Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria G. Bartolini Bussi

Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani. In ricordo di Francesco Speranza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.1, p. 117–150.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_1_117_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Aprile 2001, 117-150

Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani.

MARIA G. BARTOLINI BUSSI

In ricordo di Francesco Speranza

Abstract. – *Some studies of research for didactical innovation in mathematics are reviewed and contextualized within both the Italian tradition of didactical research and the international literature.*

1. – Introduzione.

Negli ultimi trent'anni la didattica della matematica è comparsa sulla scena internazionale come una disciplina accademica. Quest'apparizione tardiva può stupire, poiché, se pure con livelli diversi di sistematicità, le speculazioni sui modi di apprendere la matematica, le indicazioni e gli esempi relativi ai modi di organizzare e trasmettere le conoscenze matematiche sono, com'è noto, molto antichi. Basta citare i molti riferimenti alla matematica nella teoria della conoscenza in Platone e i testi relativi a collezioni di problemi (il Papiro Rhind dall'Egitto, The Nine Chapters of Arithmetics dalla Cina) o a trattati sistematici (come quelli di Euclide ed Apollonio) a noi giunti fino dall'antichità.

In tempi più recenti, la riflessione sui modi di apprendere — insegnare la matematica ha assunto uno statuto diverso. In seguito alla nascita delle istituzioni educative in senso moderno nel mondo occidentale, a partire dall'ottocento, diversi matematici di valore furono impegnati nel dibattito sulla determinazione dei contenuti essenziali della matematica scolastica e della conseguente necessaria formazione degli insegnanti.

Alla fine del secolo XIX, la sensibilità dei matematici verso i problemi dell'insegnamento della loro disciplina fu testimoniata dalla costituzione di riviste e di organismi internazionali ad essi dedicati. Nel 1899 fu fondata a Ginevra la rivista *L'Enseignement Mathématique*, due anni dopo l'organizzazione del primo *Congresso Internazionale dei Matematici* (Zurigo, 1897). Durante il congresso internazionale di Roma (1908) fu costituita la *Commissione Internazionale sull'Insegnamento della Matematica* (ICMI), che operò inizialmente sotto la presidenza di Felix Klein. L'ICMI, dopo un'interruzione del lavoro nel periodo compreso tra le due guerre mondiali, fu ricostituita nel 1952, come commissione ufficiale dell'IMU (l'*Unione Matematica Internazionale*). Nel 1969 si svolse a Lione il primo congresso ICME (*International Conference on Mathematics Education*), a cui seguirono l'ICME2 ad Exeter nel 1972 e poi con cadenza quadriennale congressi internazionali fino all'ICME9 svolto nell'estate 2000 a Tokyo e all'ICME10 annunciato per il 2004 a Copenaghen.

A partire dalla metà degli anni '70 furono costituiti diversi gruppi di studio, affiliati all'ICMI: HPM (1976) *The International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics;* PME (1976) *The International Group for the*

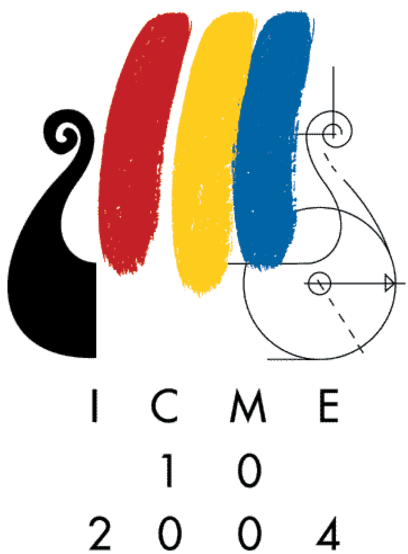

TAVOLA 1. – Il logo di ICME10 (http://www.icme-10.dk/)

Psychology of Mathematics Education; IOWME (1987) *The International Organization of Women and Mathematics Education;* WFNMC *The World Federation of National Mathematics Competitions* (1994). Da allora si svolsero con cadenza annuale i congressi internazionali PME (nel 1991, si tenne in Italia, ad Assisi), divenuti rapidamente il principale punto di incontro internazionale dei ricercatori sulla didattica della matematica.

