere un invariante per biolomorfismi locali e può assumere solo i valori 0 o 1. Nel caso in cui il numero di degenerazione di f lungo S in p sia 1 diciamo che f è *non-degenere* su S in p. Per motivi legati alla coerenza degli ideali di S si riesce a provare che la degenerazione di f su S, che per come definito è un concetto puntuale, non dipende dal punto $p \in S$ scelto. Nel caso in cui f sia non degenere su S in p si definisce un indice, $\mathrm{Ind}(f, S, p)$, di f lungo S in p. Se $\{U, (x, y)\}$ sono coordinate locali in M tali che $p = (0, 0)$ e $S \cap U = \{(x, y): l(x, y) = 0\}$, tale indice è dato da

$$\mathrm{Ind}(f, S, p) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{l \circ f - l}{l(\tau \circ f - \tau)} d\tau$$

dove τ è un qualsiasi germe di funzione olomorfa in U tale che $d\tau_p \neq 0$ e $d\tau \wedge dl \neq 0$ in un intorno di p, e Γ è la classe di omologia dell'intersezione di S con una 3-sfera centrata in p di raggio sufficientemente piccolo. Tale indice risulta dipendere solo da f, da S e da p, ed è sempre diverso da zero tranne in al più un numero finito di punti di S. Si prova infine che la somma degli indici è un invariante topologico di S, ovvero

TEOREMA 4. – *Sia M una varietà bidimensionale complessa, $S \subsetneq M$ una curva compatta connessa ridotta e globalmente irriducibile. Sia $f: M \to M$ olomorfa tale che f fissi S punto per punto. Se f è non-degenere su S allora*

$$\sum_{p \in S} \mathrm{Ind}(f, S, p) = S \cdot S,$$

dove $S \cdot S$ indica il numero di autointersezione di S.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. ABATE, *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds*, Mediterranean Press, Rende, Cosenza (1989).
[2] D. H. BEHAN, *Commuting analytic functions without fixed points*, Trans. Amer. Math. Soc., **37** (1973), 114-120.
[3] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic complex spaces*, Springer (1998).
[4] L. LEMPERT, *La métrique de Kobayashi et la representation des domains sur la boule*, Bull. Soc. Math. Fr., **109** (1981), 427-474.
[5] T. SUWA, *Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2989-2997.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università degli Studi di Padova
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Graziano Gentili, Università di Firenze