
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIUSEPPE CAGLIOTI

Strutture numeriche, autoorganizzazione e senso del bello

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 4-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2001), n.2, p. 209–245.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_2_209_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Strutture numeriche, autoorganizzazione e senso del bello ⁽¹⁾.

GIUSEPPE CAGLIOTI

La bellezza salverà il mondo
Feodr Dostoevskij

1. – Premessa.

L'obiettivo di questo articolo è offrire un contributo all'identificazione di criteri atti a consolidare un'interfaccia per quanto possibile coerente tra matematica e scienze umanistiche.

Non sono né un matematico né un umanista. Sono comunque consapevole del fatto che suggerire analogie, proporre correlazioni o metafore tra strutture, fenomeni o processi caratteristici di questi due campi della cultura comporta l'uso di parole o concetti i quali, trapiantati dal settore umanistico a quello scientifico o viceversa, finiscono spesso col generare sconcerto o addirittura con l'apparire incomprensibili.

«Nomina nuda tenemus», afferma Umberto Eco nell'ultimo «folio» del suo *Il nome della rosa*: gestiamo nomi spogli. E siamo gelosi di questa funzione, e attenti a che ciascuno la svolga in modo rigoroso, con pignoleria, nell'ambito specifico delle proprie competenze e, se del caso, del proprio raggruppamento disciplinare.

Affrontare questi problemi, pertanto, è rischioso.

Tuttavia quando, nel ricevere l'invito a scrivere questo articolo, mi si è offerta la possibilità di correre il rischio di sbagliare, ho accettato. Ho accettato senza esitazione perché ritengo che, a fine carriera,

⁽¹⁾ Parti di questo tema sono trattate dall'autore anche negli Atti, in corso di stampa, dell'Incontro di studio sulle *Componenti scientifiche dell'armonia e del bello* (Milano, 25 maggio 2001), organizzato dall'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere.

correre questo genere di rischi sia doveroso, e che comunque possa rivelarsi più gratificante che vagheggiare benefici improbabili.

Tra le affermazioni contenute in questo contributo, molte hanno carattere congetturale. Inoltre non ho esitato ad attribuire al concetto della simmetria un significato oggi condiviso dai fisici, ma diverso da quello tradizionale, familiare a molti matematici. Infine, non ho resistito alla tentazione di proporre un'ampia varietà di esempi tratti da situazioni eterogenee; spero che il lettore non si irriti se talvolta, per comprenderne la consequenzialità, si sarà sentito in dovere di fare uno sforzo che a posteriori potrà essergli apparso eccessivo o addirittura vano.

2. – Il senso del bello: un criterio per la sopravvivenza e uno stimolo alla creatività.

Da Platone ad oggi gli strumenti per la ricerca scientifica si sono radicalmente evoluti e sensibilmente affinati. Il campo delle conoscenze si è dilatato, si sono sviluppate nuove tecnologie. È cambiato il modo di lavorare e di comunicare. È cambiato il modo di studiare e d'interagire con il prossimo. La nostra visione del mondo si è ampliata in modo sconcertante. Con la mutazione socio-culturale costituita dalla rete subiamo rivolgimenti esistenziali — o contribuiamo in misura pulviscolare a promuoverli —.

Nonostante tutto questo, alcuni valori umani conservano inalterata la loro importanza. Quando tutto cambia, ancorarsi a ciò che nel cambiamento non muta è rassicurante. È quindi maturato il momento di una rivisitazione di tali valori. In questa sede discuteremo in chiave scientifico-razionale *il bello e il buono* — il *καλός καί ἀγαθός* dei filosofi Greci — [Caglioti e Tchouvilleva, 1995] (v. [1]), dando rilievo al senso del bello. Questa scelta sembra opportuna, per due motivi.

Primo. In ogni situazione critica nella quale occorra prendere una decisione, il senso del bello assume un ruolo nevralgico nell'orientare la scelta.

Consideriamo l'evoluzione darwiniana delle creature biologiche e l'evoluzione delle strutture cosiddette artificiali. Entrambe sono

scandite da tre momenti caratteristici: la *mutazione* (per le strutture biologiche) o (per le strutture cosiddette artificiali) l'*invenzione*, la *selezione* e la *diffusione*. Il momento nevralgico d'ogni processo evolutivo, il momento in cui un sistema decide se al suo interno una fluttuazione iniziale è destinata a regredire oppure ad amplificarsi per costituirsi quale nuova struttura, è il momento della selezione. Orbene, questo momento critico, a partire dal quale la fluttuazione vincente può essere qualificata come mutazione o invenzione, è controllato dal *senso del bello*.

Bello tende ad apparirci il frutto di processi evolutivi che si sviluppano in modo naturale. In natura ogni creatura, una volta concepita, si sviluppa in modo autonomo, senza che dietro le quinte qualche iperburocratico regista imponga ai miliardi di miliardi di miliardi di atomi che la costituiscono di trovarsi ciascuno in quella specifica posizione a quel preciso istante: basta osservare un pioppo o un cavallo al galoppo per persuadersi che, in natura, i processi evolutivi sono caratterizzati da quella forma di ordine dinamico che è l'*autoorganizzazione*. Nei paragrafi quattro e cinque torneremo su questo concetto la cui importanza, messa in luce negli anni Settanta da Hermann Haken [1984] (v. [2]) per le instabilità dinamiche di nonequilibrio delle strutture inorganiche, è stata poi indipendentemente riconosciuta da Stuart Kauffman [1995] (v. [4]) per le creature biologiche. Secondo Kauffman la *selezione* — il secondo dei tre sopra ricordati momenti dell'evoluzione darwiniana — non sarebbe da sola realizzabile, non basterebbe a garantire un contributo funzionale all'evoluzione stessa se non fosse indissolubilmente abbinata all'*autoorganizzazione* ⁽²⁾.

Bello può apparire un fiore impollinato alla cieca dal vento. Appare tuttavia più bello ancora un fiore la cui specie si conserva in quanto al fiore — proprio in virtù della sua bellezza — è consentito di entrare in simbiosi con l'insetto che lo impollina: proprio perché appa-

⁽²⁾ In una società complessa quale l'attuale, sempre più condizionata dall'automazione, in una società che proprio per autoorganizzarsi vede crescere il numero dei robot a un tasso superiore a quello della popolazione mondiale, sembra lecito estendere quest'affermazione anche all'evoluzione delle strutture sociali.

re bello all'insetto (e, guarda caso, anche a noi), il fiore è in grado di attirare l'insetto e di garantire quindi la sopravvivenza della specie cui esso appartiene. Parallelamente, nel mondo animale, l'obiettivo della sopravvivenza si persegue tramite elaborati rituali in base ai quali la femmina valuta l'idoneità neuromuscolare del potenziale partner in relazione alle prospettive di successo per la procreazione e la discendenza della specie. Un meccanismo di scelta del partner che presenti un pur modesto vantaggio selettivo tende a consolidarsi durante l'evoluzione della specie. Il senso del *bello* configura così in ogni caso un criterio che, con Cesare Marchetti [1993], potremmo qualificare quale criterio etico, di *bontà*, di sopravvivenza.

Ma, analogamente, il senso del *bello* configura un criterio estetico, di *verità*, di sopravvivenza dei prodotti — astratti o concreti — dell'ingegno dell'uomo: alludiamo alle idee, ai modelli fisici o alle formule matematiche, alle teorie filosofiche, alle strutture architettoniche o musicali, alle opere dell'arte visiva e della scultura. Cosicché viene fatto di ricordare, con Freeman Dyson, un'affermazione di Hermann Weyl:

“Nelle mie ricerche mi sforzai di unire il vero al bello; ma quando dovetti scegliere tra l'uno e l'altro, di solito, scelsi il bello” (fonte: S. Chandrasekhar [1990] v. [5]).

Il senso del bello costituisce dunque un criterio etico di sopravvivenza e un criterio estetico di verità. Strettamente legata al $\kappa\alpha\lambda\omicron\sigma$ και $\alpha\gamma\alpha\theta\omicron\sigma$, la triade: *bello, buono, vero* ha anch'essa superato il collaudo di millenni.

Un secondo motivo per cui proponiamo una riflessione sul valore estetico delle strutture deriva dal fatto che il senso del bello costituisce uno stimolo alla creatività.

Ad esempio, l'esigenza estetica di estendere anche ai fenomeni meccanici l'invarianza rispetto alle trasformazioni di H.A. Lorentz, verificata per i fenomeni elettromagnetici, impose ad Einstein “*lo sforzo di migliorare, con riguardo all'economia logica, i fondamenti della fisica quali si presentavano alla fine del secolo [l'Ottocento]*”. E costituì per Einstein uno stimolo a formulare la teoria

della relatività: «*tutte* le leggi naturali [non soltanto le leggi dell'elettromagnetismo, ma anche le leggi della meccanica] devono essere invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz» [fonte: E Bellone, 1988] (v. [6]). E ancora. Se un elemento manca all'appello nel sistema periodico di Mendeleev, la lacuna nella celebre tabella *deve* essere riempita. Prima o poi spunterà un Emilio Segré che, in collaborazione con C. Perrier, scopre l'elemento tecnezio. Ma la molla che induce il ricercatore a colmare una lacuna in una tabella o il filatelico a procurarsi il francobollo che completa la serie nel suo album è l'esigenza estetica di ricomporre una simmetria: è lo stesso impulso che ci induce a raddrizzare un quadro appeso a sghimbescio o ci indurrebbe a ricorrere a un parquettista se una tessera del nostro pavimento venisse per qualche motivo a mancare.

Analogamente, è il senso del bello che incoraggia P.A.M. Dirac ad assegnare un significato fisico alla radice negativa dell'energia nella sua equazione d'onda quantistico-relativistica dell'elettrone, e lo porta così a predire l'esistenza dell'elettrone positivo — la prima particella dell'antimateria —, un anno prima della scoperta dell'elettrone positivo stesso in camera di Wilson, da parte di C. D. Anderson.