In parallelo, a partire dal 1950, fu costituita la CIEAEM (*Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*), con la partecipazione di personalità quali C. Gattegno, J. Dieudonné, F. Gonseth, J. Piaget, A. Lichnerowicz. La CIEAEM, fino dall'inizio, raccolse ricercatori da aree diverse (psicologia e matematica, soprattutto) ed anche numerosi insegnanti. Tra questi un ruolo importante fu svolto da Emma Castelnuovo, attiva nella Commissione fino dal 1954 ([1]).

La presenza di ricercatori provenienti da aree disciplinari diverse caratterizzò anche i gruppi PME e HPME. In molti paesi la formazione dei dottorandi e dei ricercatori sulla didattica della matematica fu organizzata seguendo due percorsi paralleli, nell'ambito dei Dipartimenti di Scienze dell'Educazione o nell'ambito dei Dipartimenti di Matematica, con la partecipazione di neolaureati in Scienze dell'Educazione o in Matematica e insegnanti già in servizio nei diversi ordini di scuole. Nel nostro paese l'attività di ricerca fu avviata (con rare eccezioni) presso i Dipartimenti di Matematica, con scarsi contatti con i Dipartimenti di Scienze dell'Educazione. Notevole fu fino dall'inizio il coinvolgimento degli insegnanti, sulla strada avviata da Emma Castelnuovo, con la creazione di un gruppo stabile di *insegnanti — ricercatori*, che, pur restando a tempo pieno nella scuola, partecipavano con assiduità a tutte le fasi di svolgimento della ricerca. Informazioni più dettagliate sullo sviluppo storico della ricerca Italiana sono contenute in diversi volumi preparati e distribuiti in occasione degli ultimi congressi ICME, a cura di

([1]) Nel 2001 l'incontro si terrà in Italia (http://www.dm.unito.it/cieaem53/index.html).

commissioni nominate dal Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica [2].

Le brevi note che precedono mostrano che è impossibile dare conto, nello spazio di un articolo, degli obiettivi, dei problemi e dei metodi che caratterizzano la ricerca sulla didattica della matematica, così come essa si è venuta configurando a livello internazionale negli ultimi decenni. Né è possibile tenere conto solo di ciò che è avvenuto nel nostro paese, poiché, come vedremo, certi fenomeni possono essere rilevati e analizzati solo in una prospettiva più ampia, che fa riferimento alla letteratura internazionale. L'impresa non è priva di rischi, poiché, rispetto a ciò che avviene per altre discipline scientifiche, uno studio di didattica della matematica incontra una difficoltà aggiuntiva: non è sempre facile comunicare alla comunità internazionale le caratteristiche rilevanti di uno studio svolto in un certo contesto culturale e sociale.

Esistono, naturalmente, testi di riferimento utili: oltre agli atti dei congressi internazionali (ad es. ICME, PME, HPME, CIEAEM), vi sono

1) manuali destinati alla formazione dei futuri ricercatori (Grows, 1992; Bishop e al., 1996; English et al., in stampa);

2) studi internazionali dedicati alla caratterizzazione della ricerca in didattica della matematica (Biehler e al., 1994; Kilpatrick e Sierpinska, 1998)

3) saggi pubblicati da singoli ricercatori che affrontano il problema della definizione del campo di ricerca dal loro particolare punto di vista (ad es. Niss, 1998; Artigue, 1999; Schoenfeld, 2000).

