Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Lidia Aceto

Il problema della stabilità per metodi numerici per ODEs

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 383–386.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_383_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 383-386

Il problema della stabilità per metodi numerici per ODEs.

LIDIA ACETO

1. – Introduzione.

Molti fenomeni reali possono essere descritti matematicamente mediante Equazioni Differenziali Ordinarie (ODEs). Siccome, però, solo in taluni casi è possibile ottenere una soluzione analitica di tali equazioni, l'introduzione di strumenti di calcolo sempre più potenti ha permesso di rivolgere l'interesse alla risoluzione di problemi numerici che approssimino opportunamente il problema continuo considerato. Poichè la precisione finita con cui lavora il calcolatore introduce errori di arrotondamento e non permette di lavorare con passi di integrazione eccessivamente piccoli, un modo adeguato per scegliere il metodo numerico consiste nel richiedere che la soluzione del problema discreto, generalmente espresso mediante equazioni alle differenze, abbia lo stesso comportamento qualitativo di quella del problema continuo. Ecco quindi che il concetto di stabilità assume un ruolo determinante ai fini della discretizzazione.

La tesi costituisce un lavoro relativo alla problematica della stabilità delle soluzioni di problemi discreti ottenuti applicando nuovi metodi numerici per ODEs. Sono, infatti, stati considerati i metodi noti come Boundary Value Methods (BVMs) [4], ottenuti utilizzando le classiche formule lineari multistep (LMF) a k passi:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} = 0$$

associate con condizioni al bordo. Il problema continuo a valori iniziali è dunque approssimato mediante un problema discreto a valori al contorno. Il motivo di tale scelta sta nel fatto che i problemi discreti a valori al contorno permettono di ottenere soluzioni più accurate di quelle ottenute per problemi a valori iniziali, in quanto essi non risentono delle limitazione di ordine dovute alle barriere di Dahlquist.

È stato studiato, da un punto di vista teorico, il problema della stabilità delle soluzioni di problemi discreti ottenuti approssimando problemi continui di tipo stiff mediante metodi appartenenti alla famiglia delle Generalized BDF (GBDF) [4]. Inoltre, è stato considerato il problema dell'approssimazione di problemi continui caratterizzati da soluzioni stabili, ma non asintoticamente stabili, di cui i problemi hamiltoniani possono essere considerati un paradigma. Siccome in lavori di Suris, Eirola e Sanz-Serna [5] (per citarne solo alcuni) è stato dimostrato che, nella classe delle LMF, non esistono metodi stabili adatti per approssimare i problemi hamiltoniani, sembrava che tali formule non potessero essere utilizzate. Un approccio più generale, ovvero l'utilizzo delle LMF come BVMs, ha però permesso di superare tale ostacolo.

2 – Contenuto della tesi.

Il lavoro è stato strutturato in due parti.
Nella prima parte (Capitolo 1 – 3) sono stati richiamati alcuni risultati che costituiscono un punto di partenza per la trattazione successiva.

Nel primo capitolo è stato introdotto il problema continuo a valori iniziali, di cui si vogliono studiare appropriate approssimazioni, ed alcune proprietà di stabilità. In particolare, si distinguono due casi: quello in cui esiste un punto di equilibrio asintoticamente stabile e quello in cui esso è solo stabile. La loro trattazione è, infatti, diversa. Nel primo caso si può considerare il processo di linearizzazione, mentre nel secondo bisogna ricorrere all'introduzione della funzione di Lyapunov.

Il secondo capitolo contiene i principali risultati relativi alle matrici di Toeplitz a banda. Queste ci consentono di ottenere un approccio più innovativo nella presentazione della teoria della stabilità. Infatti, potendo esprimere i problemi discreti in termini di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti presenta tale struttura, il problema della stabilità può essere riletto in termini di condizionamento della matrice stessa. È inoltre stata introdotta la matrice di Pascal di cui vengono presentate alcune proprietà e relazioni con altre matrici quali, ad esempio, quella di Vandermonde, Stirling, Frobenius, ecc. [3].

Nel terzo capitolo sono state introdotte le LMF utilizzate sia in modo classico, cioè come metodi a valori iniziali (IVMs), sia come BVMs. Sono stati riportati i principali risultati degli IVMs e la loro generalizzazione al caso dei BVMs. Questi sono tutti espressi in una forma più compatta che sfrutta la notazione matriciale.

Nella seconda parte (Capitolo 4 – 5) sono contenuti i risultati originali della tesi.