Su un piano ancora più concreto il senso del bello agisce quale filtro selettivo nella progettazione di un manufatto o nella sopravvivenza di un prodotto tecnologico o industriale di serie. Non esistono, né resisterebbero a lungo allo scorrere del tempo, barche o bambole, elettrodomestici o automobili, mobili o immobili che non proponano ai nostri sensi un equilibrio armonico di forme.

3. – La simmetria e l'ordine all'origine del senso del bello.

Una volta riconosciuto il ruolo nevralgico del senso del bello nella sopravvivenza delle specie naturali, nei processi decisionali e nell'attività creativa dell'uomo, è spontaneo chiedersi: quali sono i meccanismi all'origine dell'emozione estetica e del senso del bello? In quale misura il senso del bello affonda le sue radici nella natura e nelle sue leggi?

Rispondere a questi quesiti è arduo. O addirittura impossibile, se osserviamo che ciò che appare a noi bello oggi non necessariamente

continuerà ad apparirci bello domani. Tuttavia sembra possibile identificare una condizione necessaria, ma non sufficiente, perché una struttura possa essere considerata bella [Caglioti e Tchouvilleva, 1995] (v. [1]).

Pensiamo a un oggetto (un fiore, un paesaggio, un quadro) o a un processo (il fuoco nel camino, l'infrangersi dell'onda del mare, l'arcobaleno, un tramonto, un miraggio). Questi si impongono in modo immediato alla nostra conoscenza sensibile stimolando il processo percettivo, e suscitando eventualmente emozioni.

A questa fase, relativamente rapida, segue — o è bene che segua — una fase meditativa più lenta, tesa a un giudizio sull'emozione provata e quindi, indirettamente, alla valutazione dell'oggetto o del processo all'origine dell'emozione stessa. Proprio perché il bello è alla base delle emozioni *gradevoli*, il criterio estetico è quello generalmente preferito per pervenire a tale giudizio e a tale valutazione.

Qual è dunque il perché del bello? Quali sono i fattori necessariamente presenti in ciò che può apparire gradevole?

Scriva Dante, nel Convivio (Tratt. 1, 5.5):

“Quella cosa dice l'uomo essere bella cui le parti debitamente si rispondono per che da la loro armonia risulta piacimento”.

Il bello, dunque, presuppone una *rispondenza* — diremmo oggi, un *ordine* o una *correlazione* — fra gli elementi di un sistema: una rispondenza che conferisce al sistema di questi elementi *armonia* — diremmo oggi, verosimilmente, una *simmetria* superstite (come osserva Denes Nagi, la parola simmetria, per motivi imperscrutabili, a partire dal tempo dei Greci è caduta in disuso per circa dodici secoli) —.

Ingredienti del bello sono dunque la simmetria e l'ordine: simmetria e ordine, combinandosi armonicamente in una struttura, stimolano in noi il senso del bello.

Ma attenzione. Ordine non è sinonimo di simmetria. È bene chiarire subito che cosa intendiamo per simmetria e per ordine.

Il concetto di simmetria (dal greco *συμμέτρον*, com-misurazione) ha acquisito, nel tempo, diverse accezioni. *Dalle armonie delle figure all'invarianza delle leggi* è il sottotitolo di un recente saggio di

Elena Castellani [2000] (v. [20]), i primi capitoli del quale sono appunto dedicati prevalentemente all'evoluzione del concetto di simmetria a partire dall'antichità. Nel seguito, prescindere da accezioni tradizionali quali l'*armonia* o la *com-misurazione* tra parti disposte in modo da configurare un equilibrio così completo da risultare im-mensurabile, e svilupperemo le nostre argomentazioni basandoci sulle definizioni di simmetria correntemente adottate nella fisica.

Pertanto, identifichiamo la *simmetria* con

l'invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni⁽³⁾ oppure con *l'indiscernibilità d'una trasformazione*, oppure, con parole più semplici, con il *non mutamento quale esito di un mutamento* [G. Caglioti, 1994, 1995, 1998].

Consideriamo ad esempio la fede nuziale. Essa possiede un asse di simmetria di rotazione. Ciò fa sì che comunque la si rigiri rimane sempre uguale. Ma è proprio in quanto presenta un asse di *simmetria* rotazionale, è proprio in quanto *non discerniamo il mutamento* prodotto dalla sua rotazione che la fede nuziale assurge a rassicurante simbolo d'*invarianza* dell'amore coniugale.

Per inciso, la definizione di simmetria ora proposta ha un che di paradossale: in che misura è possibile accorgersi che non ci si accorge di un cambiamento? Inoltre fino a qualche anno fa si dava per scontato che la simmetria è un concetto qualitativo: ma l'atto del discernere o l'impossibilità di discernere dipendono dalla sensibilità dell'occhio o dello strumento di osservazione. Sono attualmente in corso ricerche su questo importante aspetto del problema.

Quanto all'*ordine*, ignorando decine di accezioni correntemente attribuite a questo concetto, distinguiamo due tipi di *ordine*:

Un *ordine statico* inteso quale *la disposizione di ogni cosa nel posto che le compete secondo un criterio di armonia e in base a una certa regola*,

⁽³⁾ Oltre alla trasformazione *identità* (che cambia ogni parte della struttura con se stessa), alludiamo a trasformazioni quali le rotazioni attorno a un asse, l'inversione delle coordinate rispetto a un punto, le riflessioni rispetto a un piano, le traslazioni, Si tratta di trasformazioni le quali, proprio in quanto devono lasciare la struttura invariata, soddisfano alle condizioni di un *gruppo*.

ovvero la *regola alla base di detta disposizione*, ovvero anche la *correlazione generata riducendo la simmetria*. Per correlazione si intende che la presenza di un elemento strutturale in una certa posizione implica la presenza di un altro elemento strutturale in un'altra ben definita e al limite prevedibile posizione. Ad esempio in un gas quale l'aria — disordinato e al tempo stesso statisticamente simmetrico se considerato su scala atomica per tempi lunghi —, la presenza di una molecola di ossigeno in una certa posizione e a un certo istante non comporta né esclude la presenza di un'altra molecola di ossigeno o di una molecola di azoto in un'altra ben definita posizione nello stesso istante o in un istante successivo. Invece in un cristallo quale quello del diamante — ordinato e al tempo stesso dotato di simmetria traslazionale —, la presenza di un atomo di carbonio in un sito strutturale comporta che tutti gli altri atomi siano sempre reperibili ciascuno in un proprio, ben definito sito strutturale.

Un *ordine dinamico* inteso quale *la rimozione del disordine a seguito di una trasformazione strutturale autoorganizzantesi*. Alludiamo ad esempio alle transizioni di fase di equilibrio — l'acqua che solidifica passando dalla fase liquida, disordinata, alla fase solida, ordinata, del ghiaccio —. Alludiamo altresì alle instabilità dinamiche di sistemi in nonequilibrio, aperti a flussi di materia, di energia o di informazione — ad esempio il brodo che, tolto dal frigo e scaldato sul fornello, prima ancora di entrare in ebollizione si anima di moti convettivi, ovvero di moti d'insieme molto regolari: quello delle belle traiettorie disegnate e ridisegnate dalle particelle in sospensione nel brodo stesso è uno spettacolo, ancorché gratuito, da non perdere —.

Gli elementi di simmetria di una struttura costituiscono riferimenti permanenti, caratteristiche invarianti della struttura. Come tali essi contribuiscono a configurare quelle caratteristiche invarianti della struttura che sono le proprietà e il significato della struttura stessa.

Simmetria ovvero invarianza da un lato e ordine ovvero correlazione dall'altro lato sono, come si è detto, concetti in certa misura antitetici: in effetti, come vedremo tra poco, l'ordine scaturisce da una riduzione della simmetria e anche, in particolare nei sistemi dinamici complessi aperti a flussi di risorse esterne, da una riduzione locale del disordine.

Si diceva all'inizio che tende ad apparirci bello il frutto di processi evolutivi che si sviluppano in modo naturale. Orbene, è proprio al cospetto delle strutture naturali che ravvisiamo senza esitazione quella

integrazione armonica di correlazione o ordine e simmetria che secondo Dante costituisce l'essenza del bello. Torneremo tra un momento su questo punto. Ma fin d'ora basta ispirarsi all'aforisma di Leonardo:

In efetto luomo [...] sidjmostra essere cosa djvjna perche dove lanatura finjssce il produrre lesue spetie lomo qujvj comj[n]ca colle cose naturali affare collaiutorio dessa natura infinjte speti[e],

per riconoscere che, nel creare le sue spezie, l'uomo è portato per sua natura a sfruttare gli stessi meccanismi, le stesse leggi che regolano i processi naturali e, in particolare, i processi preposti alla evoluzione dell'uomo medesimo. Affinare la sensibilità, mantenere viva la curiosità, prestare sistematicamente attenzione al modo di operare della natura traendone ispirazione e spunti: questi sono gli accorgimenti per operare all'insegna del bello — coi vantaggi che ne possono derivare in relazione alla tranquillità dell'animo e alla soddisfazione personale — [G. Caglioti, 1995, 1998] (v. [9]).

Torniamo ora sul ruolo che la simmetria e l'ordine hanno nei processi e nelle *spetie* naturali.

Nell'ordinare una struttura a partire da una miriade di atomi sparsi, la natura obbedisce alle sue leggi, e in particolare ai grandi principi di conservazione (dell'energia, della quantità di moto, del momento della quantità di moto), i quali sono anche principi di simmetria⁽⁴⁾. Conseguentemente, essa *rompe la simmetria* sferica dei moduli atomici costitutivi: ma opera questa rottura solo parzialmente, curando che la struttura risultante presenti una *simmetria superstite*.

Pensiamo ad esempio alla molecola di idrogeno, ottenuta legando l'uno all'altro due atomi di idrogeno. Ognuno dei due atomi ha sim-

⁽⁴⁾ Un sistema quantistico è dotato di *simmetria assiale* se il suo stato non cambia — se non per un fattore di fase di modulo unitario — per effetto della rotazione attorno a un asse z . L'*invarianza* rotazionale di detto sistema comporta la *conservazione* della variabile coniugata in senso hamiltoniano a tale rotazione, ovvero del valore della componente z del momento della quantità di moto del sistema stesso: tale componente, per il sistema, costituisce una *costante del moto*. Analogamente, per un sistema dotato di simmetria traslazionale si conserva la quantità di moto e per un sistema in-differente al fluire del tempo si conserva l'energia [Feynman, 1965] (v. [10]).

metria sferica: ogni diametro è un asse di simmetria di rotazione. Quando i due atomi si combinano nella molecola tutti i diametri perdono il loro ruolo di assi di simmetria rotazionale ad eccezione dell'asse congiungente i nuclei atomici: la molecola presenta una simmetria assiale, e quindi una simmetria inferiore a quella, sferica, degli atomi costitutivi (Fig. 1).