Quest'articolo appartiene all'ultimo filone. Come negli altri saggi, la scelta dei temi trattati e degli esempi discussi è fortemente condizionata dall'esperienza particolare di chi scrive. In quest'articolo ho

[2] L'ultimo di tali volumi, curato da N. A. Malara, P. L. Ferrari, L. Bazzini e G. Chiappini e stampato in un numero limitato di copie dal Dipartimento di Matematica di Modena, è disponibile on-line all'indirizzo:
http://www.matematica.unimo.it/matheduc/home.htm.

scelto di presentare un modello di ricerca (la *ricerca didattica per l'innovazione in matematica*) messo a punto in Italia e valutato con molto interesse dalla comunità internazionale, illustrandone le caratteristiche a partire da alcuni studi, condotti negli ultimi anni nell'ambito di un solo progetto coordinato intersede e già pubblicati o in corso di stampa su riviste o volumi con comitati editoriali internazionali.

2. – La ricerca didattica per l'innovazione in matematica.

2.1. *L'inizio.*

Alla metà degli anni '70, Il Comitato per la Matematica del CNR, allora presieduto da Carlo Pucci, e l'Unione Matematica Italiana, presieduta da Enrico Magenes, promossero la costituzione di Nuclei di Ricerca Didattica, presso gli Istituti di Matematica delle varie Università. Il rendiconto delle prime attività fu presentato a Bologna nel 1976 e pubblicato nel *Supplemento al Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* (giugno 1976). I Nuclei erano gruppi misti costituiti da docenti universitari e insegnanti dei diversi ordini di scuole: la loro attività era finalizzata alla progettazione e alla realizzazione di esperimenti didattici innovativi, coerenti con quanto si dibatteva a livello internazionale. Tra i responsabili dei Nuclei finanziati dal CNR troviamo accanto a nomi di amici che ci hanno lasciato, nomi di colleghi, che hanno poi continuato per anni quest'attività di ricerca didattica (citiamo, tra gli altri, Luigi Campedelli, Vittorio Checcucci, Mario Dolcher, Mario Ferrari, Aldo Morelli, Giovanni Prodi, Francesco Speranza, Bruno Spotorno, Giovanni Torelli, Elda Valabrega, Vinicio Villani, Ferdinando Arzarello, Paolo Boero). L'esperienza maturata fu preziosa e fu gradualmente trasposta nella redazione dei programmi scolastici nazionali per la scuola media (1979), per la scuola elementare (1985) e per il biennio della scuola secondaria superiore (1987), grazie al contributo fornito da alcuni dei direttori dei Nuclei, che furono convocati nelle commissioni ministeriali per il rinnovamento dei programmi.

La ricerca svolta nei Nuclei di Ricerca Didattica fu in quel perio-

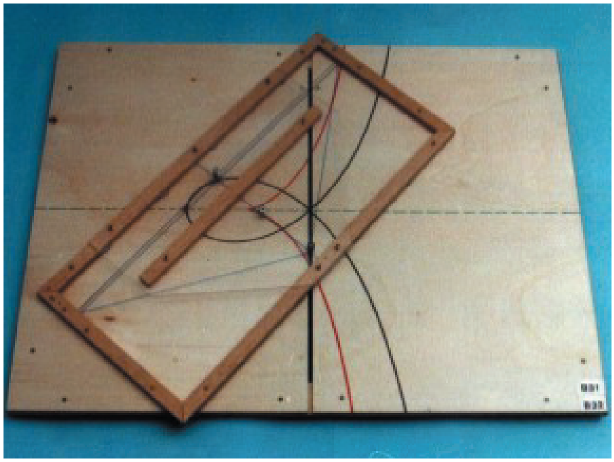

TAVOLA 2. – Squadra di Newton

do il risultato dell'interazione di due diverse tradizioni: la riflessione sui contenuti, svolta dai matematici delle Università, per evidenziare i nuclei epistemologici fondamentali della discipline; la ricerca sul campo, svolta direttamente nella classe dagli insegnanti, per migliorare, nella pratica, l'insegnamento della matematica.

In altri paesi europei (come la Francia e la Germania), dove pure erano presenti queste due diverse tradizioni, la tensione verso il riconoscimento accademico della didattica della matematica come disciplina scientifica, portò ad una quasi completa separazione tra le forme di ricerca «teorica» (centrate sui contenuti) e le forme di ricerca sul campo (centrate sui metodi).