Nel quarto capitolo è stato studiato il problema della stabilità legato alle ODEs di tipo stiff. Siccome le BDF, i metodi maggiormente usati per discretizzare questo tipo di problema continuo, presentano il notevole svantaggio che le loro regioni di assoluta stabilità sono sufficientemente grandi solo per metodi di ordine basso, sono state ottenute teoricamente le curve (boundary loci) che delimitano le regioni di assoluta stabilità dei metodi appartenenti alla famiglia delle GBDF:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(j)} y_{n+i} - hf_{n+j} = 0, \quad j \in \{0, \ldots, k\}, \tag{1}$$

dove [1]

$$
(2) \qquad \alpha_i^{(j)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{i} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{k-i} \frac{1}{m} & \text{se } i = j \\[2ex] \displaystyle\frac{(-1)^{j-i}}{j-i} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{k}{j}} & \text{se } i \neq j. \end{cases}
$$

Le loro espressioni analitiche sono state ricavate a partire dai precedenti coefficienti, ottenuti come elementi delle colonne di una matrice definita in termini di matrice Pascal. Quindi, dalla posizione di tali curve nel piano complesso è stato possibile individuare all'interno di questa classe i metodi A-stabili. È stato così dimostrato il seguente risultato:

TEOREMA 1. – Per ogni ordine k esiste un unico valore di j, i.e.,

$$
j = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2} & k \quad \text{dispari} \\[2ex] \dfrac{k+2}{2} & k \quad \text{pari} \end{cases}
$$

tale che

- il boundary locus è una curva regolare di Jordan;
- la GBDF corrispondente è A-stabile (di ordine k).

Nel Capitolo 5 è stata affrontata la questione dell'individuazione di buone approssimazioni per problemi hamiltoniani lineari. Tale questione risulta essere assai delicata in quanto il problema continuo ha soluzione di equilibrio marginalmente stabile e quindi la linearizzazione non può essere applicata. La scelta del metodo numerico deve essere fatta in modo tale che il problema discreto non distrugga tale proprietà del problema continuo. La classe delle LMF usate come IVMs sembrava non essere adeguata ad approssimare tali problemi. Il solo metodo che, indipendentemente dal valore del passo di discretizzazione, realizza la stabilità marginale per tali problemi continui è il metodo dei trapezi. Tuttavia gli stessi metodi, usati come BVMs, danno origine ad infiniti problemi discreti le cui soluzioni mantengono, almeno in una successione di punti, importanti proprietà qualitative dei problemi hamiltoniani. È stato dimostrato che in questo caso gli schemi simmetrici quali le Extended Trapezoidal Rules (ETRs) e i Top Order Methods (TOMs), quando vengono usati come BVMs, permettono di conservare proprietà qualitative del problema continuo quali, ad esempio, la simpletticità della mappa e alcuni integrali primi tra cui l'energia. Tale risultato, ottenuto in [4] mediante l'approccio variazionale, è stato conseguito nella tesi imponendo che i metodi debbano soddisfare la cosiddetta «simmetria rispetto al tempo» della soluzione. Tale proprietà, sebbene sia una tautologia per la soluzione continua calcolata sui punti della griglia, in generale non è verificata da un metodo numerico. Considerando che

DEFINIZIONE 1. – Un BVMs è detto essere

- metodo isotropo se la sua soluzione è simmetrica rispetto al tempo;
- metodo conservativo se conserva le forme quadratiche in una successione di punti;

il risultato ottenuto può essere schematizzato come segue [2]:

$$\text{metodo isotropo} \quad \Leftrightarrow \quad \text{metodo conservativo} \quad \Leftrightarrow \quad \text{schema simmetrico}$$

Dunque, i metodi simmetrici risultano essere appropriati per approssimare questo tipo di problemi continui.

REFERENCES

[1] ACETO L. and TRIGIANTE D., *On the A-stable Methods in the GBDF class*, Journal of Nonlinear Analysis: Series B Real World Applications (in stampa).

[2] ACETO L. and TRIGIANTE D., *Symmetric Schemes, Time Reversal Symmetry and Conservative Methods for Hamiltonian Systems*, Journ. Comp. Appl. Math., **107** (1999), 257-274.

[3] ACETO L. and TRIGIANTE D., *The Matrices of Pascal and other Greats*, Amer. Math. Monthly, **108** (2001), 232-245.

[4] BRUGNANO L. and TRIGIANTE D., *Solving Differential Problems by Multistep Initial and Boundary Value Methods*, Gordon & Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998.

[5] EIROLA T. and SANZ-SERNA J. M., *Conservation of Integrals and Symplectic Structure in the Integration of Differential Equations by Multistep Methods*, Numer. Math., **61** (1992), 281-290.

Dipartimento di Energetica, Università di Firenze
Via C. Lombroso, 6/17 - 50134 Firenze
e-mail: aceto@ingfi1.ing.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Donato Trigiante, Università di Firenze