Con *l'aiutorio* della natura, guidato dal senso del bello, altrettanto fa l'uomo: lo testimoniano, come si diceva, i prodotti dell'artigianato e della tecnologia, la struttura formale delle teorie fisiche, la struttura della poesia e della musica, della danza e della liturgia, le

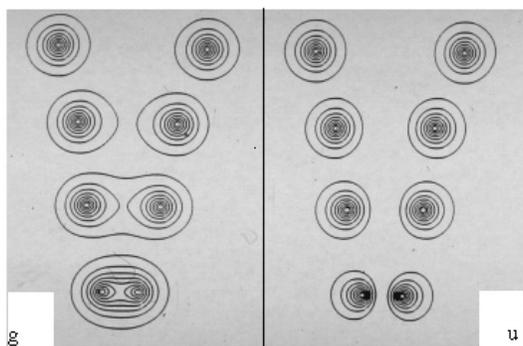


Fig. 1. – Formazione della molecola-ione idrogeno (in basso). g) L'orbitale molecolare centrosimmetrico o gerade, u) L'orbitale molecolare anti-centrosimmetrico o ungerade. Questa molecola è ottenuta aggregando due protoni legati da un elettrone di valenza, rappresentati dalle due coppie di orbitali atomici in alto nella figura. Gli orbitali atomici e gli orbitali molecolari definiscono regioni nelle quali l'elettrone può essere reperito con probabilità elevata (ad es. il 90 %). Come in una mappa militare, lungo le linee di eguale livello la densità di probabilità di presenza dell'elettrone è costante. Quantunque il centro di simmetria sia una delle più importanti caratteristiche di un orbitale molecolare, esso non è evidenziato in figura. Si noti che, mentre i moduli atomici costitutivi della molecola hanno simmetria sferica, entrambi gli orbitali molecolari hanno una simmetria assiale, ridotta rispetto a quella degli atomi costitutivi. Per rappresentare gli orbitali molecolari gerade e ungerade della molecola d'idrogeno, legata dai due elettroni di valenza degli atomi d'idrogeno che danno origine alla molecola stessa, occorrerebbe riferirsi a uno spazio a 6 dimensioni. In questa molecola, oltre alla simmetria assiale, esiste la simmetria di scambio, secondo la quale è impossibile accorgersi dello scambio di un elettrone con l'altro, proprio perché i due elettroni sono indistinguibili.

forme architettoniche dei templi greci e delle moschee, delle pagode e dei giardini all'italiana. Altrettanto fa l'uomo, si diceva. Né potrebbe essere diversamente. L'uomo è infatti parte della natura, e per sua natura non può non seguirne le leggi. Sicché *nell'ordinare* i moduli costitutivi delle sue strutture — colori, parole, masse, suoni — l'uomo *rompe la simmetria*: ma è naturalmente portato a operare questa rottura solo parzialmente, curando che la struttura risultante presenti una *simmetria superstite*. Basti pensare, ad esempio, alla simmetria insita nell'omogeneità e nell'isotropia di una tela che attende la prima pennellata del pittore, alla simmetria della pagina bianca o del video vuoto che attendono muti l'incipit dello scrittore, alla pietra informe che si offre allo scultore. Per non parlare del silenzio, una simmetria che, arrecando *piacimento*, viene ridotta dal suono con la musica, la regina delle arti. Nella musica ritroviamo un'armonica combinazione di simmetria superstite e di ordine: la simmetria è nel ritmo delle battute, tutte della medesima durata, mentre l'ordine è incorporato nella melodia.

In definitiva emerge così una regola alla base della formazione delle strutture, siano esse naturali o artificiali: *ridurre la simmetria rispettandola*. Una struttura potrà proporre stimoli che risuonino gradevolmente sullo stato d'animo di chi la percepisca solo se in essa si bilanciano armonicamente *simmetria e ordine* [Caglioti e Tchouvilleva, 1995].

4. – Il ruolo dei numeri interi nel ridurre la simmetria e nel generare ordine.

Consideriamo una tela bianca molto estesa, al limite idealmente illimitata. Ogni punto della tela è un centro di simmetria di inversione in quanto ribaltando rispetto ad esso un punto qualsiasi della tela si ripristina la configurazione di partenza. Inoltre, comunque ci si sposti lungo la tela, operando una traslazione o una rotazione, nulla cambia, non ci si accorge di alcuna variazione: in quanto invariante vuoi per effetto di traslazioni, di rotazioni e di ribaltamenti rispetto a un suo punto qualsiasi, vuoi per effetto di permutazioni tra punti, la tela bianca, omogenea, isotropa e indifferente a scambi tra i punti

che la compongono, è dotata d'una simmetria perfetta. Nessuna meraviglia, dunque, se per alcune comunità religiose dell'Estremo Oriente essa assurge a simbolo della divinità.

Basta però segnare un punto P sulla tela, e la simmetria originaria si riduce drasticamente, si dissolve la simmetria dell'indiscernibile (Fig. 2). Ogni punto della tela, non più omogenea, perde il suo ruolo di centro di simmetria. Ad eccezione, al più, di P. Contestualmente, con *la riduzione della simmetria originaria* emerge un criterio per *ordinare* i punti della tela, ad esempio in base alla loro distanza dal punto P segnato sulla tela stessa (Caglioti, 1995).

Viaggiando in automobile ci capita talvolta di provare la sensazione di ordine promossa da una riduzione della simmetria: sulla carreggiata di un'autostrada appena asfaltata uniformemente non è possibile *ordinare* «veicoli lenti a destra» per il semplice motivo che manca un riferimento per distinguere la destra dalla sinistra. Diventerà possibile *ordinare* «veicoli lenti a destra» soltanto una volta che sia stato portato a termine il «rifacimento della segnaletica» se-

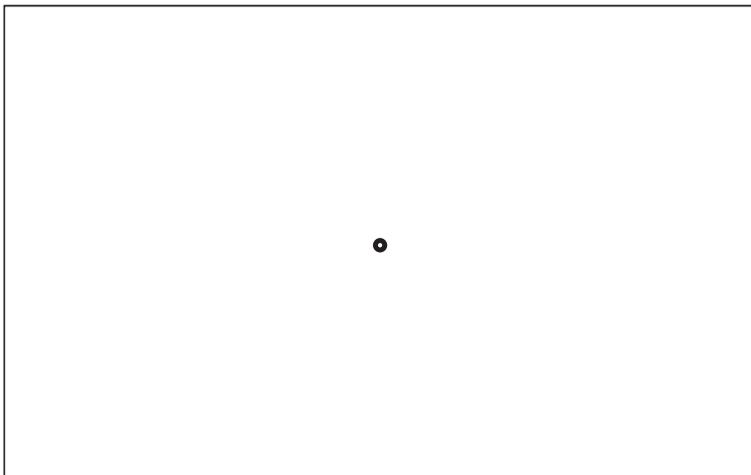


Fig. 2. – Il significato di una struttura è nella sua simmetria. Il significato di una tela bianca, idealmente illimitata, omogenea e isotropa, risiede nell'indiscernibilità, ovvero nell'impossibilità di discernere alcunché nella tela stessa: a meno che la simmetria non venga ridotta, magari segnando nella tela un solo punto P, al quale diventa poi naturale riferirsi per ordinare gli altri punti della tela (ad esempio adottando quale criterio la distanza dal punto P).

gnando sull'asfalto *un solo asse superstite di simmetria* che operi una separazione tra le corsie. Più netta ancora è la sensazione opposta, di disorientamento, che si prova passando da un segmento autostradale segnaleticamente in ordine a un tratto omogeneo in cui non compaia in evidenza l'asse di simmetria superstite che separa le due corsie.

Si conferma così che la *riduzione della simmetria* comporta l'*instaurarsi di un ordine*.

Lungi dall'essere sinonimi, simmetria e ordine, compresenti, costituiscono due ingredienti necessari — ma non sempre sufficienti — affinché una struttura o un processo appaiano belli.

Una struttura, in quanto dotata di elementi di simmetria (ad esempio un centro di inversione, un piano di riflessione, un asse di rotazione, uno scambio o permutazione tra elementi identici, una scansione ripetitiva, periodica dei moduli strutturali) si propone alla nostra attenzione suscitando stimoli che evocano riferimenti invariati in equilibrio. Ne risulta il senso di rassicurazione che nei bambini procura la nenia della ninna nanna, e che poi, più avanti negli anni, gli adulti cercano con il ritmo nella poesia e nella musica, con la battuta nella danza, con la litania nella preghiera, con gli slogan nelle manifestazioni sindacali o di categoria; ne risulta però, a lungo andare, anche un senso d'ipnosi e di noia, di angoscia e di saturazione.

Tuttavia se in una siffatta struttura intervengono interruzioni, discontinuità o pause, si ridesta l'attenzione e si stimolano bruschi riorientamenti del pensiero o emozioni: alludiamo ad esempio al panico che si propaga tra i passeggeri di un aereo a causa di un vuoto d'aria, alla paura che procura un grido nel silenzio della notte, all'ansia che si accompagna ad un'improvvisa rottura della routine quotidiana; oppure a quell'incitamento all'azione o alla scelta che si coglie all'atto della percezione dinamica dell'ambiguità di una figura quale il marchio Renault: questa struttura, centrosimmetrica e a prima vista bidimensionale, si autoorganizza sotto i nostri occhi, e invadendo lo spazio tridimensionale non tarda a offrirci avvincenti possibilità d'interpretazione, coesistenti ancorché tra loro incompatibili (Fig. 3).