Nel nostro paese, fortunatamente, si intraprese la via, lunga e faticosa, di una progressiva integrazione delle due tradizioni. La necessità della ricaduta sociale della ricerca è stata sempre sostenuta da Giovanni Prodi, che per molti anni fu il coordinatore centrale del progetto nazionale di ricerca didattica finanziato prima dal MPI e poi dal MURST. La durata nel tempo (forse, il successo) di questa scelta è dipeso in larga misura dal coinvolgimento personale dei docenti universitari e degli insegnanti che svolgevano questo compito in modo del tutto volontario e senza riconoscimenti ufficiali da parte delle istituzioni di appartenenza. Il compito era gravoso sia per gli insegnanti, di norma assai impegnati anche nella scuola, sia per gli universitari che aggiungevano alle attività istituzionali l'aggiornamento degli insegnanti e la ricerca didattica. Importanti sono stati i finanziamenti del CNR, mantenuti per una ventina d'anni, che hanno permesso di avviare i contatti con la comunità internazionale, invitando in Italia ricercatori stranieri o inviando studiosi italiani ai congressi internazionali (ICME, PME, CIEAEM, ecc.).

2.2. *La transizione.*

Nei congressi PME, gli studiosi italiani vennero in contatto con una diversa tradizione di ricerca: con metodi presi a prestito dalla psicologia, dalla sociologia, dalla pedagogia, ecc., si studiavano i processi innescati nei singoli allievi o nei piccoli gruppi nel corso della soluzione di problemi. La classe diventava una sorta di laboratorio, dove erano pianificate ed osservate (di solito da osservatori esterni) sedute di *problem solving.*

Un'influenza complementare fu esercitata dalla scuola Francese, che si stava costituendo sulla base dei lavori di Brousseau, Vergnaud e Chevallard. Iniziò un intenso scambio di studiosi italiani e francesi, favorito dalla vicinanza geografica e da alcune sintonie culturali. Un prodotto di tale collaborazione, ancora vitale, è stato il *Seminario Franco-Italiano di Didattica dell'Algebra* (SFIDA), giunto nel 2001 alla 16ª sessione. Uno dei punti di disaccordo riguardò inizialmente la negazione del ruolo dell'insegnante come soggetto di ricerca nella teoria sviluppata dalla scuola Francese. In tale scuola, negli studi di microdidattica, si assumevano come oggetti d'indagine lo studente, l'insegnante e il sapere e le loro relazioni e, negli studi di macrodidattica, era focalizzato il ruolo dell'istituzione scolastica. Tuttavia la scuola Francese ha esercitato un'influenza non trascurabile per due aspetti:

a) identificare alcuni punti di debolezza del lavoro svolto in precedenza, quando i prodotti della ricerca sul campo non erano adeguatamente analizzati per rilevare le ragioni del successo o le cause di un possibile futuro insuccesso;

b) offrire un modello in grado di trasformare fatti osservati nell'attività di classe in fenomeni di una teoria della didattica.

2.3. *Un nuovo punto di vista.*

L'interazione, nella particolare realtà dei Nuclei, tra le tradizioni interne (riflessione sui contenuti; ricerca sul campo) e le tradizioni esterne (osservazioni nella classe-laboratorio; costruzione di una teoria dei fenomeni didattici) portò a chiarire gli obiettivi e i metodi della ricerca didattica per l'innovazione. Gli insegnanti — ricercatori giocarono un ruolo essenziale in questo processo. Spostarono l'attenzione dall'osservazione dei processi di breve termine (oggetto quasi esclusivo delle ricerche condotte in altri paesi all'interno della classe-laboratorio) all'osservazione dei processi di lungo termine, particolarmente interessanti e significativi in Italia per la lunga permanenza di un insegnante nella stessa classe. Sottolinearono il ruolo dell'insegnante, non come oggetto di osservazione, ma come soggetto di decisioni nella ricerca.