Insieme, simmetria e ordine ingenerano sensazioni di segno opposto — rassicurazione e ansia, ipnosi e presa di coscienza —. Sapientemente calibrati, distribuiti e armonizzati in una stessa struttura, simmetria e



Fig. 3. – Il marchio Renault. Questa composizione cattura l'attenzione dell'osservatore, grazie alla dinamica dell'ambiguità che si manifesta con un incessante alternarsi d'inversioni prospettiche.

ordine fanno presa sull'animo umano, gratificandolo: basti pensare al ritmo e, rispettivamente, alla melodia d'una composizione musicale; oppure alla fuga delle colonne equidistanti d'un chiostro romanico e ai soprastanti capitelli, l'uno differente dall'altro.

Orbene, il numero intero è lo strumento principe, lo strumento primordiale per ridurre la simmetria e per produrre ordine.

Pensiamo ancora alla tela bianca: ad ogni elemento al di qua di una linea mentalmente tracciata su di essa, può esserne associato un altro al di là della linea, tale che per effetto di una loro riflessione rispetto alla linea non è possibile percepire alcun mutamento. Ma se Caravaggio dipinge il suo Narciso su questa tela, la simmetria di riflessione rispetto a un piano orizzontale, originariamente appannaggio di tutti gli elementi tra loro indistinguibili della tela bianca, si riduce drasticamente, e rimane circoscritta soltanto a *due* componenti: il Narciso e la sua immagine speculare. E ancora: nella maggior

parte delle specie biologiche si registra una simmetria **bilatera** quasi perfetta.

Assi di simmetria di ordine **tre** (tali che per effetto della rotazione attorno ad essi di un terzo dell'angolo giro, $2\pi/3$, la struttura ricopre se stessa e quindi rimane invariata) sono presenti nelle strutture molecolari (si pensi alla molecola di ammoniaca, NH_3 o ai radicali $-\text{CH}_3$), nel trifoglio e in molte specie floreali. Ma contraddistinguono anche il marchio Mitsubishi e il marchio Mercedes.

Pensiamo al glorioso marchio CARIPLO. **Quattro** è il numero che agisce qui da elemento ordinatore: se ci si riferisce alla tela bianca illimitata quale configurazione di partenza, proprio di ordine 4 è l'unico asse di simmetria rotazionale superstite (Fig. 4). Ma quanto si è appena detto per il **tre** vale in natura anche per il **quattro**: basti pensare al quadrifoglio o alla struttura di un cristallo cubico quale il cloruro di sodio, il comune sale da cucina.

Pensiamo a un alveare: qui protagonista è il numero **sei**.

Gli angoli $2\pi/n$, per $n = 3, 4$ e 6 , figurano in modo caratteristico nella configurazione degli orbitali dei quattro elettroni di valenza dell'atomo di carbonio o nei loro ibridi⁽⁵⁾ che preludono alla formazione dei legami interatomici covalenti. Conseguentemente le direzioni dei legami chimici che confluiscono su un atomo di carbonio formano generalmente proprio questi angoli (120° , 90° e 60° rispettivamente), gli stessi che registriamo, certo non per caso, tra i tre petali del trifoglio o dell'*Hydrocharis morsus-ranae*, tra i quattro petali del quadrifoglio o della *Mathiola sinuata* e tra i sei petali della *Scilla bifolia* (Fig. 5) [Parravicini, 1998]. Per motivi verosimilmente riconducibili alle medesime considerazioni trigonometriche e fisiche, nel mondo animale e vegetale assai raramente troviamo traccia del numero **sette**: il seno o il coseno o la tangente dell'angolo $2\pi/7$ non sono esprimibili in termini di rapporto tra i piccoli numeri interi che intervengono

⁽⁵⁾ Accanto a questi angoli, per completezza conviene qui ricordare l'angolo $\arccos(-1/3) = 109^\circ 28'$, formato dalle direzioni dei quattro legami tetraedrici in molecole quali il metano, CH_4 o in radicali molecolari ionici quali il PO_4^{3-} .



Fig. 4. – Archetipo architettonico del marchio CARIPLO.

nella teoria quantistica degli orbitali atomici e dei legami chimici propri delle molecole organiche e delle molecole biologiche.

Potremmo continuare con la struttura autosomigliante di Castel del Monte, le cui torri presentano una simmetria rotazionale d'ordine *otto*, e poi con i *trentadue* petali di qualche margherita o del ro-



Fig. 5. – La Scilla bifolia, L. 1753, un fiore a sei petali, comune sul Campo dei Fiori in quel di Luvinata (Varese). Mario e Umberto Parravicini (1998).

sone della cattedrale di Strasburgo (Fig. 6). Ma forse è più interessante passare dallo spazio delle immagini ai tempi della musica.

La simmetria del silenzio può essere infranta in vari modi. *Il grido* di Munch rompe in modo traumatico la simmetria del silenzio e della tela bianca e trasferisce bruscamente al fruitore un'emozione carica d'angoscia (Fig. 7). Si tratta certamente di una sensazione estetica. Ma per approdare al piacimento e al bello occorre infrangere la simmetria rispettandola: cosicché, contestualmente alla *riduzione della simmetria*, possa subentrare l'*ordine*. Ancora una volta tuttavia, a questo fine, occorre ricorrere al numero.

Nella scala pitagorica i rapporti tra le frequenze di note musicali che, suonate simultaneamente, producono una sensazione gradevole all'orecchio, sono esprimibili mediante rapporti tra numeri interi piccoli (2:1 per l'ottava, 3:2 per la quinta, 4:3 per la terza). In effetti, per semplificare il linguaggio musicale e il protocollo d'accordatura dei vari strumenti, la scala pitagorica è stata sostituita dalla scala

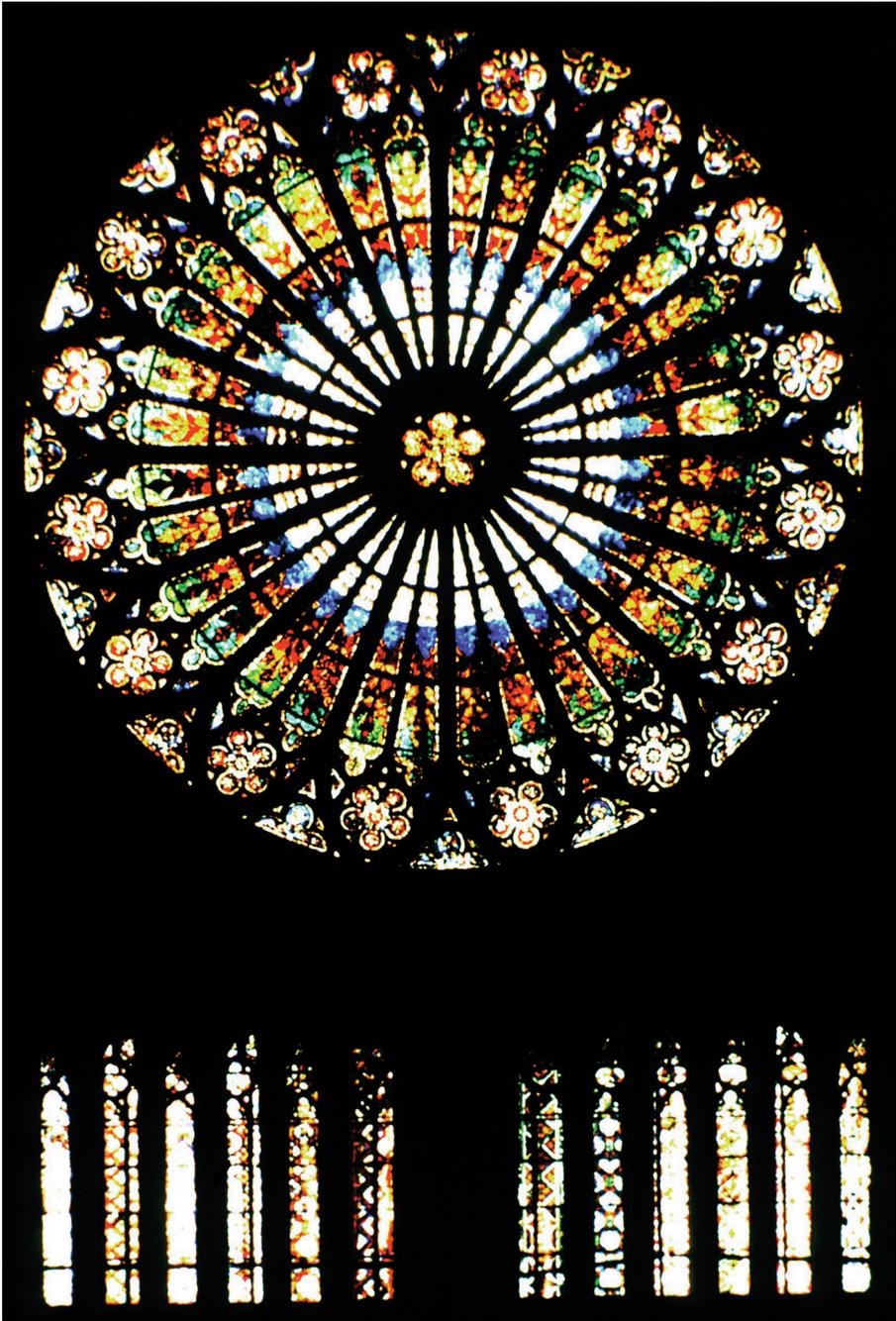


Fig. 6. – Cattedrale di Strasburgo: il rosone.

Fig. 7. – Edvard Munch (1893), *Il grido* (The Scream), Olio, tempera e pastello su cartone, Galleria Nazionale, Oslo, © Edvard Munch By SIAE 2001.

temperata nella quale, più convenientemente, il rapporto fra le frequenze di due semitoni consecutivi è costante e pari al numero irrazionale $(2)^{1/12}$. Giova comunque ricordare che *musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi*, ovvero: la musica è un occulto esercizio di aritmetica dell'anima: di un'anima che non sa di contare [Leibniz, 1712], (v. [11]).

Il «piacimento» delle sensazioni — siano esse visive o acustiche — è dunque affidato al numero. Il numero è alla radice del senso del bello e delle emozioni gradevoli.