Le animate discussioni sulle caratteristiche della ricerca si svolgevano nei periodici incontri annuali tra i Nuclei di Ricerca Didattica operanti nei diversi ordini di scuole e, a partire dal 1987, nei Seminari Nazionali, tenuti a Pisa almeno una volta l'anno, per discutere con maggiore profondità alcuni studi, in presenza di correlatori e controrelatori di varia estrazione scientifica (matematica, fisica, psicologia, pedagogia) provenienti dall'Italia o da altri paesi.

Nel 1991, l'ottava sessione del Seminario Nazionale fu dedicata a *Ricerca Didattica e Insegnamento della Matematica.* In questa sessione si caratterizzò il nucleo principale della ricerca Italiana definendone gli obiettivi nel modo seguente:

a) produrre esempi paradigmatici per migliorare l'insegnamento — apprendimento della matematica (nella forma di progetti per l'intero curricolo o per alcune parti limitate di esso);

b) studiare le condizioni per la loro concreta realizzazione, ovvero i possibili fattori di insuccesso;

c) produrre costrutti teorici innovativi, utili per interpretare i fenomeni osservati e per guidare l'azione degli insegnanti in classe;

d) produrre metodologie didattiche innovative, che si oppongono ad alcuni stereotipi dell'insegnamento (ad esempio i modi di osservare i processi in opposizione alla sola verifica dei prodotti).

Si incominciò ad usare il termine *ricerca didattica per l'innovazione (in matematica)* per richiamare questo filone, che non ha esaurito il complesso degli studi condotti nel seguito in Italia, ma ne ha raccolto una parte rilevante e riconosciuta dalla comunità internazionale. Molti di questi studi hanno una componente epistemologica (l'analisi dei contenuti), una componente sperimentale (l'azione nella classe), una componente cognitiva (l'analisi dei processi individuali e collettivi) e una componente didattica (l'analisi dell'interazione e del ruolo dell'insegnante). Le diverse componenti non sono studiate separatamente, ma sono prese in considerazione in modo globale e interfunzionale. Alcuni esempi saranno presentati brevemente nel seguito (per un approfondimento del modello teorico della ricerca, vedi Arzarello e Bartolini Bussi, 1998).

3. – Risultati di alcuni studi.

3.1. *La collocazione della ricerca.*

I risultati della ricerca didattica per l'innovazione condotta in Italia possono essere collegati a due delle categorie descritte nel documento preliminare allo Studio ICMI di Washington (Sierpinska e Kilpatrick, 1998, 1-32):

Energizers of practice: teaching materials, activities and challenging problems ([3]).

([3]) Per dare energia alla pratica: materiali per l'insegnante, attività e problemi in grado di sfidare l'allievo.

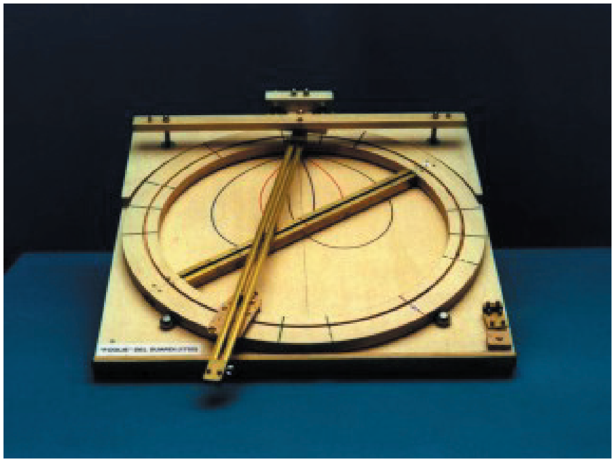

TAVOLA 3. – Foglie di Suardi

Economizers of thought: Any facts, laws, methods, procedures or theories that are general enough to direct our experience and predict its results ([4]).

La separazione delle due categorie, presente nel documento citato, rischia però di mettere in ombra una caratteristica fondamentale degli studi italiani, già sottolineata in precedenza: la proposta (sperimentata almeno una volta) di una sequenza di problemi o dell'attività di esplorazione di un campo di esperienza è accompagnata dall'analisi dei fenomeni osservati, fino alla individuazione di leggi generali, costrutti teorici o modelli, che consentono di interpretare i dati delle osservazioni e prevederne la replica (successo) o la mancata replica (insuccesso) nella ripetizione dell'esperimento in un'altra classe.

Per dare alcuni esempi di tali risultati, attingerò agli studi prodotti in varie sedi (Genova, Modena, Pisa e Torino), nell'ambito di uno stesso progetto coordinato sull'*approccio alla dimensione teorica della matematica.* Il progetto è nato da un problema reale dell'insegnamento, molto discusso nella letteratura internazionale (ve-

([4]) Per economizzare il pensiero: ogni fatto, legge, metodo, procedura o teoria, abbastanza generale da dirigere la nostra esperienza e predire i suoi effetti.

di, ad esempio, Hanna e Jahnke, 1996; e la rivista on-line *Newsletter on Proof,* (http://www-cabri.imag.fr/Preuve).

Questi studi sono ben inseriti nella letteratura internazionale. Non è un caso che il coordinatore del gruppo di Pisa (M. Alessandra Mariotti) sia anche il direttore della rivista appena citata, che costituisce il forum internazionale più vivace ed aggiornato sulla didattica della dimostrazione, e che il coordinatore del gruppo di Genova (Paolo Boero) sia membro del comitato editoriale della stessa rivista.

3.2. *Il problema didattico.*

Una delle caratteristiche della matematica è la sua organizzazione teorica. Questa caratteristica ha contribuito a creare nell'ultimo secolo uno stile peculiare alle riviste scientifiche di matematica, con una forma riconoscibile dall'esterno, che si concreta nell'alternanza di definizioni e teoremi, con scarsa attenzione ai discorsi di inquadramento nei quali se ne ricostruisce il significato. Tuttavia, quando un matematico legge un teorema e, in particolare, la sua dimostrazione, non è certo la forma a catturare il suo interesse, ma piuttosto il processo per mezzo del quale nuove idee sono state generate o vecchie idee sono state rilette in modo nuovo nel corso della dimostrazione. Molto significative sono, in questo senso, le «confessioni» di alcuni matematici professionisti (si veda il dibattito avviato sul *Bullettin of the American Mathematical Society* da Jaffe e Quinn, 1993, e Thurston, 1994). Si ha, nella maggior parte dei casi, l'impressione di un processo (spesso collettivo) continuo, di una sorta di viaggio che consente di costruire nuove conoscenze a partire da cose note.

La discontinuità più grande appare nella fase finale, quando un lavoro è pubblicato su una rivista scientifica: nell'articolo, le idee guida, le intuizioni, le associazioni mentali, le metafore, le esplorazioni di casi particolari che hanno condotto al risultato sono spesso nascoste sotto il formidabile stile della comunicazione matematica convenzionale e possono emergere solo dopo un lavoro di decodifica, tanto più lungo e faticoso quanto minore è la padronanza dell'argomento da parte del lettore.

Queste caratteristiche della comunicazione (scritta) tra matematici hanno avuto anche conseguenze sul piano pedagogico. Negli anni '60, sotto l'influsso del bourbakismo, si sviluppò una rivoluzione curriculare (la cosiddetta «Matematica moderna») che diede molta importanza proprio al prodotto finale (la forma della dimostrazione inserita in un quadro assiomatico rigoroso) e mise in ombra il processo (la «invenzione» della dimostrazione). Anche negli Stati Uniti ci fu negli stessi anni la tendenza a trasferire direttamente nell'insegnamento la visione formalista della matematica. Non mancarono, naturalmente, oppositori anche illustri. Proprio in Francia, patria del gruppo Bourbaki e sede della riforma più radicale dell'insegnamento (la riforma Lichnerowicz del 1969-1971), si levò la voce di Thom (1972):

Il problema vero e proprio di fronte a cui si trova l'insegnamento della matematica non è quello del rigore, ma il problema dello sviluppo del «significato», dell'esistenza degli «oggetti matematici». [...] L'enfasi posta dai modernisti sull'assiomatica non è solo un'aberrazione pedagogica (cosa abbastanza ovvia), ma anche un'aberrazione matematica vera e propria. Non si è ricavata, credo, dall'assiomatica di Hilbert la vera lezione in essa contenuta: si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato; il rigore assoluto è possibile soltanto e per mezzo di tale abbandono di significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare.