5. – La sezione aurea: un esempio di autoorganizzazione e di autosomiglianza.

Un discorso a parte merita il numero *cinque*.

Si tratta di un numero con il quale si manifestano due caratteristiche essenziali del modo di operare della natura.

In quanto è un numero intero, il 5 agisce quale entità generatrice di ordine statico, pitagorico: forse non a caso la stella a cinque punte assurge al ruolo di simbolo della Repubblica Italiana.

D'altra parte, con la sua radice quadrata, il 5 concorre a definire la sezione aurea, ben nota nell'architettura e nell'arte, e assai diffusa tra le creature biologiche. Appare superfluo in questa sede ricordare il legame tra la sezione aurea e la successione di Fibonacci (Pisa, ~ 1175-1235). Quest'ultima è un sistema numerico costituito da una sequenza ordinata di numeri interi. Inizia con i numeri 1, 1, e prosegue indefinitamente, con ciascun numero della successione stessa ottenuto sommando i due numeri che lo precedono:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Una rappresentazione geometrica dei termini della successione è fornita dalla fig. 8. La sezione aurea è appunto il limite a cui tende il rapporto tra due numeri consecutivi N_{n+1}/N_n di questa successione. Essa è pari a $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618034\dots$ [o anche al reciproco di questo numero, $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618034\dots$].

La sezione aurea può essere costruita peraltro in vari altri modi: estraendo le due radici di ciascuna delle due equazioni di secondo grado $x^2 - x - 1 = 0$ e prendendone i valori assoluti, oppure anche adottando altri procedimenti iterativi. Si può ad esempio attivare il numero *uno* quale nucleo di due distinte successioni illimitate di iterazioni, eseguite entrambe, anch'esse, con rigida sistematicità (Fig. 9) ⁽⁶⁾

Poiché tali procedimenti iterativi, una volta innescati, procedono tutti in modo automatico e autonomo, sembra legittimo proporre che la sezione aurea assurga al ruolo di paradigma sia di quella forma di ordine dinamico che è l'autoorganizzazione sia di quella forma di simmetria, che all'autoorganizzazione si suole accompagnare, che è la simmetria di scala o *autosomiglianza*. Una struttura è autosomigliante quando ogni sua parte è copia di una parte della struttura ed eventualmente dell'intera struttura:

⁽⁶⁾ Tali successioni si ottengono rispettivamente a partire dalle relazioni $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$, e $\Phi = 1 + 1/\Phi$.

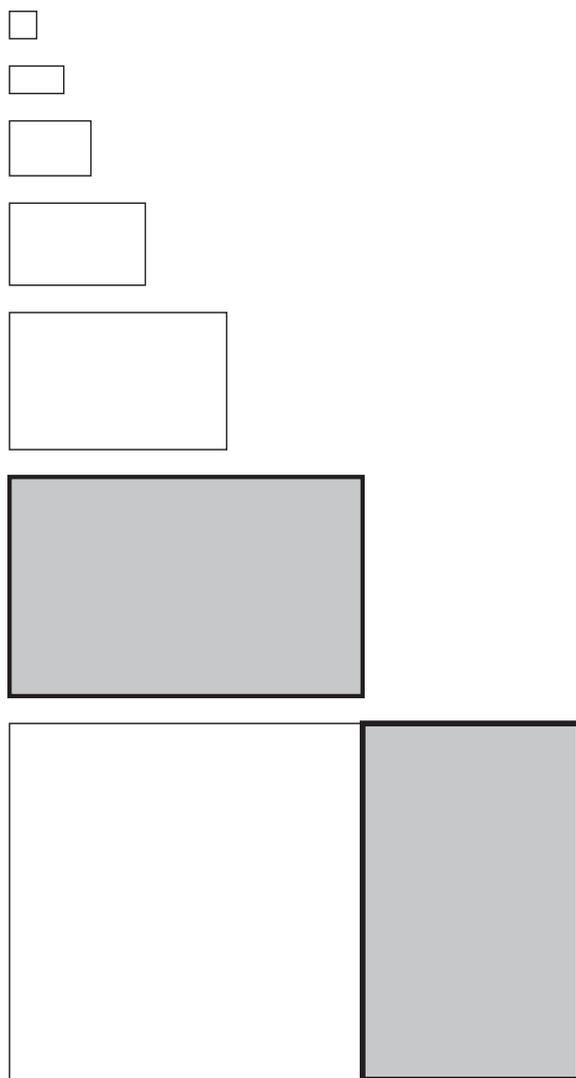


Fig. 8. – La successione di Fibonacci ($N_{n+1} = N_{n-1} + N_n$) e la sezione aurea. A mano a mano che si procede verso destra (numero d'ordine n elevato) il rapporto N_{n+1}/N_n tra numeri N consecutivi nella successione tende alla sezione aurea. Parallelamente, i rettangoli costruiti su lati di lunghezza (N_{n+1}, N_n) e (N_n, N_{n-1}) tendono ad essere l'uno sempre più simile all'altro. Inoltre, ogni rettangolo è costituito da un quadrato e da un rettangolo uguale a quello che lo precede nella successione. La bellezza della sezione aurea deriva forse dal fatto che l'occhio di una persona sensibile percepisce subliminalmente queste forme nascoste ma rassicuranti di autosomiglianza.

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{5}+1)/2 &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \\
 &= 1 + 1 / (1 + (1 / 1 + (1 / 1 + (1 / 1 + \dots
 \end{aligned}$$

Fig. 9. – Dal numero uno alla sezione aurea.

sicché *zoomando* localmente la struttura, questa rimane identica a se stessa.

In effetti, è plausibile che la *sistematicità* con cui in queste successioni numeriche l'iterazione si ripete in ogni tappa elementare del *processo* che ha per traguardo la sezione aurea, lasci traccia in ogni rappresentazione visiva della sezione aurea stessa. In altre parole, è naturale che il *prodotto* di un *processo* controllato da una regola applicata in modo *sistematico* presenti un che di *invariante*. Nessuna meraviglia dunque se le strutture che si autoorganizzano manifestano tutte, in modo più o meno evidente, quella forma d'invarianza che è l'autosomiglianza.

Le considerazioni che precedono trovano conferma nella rappresentazione visiva della successione di Fibonacci proposta in Fig. 8. Sono qui percepibili sia l'autoorganizzazione sia l'autosomiglianza. L'applicazione sistematica della regola aritmetica $N_{n+1} = N_{n-1} + N_n$ è tipica di un processo d'autoorganizzazione: di un processo che, una volta avviato, si sviluppa senza ulteriori interventi esterni. D'altra parte, proprio la sistematicità con cui la stessa regola è applicata fa sì che, per valori elevati di n , i rettangoli costruiti su lati di lunghezza (N_{n+1}, N_n) e (N_n, N_{n-1}) risultino tra loro praticamente simili. Peraltro, analoghe forme di autosomiglianza ricorrono in ogni successione numerica a_n/b_n che converga a un numero c . Ma per la successione di Fibonacci, in più, ogni rettangolo è costituito da un quadrato e da un rettangolo identico a quello che lo precede nella successione.

La bellezza della sezione aurea deriva forse dal fatto che l'occhio di una persona sensibile percepisce subliminalmente queste forme

nascoste d'autosomiglianza: forme nascoste, ma anche rassicuranti e suggestive perché tipiche di tutte le creature biologiche, in ogni frammento del DNA delle quali è concentrata l'informazione insita in tutta la struttura.

Nessuna meraviglia dunque se la stella marina e la stella alpina presentano anch'esse cinque punte: tante quanti sono i petali del fiore della fragola, del gelsomino e di molte altre specie che appaiono belle. A noi. Ma che prima ancora apparvero belle a Pitagora.

E ancora. In genere, quando si sbuccia una mela, la si seziona lungo un meridiano. Quanto precedentemente esposto ci aiuta a capire che questo modo istintivo di operare è il più naturale poiché consente di ridurre la simmetria rispettandola, proprio come accade nei processi naturali. A costo di troncane un'abitudine la quale, per quanto si è visto, per validi motivi è atavica, si può peraltro decidere di agire in modo più traumatico: spaccare la mela in due trasversalmente, lungo l'equatore, rompendo la simmetria senza curare che persista una simmetria superstite. Ma quando si rompe una simmetria senza rispettarla, non ci si deve sorprendere se spunta una sorpresa. In questo caso — provare per credere — la sorpresa sarà addirittura doppia. In primo luogo perché, con un'una bella scultura pentagonale, salta agli occhi la sezione aurea nascosta nel cuore della mela. E poi perché l'immagine che ci si presenta, nonostante la violenza perpetrata nei confronti dei semi della mela, in fondo è suggestiva e tutt'altro che sgradevole: pur derivando dall'aver rotto la simmetria senza rispettarla.

6. – L'autoorganizzazione e l'autosomiglianza nel mondo inorganico e nelle strutture naturali.

Per Pitagora il numero — che è fonte del bello — è alla radice della realtà.

Tuttavia, come si diceva all'inizio, dai tempi di Pitagora ad oggi, per effetto dell'enorme sviluppo della ricerca scientifica la *Weltanschauung*, la visione del mondo e della natura, è mutata [Caglioti, 1988] (v. [3]). Accanto alle strutture numeriche si affianca, quale meccanismo naturale primario alla base della riduzione della sim-

metria e della creazione d'ordine, l'*autoorganizzazione*, ovvero la peculiarità dei sistemi dinamici complessi, costituiti da sottosistemi interagenti in modo nonlineare e aperti a flussi d'energia, di materia e d'informazione, di organizzarsi in modo autonomo in strutture ordinate nello spazio, nel tempo e/o nelle funzioni.

Esempi relativamente semplici d'autoorganizzazione sono le reazioni chimiche autocatalitiche di Belousov-Zabotinskij nel corso delle quali i prodotti della reazione promuovono l'ulteriore sviluppo della reazione stessa, con spettacolari effetti cromatici che si riproducono con periodicità cronometrica per tutto il tempo durante il quale si protrae l'immissione dei reagenti nel reattore (v. ad es. Nicolis e Prigogine, 1977, v. [14]).