Il risultato di queste riforme fu un fallimento, in particolare per quanto riguarda l'approccio agli aspetti teorici della matematica: gli studenti inesperti non riuscivano a dominare i formalismi delle dimostrazioni e si limitavano, nel migliore dei casi, ad una memorizzazione automatica. Ci fu una reazione molto forte e, in alcuni paesi, si giunse ad una quasi completa scomparsa dal curricolo degli aspetti teorici della matematica, ed in particolare della dimostrazione. Ad esempio, questa eliminazione fu resa ufficiale negli Stati Uniti dagli Standards del 1989 (fortunatamente, gli Standards 2000 hanno riconsiderato il problema).

In questo scenario, all'inizio degli anni '90, un gruppo di ricercatori Italiani iniziò una serie di studi coordinati, alla base dei quali stava la convinzione del profondo valore culturale della organizzazione teorica della matematica.

Il generale fallimento degli studenti richiedeva un approccio diverso da quello in vigore, un approccio che consentisse di conquistare il significato avviando contemporaneamente una graduale conquista del rigore che caratterizza un ragionamento matematico. Per realizzare questo obiettivo, non è sufficiente il riferimento alle analisi sulla dimostrazione condotte dai logici, poiché c'è una differenza fondamentale tra la matematica del matematico professionista e la matematica del professore di matematica:

> *I matematici professionisti prendono per dati gli assunti espliciti o impliciti che stanno dietro il lavoro matematico. Questi assunti sono determinati in parte dalla divisione del lavoro tra la matematica e le altre scienze, e, in parte, da un consenso sociale, mantenuto per abitudine, tra gli esperti di un dato settore [...].*
>
> *Nell'insegnamento e nell'apprendimento, invece, assumono importanza molte questioni che il matematico professionista può spesso permettersi di ignorare. In particolare non si può insegnare o imparare a dimostrare senza prendere in considerazione le relazioni tra matematica e realtà. Gli insegnanti devono occuparsi del contributo che una dimostrazione può dare alla nostra comprensione del mondo fisico e intellettuale che ci circonda. Mentre i matematici possono concentrarsi quasi esclusivamente sulla complessità matematica, gli insegnanti devono occuparsi di un alto livello di complessità epistemologica. L'educazione matematica ha di fronte in questo senso una autentica sfida scientifica ed epistemologica.* (Hanna e Jahnke, 1996).

Proprio a questa sfida, con i risvolti cognitivi resi necessari dalla presenza di soggetti che devono imparare, hanno iniziato a dare risposta diversi studi sviluppati in Italia.

3.3. *Le caratteristiche comuni ai vari studi.*

Nei diversi studi pubblicati da ricercatori Italiani, su riviste o volumi con comitato editoriale internazionale o presentati in occasione di importanti convegni, si progettano, si realizzano e si analizzano esperimenti didattici, nei quali si persegue l'obiettivo di lungo termine di introdurre gli allievi al pensiero teorico. Si opera con allievi di varie età (dalla scuola elementare all'Università), di varie estrazioni socio — culturali e con riferimento ad aree diverse della matematica (soprattutto, per ora, l'aritmetica, l'algebra, la geometria e l'analisi). Quasi tutti gli esperimenti hanno caratteristiche comuni:

1) la scelta (in certi casi, come vedremo, la costruzione secondo criteri dettati dalla ricerca didattica) sulla base di una analisi storico epistemologica, *di campi di esperienza* (5) significativi, in cui gli allievi possano svolgere in prima persona attività esplorative complesse (ad esempio, per la geometria, gli ambienti per la *geometria di-*