Restando in campo inorganico potremmo ricordare il tenue arabesco dendritico che si forma sul parabrezza della nostra automobile parcheggiata all'adiaccio in un'umida notte invernale: ogni molecola di vapore d'acqua che si incorpora nell'aggregato preconstituito, risponde alle stesse leggi di forza che controllavano l'aggregazione della molecola precedentemente attratta nell'aggregato stesso e che controlleranno l'aggregazione della molecola successiva. Anche in questo caso, come per i rettangoli abbinati alla successione di Fibonacci, grazie alla sistematicità con cui il processo si autoorganizza si perviene a una suggestiva struttura autosomigliante, caratterizzata dal fatto che zoomando un particolare della struttura si riproduce mediamente l'intera struttura.

Per cogliere gli aspetti essenziali del ruolo imprescindibile dell'autoorganizzazione nel modo di operare della natura, possiamo riferirci a quegli insiemi matematici autosomiglianti, *i frattali*, l'avvento dei quali negli ultimi decenni del Novecento ha determinato una svolta culturale nel nostro modo di concepire e percepire la genesi e la dinamica delle strutture naturali.

7. – I frattali e oltre.

La parola frattale è stata coniata negli anni Settanta da Benoit B. Mandelbrot, un matematico di origine polacca e di formazione francese [Mandelbrot, 1975], (v. [15]). Questi ha saputo assegnare un si-

gnificato fisico concreto e familiare a insiemi matematici partoriti dalla creatività e dalla fantasia di studiosi del calibro di H. Poincaré, di G. Cantor, di G. Peano, di F. Hausdorff, di G. Julia e di P. Fatou. A questi insiemi, che al tempo erano considerati «mostruosi» o «eccezionali» e sembravano destinati a rimanere sepolti, in forma algebrica ed esoterica, in poderosi e polverosi archivi, Mandelbrot ha dato appunto il nome di frattali. Merito di Mandelbrot è quello di avere così sviluppato, classificato e presentato in forma accessibile — e fruibile anche visivamente —, un corpus che oggi propone se stesso in alternativa addirittura alla geometria euclidea.

Secondo Mandelbrot, infatti, occorre superare la visione galileiana, enunciata nel celebre aforisma:

«La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto» [Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, 1623].

Sempre secondo Mandelbrot, i triangoli, i cerchi e le altre figure geometriche della geometria classica sono di scarso aiuto nel descrivere le forme naturali:

«la geometria classica» è «fredda» perché «è incapace di descrivere la forma di una nuvola o di una montagna, di una costa o di un albero. Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi, la corteccia dell'albero non è levigata, né un fulmine viaggia in linea retta».

Ma che cosa è un frattale? Un frattale è una struttura «autosomi-gliante», ogni parte della quale è copia di una parte della struttura, e eventualmente, — un po' come le matrisoske — dell'intera struttura.

Un esempio familiare di scultura frattale è la varietà di cavolfiore denominato *brassica botrytis*, noto anche come cavolfiore romano (Fig. 10): ogni cespo del cavolfiore è una copia fedele dell'intero cavolfiore. Sotto una lente di ingrandimento un cespo del cespo del cavolfiore appare a sua volta indistinguibile dall'intero cavolfiore.



Fig. 10. – La *Brassica botrytis* o cavolfiore romano: un esempio vivente di scultura frattale naturale.

Un altro esempio: l'acqua che bolle. In essa la fase vapore e la fase liquida si contendono l'acqua: cosicché, all'equilibrio, si compone la lite e si realizza una configurazione critica, nella quale un lago di vapore contiene isole di gocce d'acqua all'interno di ciascuna delle quali c'è un piccolo lago di vapore che contiene isole di gocce d'acqua all'interno di ciascuna delle quali ...

Costruire un frattale non è difficile. Oggi, col computer, basta lanciare un programma di poche righe per assistere all'autoorganizzazione della struttura frattale che si dipana sul video: un'autoorganizzazione che procede «mappando» il piano, sì che da un punto del piano si passa ad un altro punto del piano seguendo una regola, espressa in generale da una semplice formula matematica non linea-

re; e a partire dal punto così ottenuto si passa, sempre seguendo la stessa regola, ad un altro punto ancora, e via di seguito ⁽⁷⁾.

Grazie allo sviluppo della matematica dei frattali, simulare i processi di aggregazione delle felci come delle spugne, la formazione delle dendriti come delle “superfici” di frattura di un acciaio tenace, la formazione di una nuvola come la scarica di un fulmine, sta diventando un gioco da ragazzi. È frattale la struttura autosimile del tenue merletto dendritico di cui abbiamo parlato nel § precedente. Presentano l'autosomiglianza tipica dei frattali le creature biologiche, per le quali (si pensi ai dinosauri del Jurassic Park o ai test del DNA) in ogni frammento della struttura è concentrata l'informazione insita in tutta la struttura.

«La geometria dei frattali ti farà vedere tutto in modo diverso. C'è un pericolo nel procedere nella lettura. Rischi di perdere la visione che dalla tua infanzia avevi delle nuvole, delle foreste, delle galassie, delle felci, delle montagne, dei torrenti d'acqua, dei tappeti, e di tante altre cose. Mai più la tua interpretazione di queste cose sarà proprio la stessa»,

scriveva Michael F. Barnsley nell'introduzione del suo libro *Frattali dappertutto* (1988) (v. [16]).

Non ci si deve quindi meravigliare se i frattali, da sempre presenti nella natura e impliciti nella cultura, sono entrati con prepotenza nel mondo della fisica, della botanica, della biologia e della medicina. E così, oggi, riconosciamo che è autosomigliante il dogma indù, secondo cui se è vero (e può apparire banale) che l'universo comprende ogni sua parte, è anche vero che ogni parte dell'universo comprende tutto l'universo; parallelamente, riconosciamo autosomiglianza nelle proiezioni architettoniche di questo dogma, ovvero nei

⁽⁷⁾ Una tra le prime formule generatrici di frattali è la forma quadratica iterativa

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Definita nel piano complesso z , è stata mirabilmente illustrata da Heinz-Otto Peitgen e Peter Richter [1990], (v. [17]) nel loro bestseller mondiale, con la miriade di immagini ottenibili nel piano z al variare del numero intero n , in corrispondenza di ciascuna delle infinite possibili scelte del parametro complesso c .

templi indù, immagini della concezione autosomigliante del cosmo [Trivedi, 1989], (v. [18]).

Caratteristiche tipiche delle strutture frattali, sia consentito ripeterlo, sono l'autoorganizzazione e l'autosomiglianza che a questa si accompagna.

Il bello dei frattali sta appunto nella loro autosomiglianza, nella loro indifferenza o invarianza di forma nei confronti dell'operazione ingrandimento. L'uomo è forse l'animale più curioso. Ha bisogno di apprendere e di conoscere, e per conoscere ed apprendere deve potenziare l'acuità dei suoi sensi. Per sua natura all'uomo piace ingrandire. Galileo punta il suo telescopio sulle stelle, mentre i fisici di oggi, con il microscopio a effetto tunnel, riescono a distinguere un atomo dall'altro, e con sempre più giganteschi acceleratori di particelle esplorano i più piccoli dettagli della struttura del nucleo atomico e della «colla» che lo tiene assieme. Quando, a furia di ingrandire un particolare di un frattale, dopo un'orgia di immagini si torna a una immagine identica a quella di partenza, si prova un senso di sollievo: è un approdare ad Itaca dopo un'odissea. L'invarianza di una immagine nei confronti dell'ingrandimento è una forma di simmetria e, come tale, è rassicurante.

Tra i frattali l'insieme di Mandelbrot (Fig. 11) è diventato ormai di dominio pubblico: lo si vede riprodotto dappertutto, quasi sempre all'insaputa di chi ne porta il nome. Forse la popolarità di questo insieme deriva soprattutto dalla sua completa autosomiglianza, in virtù della quale parti minute dell'insieme di Mandelbrot contengono l'intero insieme.

L'insieme di Mandelbrot, come ogni frattale, ha dunque un che di biologico: un frammento del nostro DNA ci identifica tra miliardi d'individui; in ogni parte di un frattale è compressa l'informazione relativa all'intera sua struttura. Operare uno zooming per ingrandire una regione nell'intorno della frontiera dell'insieme di Mandelbrot dischiude scenari meravigliosi e imprevedibili. Il ritrovare l'intero insieme di Mandelbrot in particolari minuti dell'insieme stesso dà l'illusione di potere soddisfare un'antica esigenza dei fisici e dei filosofi: l'esigenza di cogliere l'universalità nella diversità (Fig. 12).

La creatività e lo stile di un Mozart o di un Bach potrebbero deri-

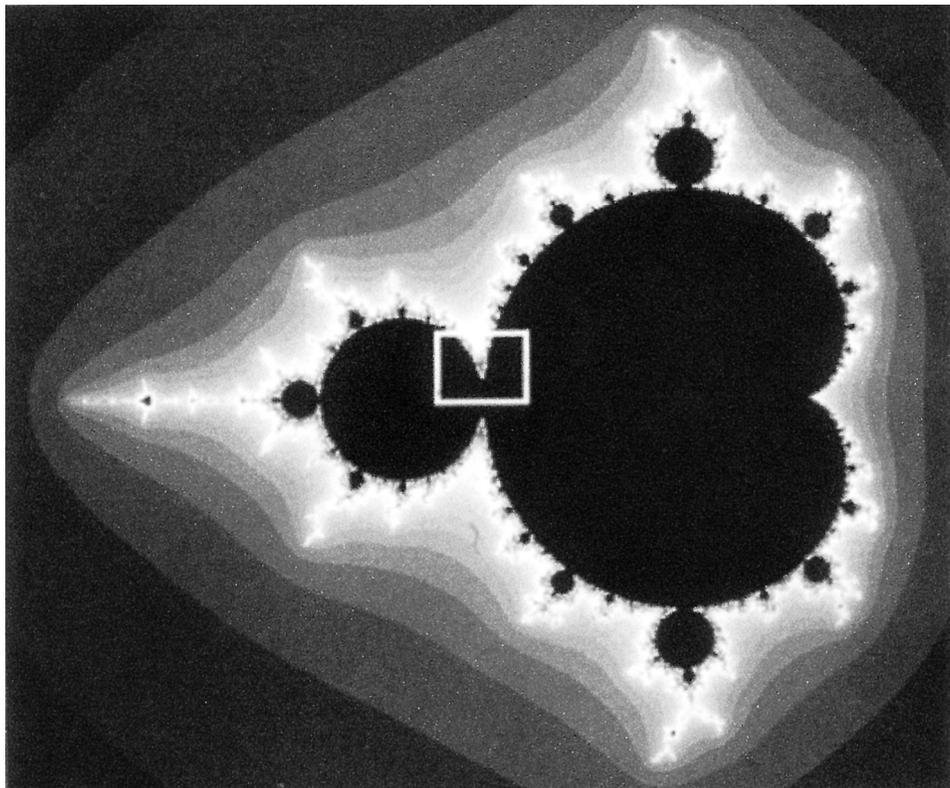


Fig. 11. – L'insieme di Mandelbrot, M . Definito nel piano complesso c , M ha per frontiera i valori del parametro c tali che: per c interno ad M l'insieme nel piano complesso z definito dall'iterazione

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

è connesso, mentre per c esterno ad M l'insieme del piano z definito da detta iterazione non è connesso. Nel piano z gli insiemi connessi relativi a valori di c interni ad M sono detti insiemi di Julia, mentre gli insiemi non connessi relativi a valori di c esterni ad M sono detti polveri di Fatou.

vare dalla loro capacità di identificare e di applicare con velocità enorme le regole di un gioco tutto loro: le regole — caratteristiche del loro stile — di un gioco strutturalmente analogo a quello che consente di creare meccanicamente, come in un caleidoscopico bolearo, innumerevoli immagini frattali a partire da una semplice ricetta iterativa. Ma la genialità di questi giganti della musica sta quasi cer-

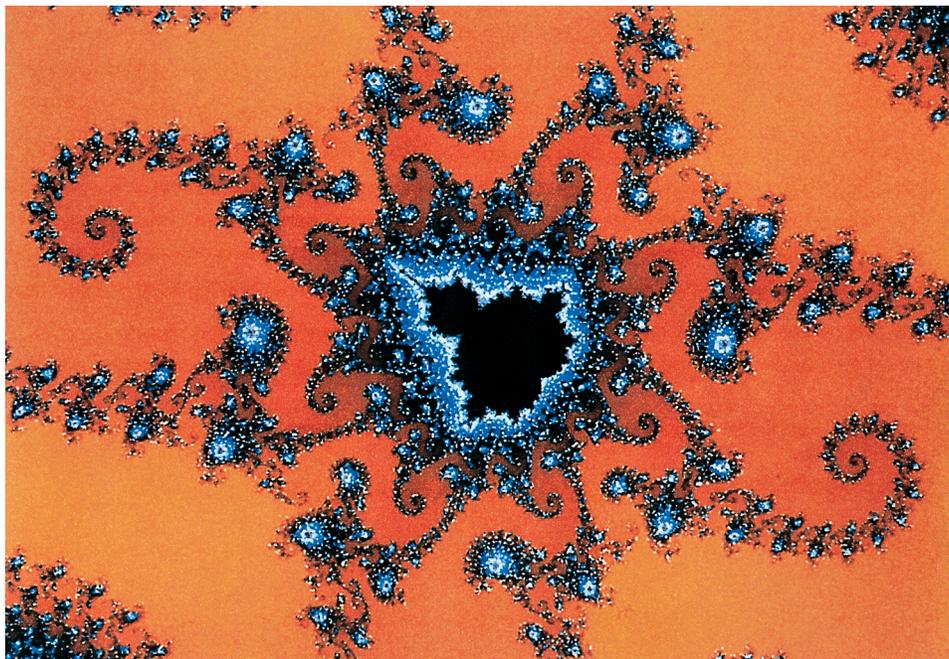


Fig. 12. – Un particolare dell'insieme di Mandelbrot, ottenuto *zoomando* un minuscolo particolare nell'intorno della sua frontiera.

tamente nel fiuto con cui essi sanno cogliere il momento giusto per rompere a regola d'arte la regola di questo gioco iterativo e per adottarne una nuova.

L'insieme di Mandelbrot rappresenta soltanto uno tra gli innumerevoli esempi di immagini sintetizzabili con il computer a partire da infinite possibili forme funzionali iterative non lineari — sia deterministiche sia stocastiche — generatrici di frattali. Il mondo dei frattali è popolato densamente, esistono galassie di frattali. Il computer consente di esplorare e di animare questi mondi, che, quando lo si desidera, si popolano di creature a volte straordinariamente simili ad animali o a piante: creature le quali, come le piante e gli animali, organizzando in modo autonomo il loro processo di sviluppo, crescono e si moltiplicano.

La matematica dei frattali ha innescato lo sviluppo di nuovi

algoritmi e di nuove forme espressive, di potenziale interesse nel design e nella comunicazione visiva.

Oltre i frattali, dunque.

Alla semplice forma quadratica iterativa $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (v. nota ⁽⁷⁾ a piè di pag. 28), Pierre Coulet, dell'Istituto Non Lineare, (Università di Sophie Antipolis) sostituisce, quale regola matematica del gioco iterativo, il nucleo che controlla la fisica di una varietà di trasformazioni strutturali autoorganizzanti: dalla transizione superconduttiva alla instabilità convettiva di un fluido scaldato dal basso o all'instaurarsi del regime laser in una cavità ottica. Tale regola iterativa presiede a dette trasformazioni, e con l'aiuto del computer consente di simularle. Al variare del valore numerico di uno o più parametri di controllo incorporati nella regola stessa, sul video che ne risulta si dipanano sequenze di immagini, le quali assumono autonomamente forme mutevoli che popolano un mondo biologico virtuale. Frutto di regole fisico-chimiche di un gioco che il computer gestisce con una prontezza che vorrebbe eguagliare quella con cui la natura presiede all'aggregazione di atomi nella materia, sentiamo che tali immagini ci appartengono ed entriamo in sintonia con esse (Fig. 13).

Entriamo altresì in sintonia con le immagini che, con tecniche analoghe basate sugli *automi cellulari*, nonché sulla integrazione, in essi, della *dimensione-colore*, ci propone Yoshiro Kawaguchi, dell'Istituto dell'Arte dell'Università di Tsukuba.

Gli automi cellulari

Quello degli automi cellulari è un algoritmo che controlla l'evoluzione di un'immagine, digitalizzata in *pixel* (*picture-element*), ossia in piccoli elementi quadrati distinguibili per colore, intensità ecc. Questa evoluzione si articola in una successione di scatti, secondo regole prestabilite le quali, ad ogni scatto, controllano le modalità di trasformazione dei pixel.

Pensiamo ad esempio a una scacchiera, e a una colonia di batteri disposti su questa scacchiera in modo che su ogni casella (pixel) ci sia al più uno di questi batteri. Un pixel è nero se è occupato da un batterio, altrimenti è bianco. Una regola classica che presiede alla dinamica della popolazione di questi batteri è quella del *gioco della vita e della morte*:

- un batterio che abbia negli otto pixel primi vicini (lungo l'asse verti-

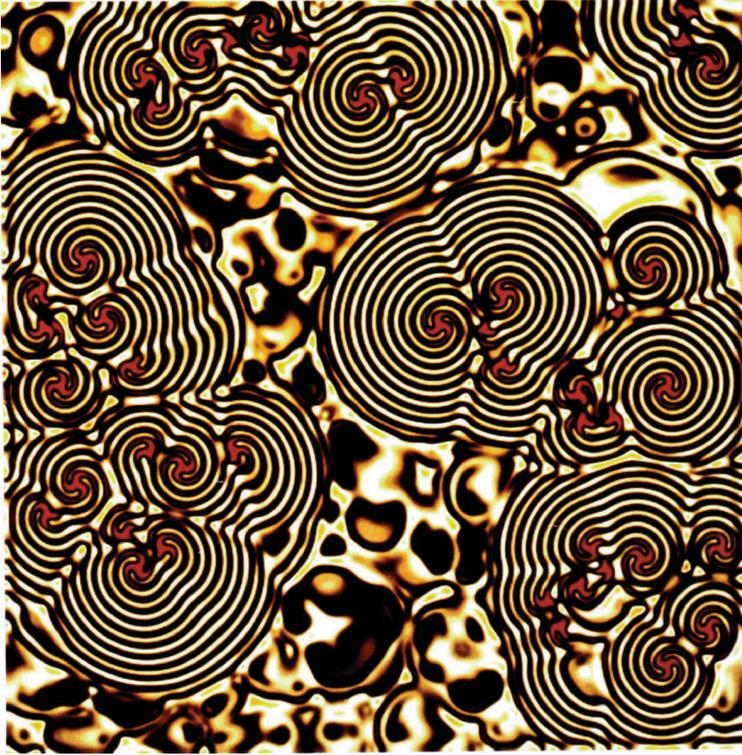


Fig. 13. – Simulazione di un processo di trasformazione strutturale: in cui una «colonia batterica» va soppiantandone un'altra. Immagine da una videocassetta (Cortesia di Pierre Coulet).

cale, lungo l'asse orizzontale o lungo le due diagonali), più di tre batteri, muore per asfissia ovvero per troppo affollamento;

- un batterio che abbia nei pixel primi vicini meno di tre batteri muore per isolamento,
- un pixel bianco, contiguo a pixel primi vicini nei quali vivano esattamente tre batteri, dà luogo alla nascita di un batterio.

Al tempo 0 si dà il via e si arriva alla nuova configurazione; al tempo 1 si scatta nella nuova configurazione; poi, sempre applicando la stessa regola del *gioco della vita e della morte*, si passa via via alle configurazioni successive.

Nell'esempio proposto in Fig. 14 si giunge rapidamente alla dissolvenza della colonia dei batteri. Ma una scelta meno didascalica

☺		☺
	☺	
☺	☺	☺
	☺	
☺		☺

Tempo $t = 0$

	☺	
☺		☺
☺		☺
	☺	

Tempo $t = 1$

	☺	
	☺	

Tempo $t = 2$

Fig. 14. – Automi cellulari. La regola del gioco della vita e della morte.

delle condizioni iniziali e delle regole del gioco porta a strutture più interessanti e gradevoli (v. ad esempio Fig. 15).

In natura, come nel mondo artificiale, l'abbinamento del colore alla forma è foriero di emozioni. Kawaguchi, introducendo nella dinamica di evoluzione degli automi cellulari un algoritmo basato su funzioni della posizione e anche del colore, non lineari e non banalmente deterministiche, e alterando con sensibilità e maestria i parametri liberi nelle regole del gioco, ha prodotto suggestivi filmati, di grande interesse. Pretendere di descrivere a parole i suoi risultati sarebbe velleitario come pretendere di raccontare la musica. Basti qui rilevare che il lavoro di Kawaguchi — una danza fantastica e ragionata di forme e di colori imprevedibili —, è inquietante perché ci mostra che il mondo biologico cui ci è dato di appartenere è in effetti

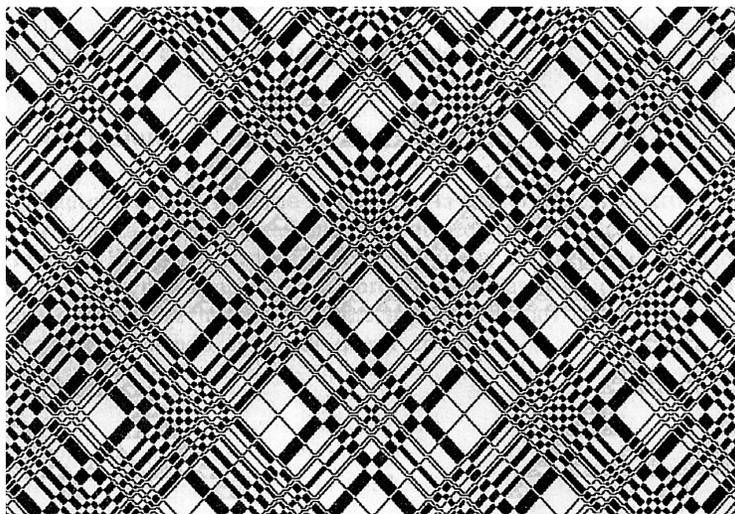


Fig. 15. – Un automa cellulare.

uno tra i tanti mondi possibili cui potremmo appartenere. Siamo in un mondo che risponde a un particolare sistema di regole del gioco: un sistema di regole del gioco scelto tra tanti sistemi, tutti a priori validi ed eleggibili in natura: sempre che, quale criterio di validità e verità, si accettino la coerenza e l'eleganza dei colori e delle forme che, autoorganizzandosi, si intrecciano sinuose, assumendo di tanto in tanto sembianze che ricordano da vicino in modo sconcertante strutture e creature che siamo soliti osservare in natura.

Gli esempi proposti da Kawaguchi confermano che nuove vie si dischiudono ormai alla creazione artistica.

L'uomo, assistito dall'elaboratore e magari da robot a questo asserviti, può oggi estrinsecare la sua creatività e la sua genialità impegnandosi nella invenzione delle regole del gioco e nella identificazione del momento opportuno per cambiarle a regola d'arte, anziché disperdendo i propri sforzi nella gestione spicciola delle regole stesse.

I mezzi sono il messaggio. I nuovi mezzi espressivi configurano nuovi strumenti di elaborazione e formulazione del pensiero, e

consentono di strutturare in modo nuovo messaggi idonei a trasferire sensazioni inusitate.

Sono ormai a nostra disposizione strutture linguistiche dotate di una loro autonomia le quali, autoorganizzandosi, sviluppano automaticamente le implicazioni contenute in regole semplici e consentono così di generare varietà illimitate di forme complesse.

Mentre il pensiero, librandosi in tali strutture, è pronto a fare un salto di qualità, i problemi si spostano. Non si tratta più di ricondurre a principi primi la complessità del reale o di fornire interpretazioni o riproduzioni delle strutture naturali. L'obiettivo è più ambizioso, si punta più a monte. Come direbbe Philippe Quéau [1986] (v. [19]), si va verso *la creazione delle condizioni per la produzione di forme: verso la creazione delle condizioni per realizzare il progetto di un petit monde en soi.*

8. – Conclusioni.

Nel bilancio armonico dell'ordine e della simmetria è l'essenza della bellezza. I numeri naturali e le strutture numeriche sono ingredienti imprescindibili della simmetria e dell'ordine. Tra le strutture numeriche, la successione di Fibonacci primeggia per le sue implicazioni in campo estetico. Il limite del rapporto tra numeri interi consecutivi della successione di Fibonacci definisce la sezione aurea. Nella sezione aurea si possono cogliere i germi di quella forma di ordine dinamico — insito nelle creature naturali — che è l'autoorganizzazione. Parallelamente, si possono cogliere i germi di quella forma di simmetria originata dall'autoorganizzazione che è l'autosomiglianza, ovvero l'invarianza per effetto di una variazione della scala (*zooming*).

Oltre che nelle creature naturali, l'autosomiglianza è presente nei frattali e negli automi cellulari. La ricerca su questi insiemi matematici ha prodotto nuovi modelli interpretativi dei meccanismi di formazione ed evoluzione delle strutture, e si apre a importanti applicazioni nei campi della biologia, della medicina e del design: non senza implicazioni sul senso del bello.

9. – Ringraziamenti.

Ringrazio i referee di questo lavoro, per le loro istruttive e costruttive critiche al manoscritto. Ringrazio il Prof. Mario Parravicini e il Dott. Umberto Parravicini per avermi consentito di riprodurre immagini fotografiche di esemplari di specie floreali, tratte in parte dal loro libro citato. Ringrazio Tatiana Tchouvilleva per le stimolanti discussioni sulle tesi qui sostenute e per i suoi consigli sulla scelta delle immagini e sulla forma della presentazione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GIUSEPPE CAGLIOTI - TATIANA TCHOUVILLEVA, *La bellezza salverà il mondo*, in AA.VV., *L'uomo, i Limiti e la Speranza. Una rotta verso il Terzo Millennio*, a cura di G. Giorello e E. Sindoni, Edizioni Piemme, Milano, 1995.
- [2] HERMANN HAKEN, v. ad esempio *Sinergetica, il segreto del successo della natura*, Bollati Boringhieri, Torino, 1984.
- [3] GIUSEPPE CAGLIOTI, in *Sinergetica e Weltanschauung*, Sinergetica, AA.VV., Saggi sulla coerenza e auto-organizzazione in natura, Prometheus 8, P. Bisogno, Direttore, FrancoAngeli, Milano (1988) pp. 161-177.
- [4] STUART KAUFFMAN, *At Home in the Universe, The Search for the Laws of Self-organization and Complexity*. Oxford University Press, New York, Oxford, 1995.
- [5] S. CHANDRASEKHAR, in *Bellezza e verità. Le ragioni dell'estetica nella scienza*, Garzanti, Milano, 1990, pag. 105.
- [6] A. EINSTEIN, in *Opere scelte*, a cura di Enrico Bellone, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, p. 570.
- [7] GIUSEPPE CAGLIOTI, *Simmetrie infrante nella scienza e nell'arte*, CLUP, Milano (1983). Seconda edizione, CittàStudi, Milano, 1994 (disponibile anche in edizioni estere: in inglese, *The Dynamics of Ambiguity*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1992); in tedesco (Vieweg, Braunschweig 1990), in russo (MIR, Moscow, 1997) e in giapponese, Kodansha (Tokyo 1997)).
- [8] CAGLIOTI GIUSEPPE, *Eidos e Psiche. Struttura della materia e dinamica dell'immagine*, Ilisso, Nuoro, 1995 (disponibile anche in giapponese, Hakyosha Co., 2001).
- [9] CAGLIOTI GIUSEPPE, *Casanova e la scienza*, Moretti & Vitali, Bergamo, 1998.

- [10] RICHARD F. FEYNMAN - ROBERT B. LEIGHTON - MATTHEW SANDS, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1966. Vol. III, *Quantum Mechanics*, v. in particolare il Cap. 17: *Symmetry and Conservation Laws*.
- [11] G. W. LEIBNIZ, Lettera a Chr. Goldbach, 17 aprile 1712 in *Epistolae ad diversos, theologici, iuridici, medici, philosophici, mathematici, historici et philologici argumentis*, ed. Chr. Kortholt, Lipsia, B. Chr. Breitkopf.
- [12] LEONARDO DA VINCI, Disegni Anatomici nella Biblioteca Reale di Windsor, n. 72 verso.
- [13] MARIO e UMBERTO PARRAVICINI, *Flora del Campo dei Fiori e delle Prealpi Lombarde*, Andrea Lazzarini Editore, 1998.
- [14] NICOLIS G. - PRIGOGINE, in *Self-organization in Non-equilibrium Systems*, Wiley, New York, 1977.
- [15] BENOIT B. MANDELBROT, *Oggetti frattali*, Einaudi, Torino, 1987 (Ediz. Originale, 1975)
- [16] MICHAEL F. BARNSELY, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.
- [17] H.-O. PEITGEN - P.H. RICHTER, *La bellezza dei frattali*, Bollati Boringhieri, Torino, 1987.
- [18] KIRTI TRIVEDI, *Indu temples: model of a fractal universe*, The Visual Computer, 5, 243-258, Springer Verlag (1989).
- [19] P. QUÉAU, prefazione de F. Dagognet, *Eloge de la simulation. De la vie des langages à la synthèse des images*, Collection Milieux, Champ Vallon, 1986.
- [20] E. CASTELLANI, *Simmetria e natura, Dalle armonie delle figure alle invarianze delle leggi*, Presentazione di Giulio Giorello, Editori Laterza, Roma-Bari 2000.

Giuseppe Caglioti, Dipartimento Ingegneria Nucleare
 Politecnico di Milano, via Ponzio, 34/3 I-20133 Milano, Italy

e

Istituto Nazionale Fisica della Materia, UR 6, Milano, Italy
 e-mail: giuseppe.caglioti@polimi.it