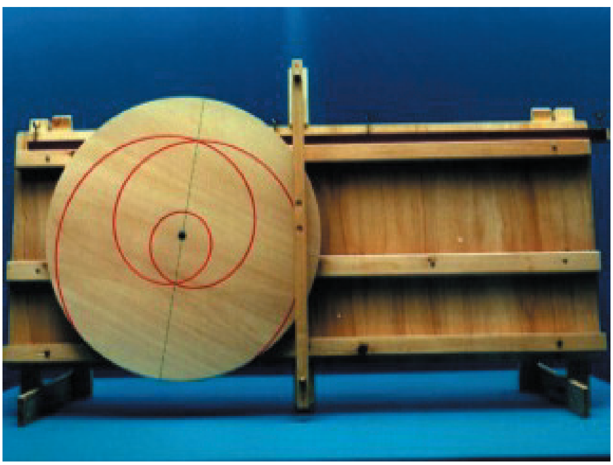

TAVOLA 4. – Spirale di Archimede

(5) Si usa il termine *campo di esperienza*, introdotto inizialmente da Boero, per denotare *il sistema di tre componenti evolutive (il contesto esterno, il contesto interno dello studente e il contesto interno dell'insegnante) riferito ad un settore della cultura umana riconosciuto e considerato unitario ed omogeneo dall'insegnante e dagli studenti* (vedi Mariotti e al., 1997).

namica (6), come Cabri - Géométre; le ombre solari; la rappresentazione prospettica; gli strumenti da disegno);

2) la progettazione, con una accurata analisi a priori, di compiti, nei quali gli studenti sono coinvolti nell'intero processo di produzione di congetture, di costruzione di dimostrazioni e di generazione di embrioni di organizzazione teorica;

3) il ricorso ad una varietà di modi di condurre la lezione, che affianca alla tradizionale lezione frontale momenti individuali di esplorazione e soluzione di problemi, attività di piccolo gruppo, discussioni collettive di tutta la classe sotto l'orchestrazione dell'insegnante;

4) la valorizzazione di tutte quelle forme di redazione «sporca» delle proprie idee e dei propri tentativi anche falliti che precedono il prodotto finale;

5) il riferimento esplicito (tutte le volte che è utile e necessario) a fonti storiche primarie, accuratamente selezionate e commentate, in ogni livello scolastico.

Gli strumenti analitici utilizzati sono a volte mutuati da altre discipline. Così, per lo studio dei processi messi in opera dagli allievi, si utilizzano costrutti teorici presi dalla psicologia: tra questi, negli studi Italiani sul pensiero teorico, sono da ricordare come particolarmente rilevanti quelli della scuola Vygotskiana, attiva in Russia a partire dai primi decenni del XX secolo. Per lo studio dei fenomeni didattici, invece, si traspongono al caso della matematica strumenti mutuati dalle scienze dell'educazione: tra questi, sono importanti

(6) Un software per la geometria dinamica permette di costruire sullo schermo figure caratterizzate da tutte (e sole) le proprietà geometriche che sono state utilizzate per la loro costruzione. In tale ambiente esiste uno strumento di esplorazione potente (il *dragging* o trascinamento dei punti con almeno un grado di libertà) che consente di realizzare sullo schermo le trasformazioni subite da una figura quando un punto usato nella costruzione viene mosso, mentre si conservano tutte le relazioni geometriche tra gli elementi che sono state imposte in modo esplicito durante la costruzione. Il software per la geometria dinamica più diffuso in Italia è Cabri, nelle sue diverse versioni. Vi sono anche altri software con caratteristiche simili: ad esempio, The Geometer's Sketchpad, diffuso soprattutto nelle scuole nordamericane; Cinderella, e GEX, apprezzati dai matematici, ma scarsamente diffusi nella didattica.

quelli studiati nella scuola Francese. Non mancano, naturalmente, costrutti teorici originali, sviluppati per esigenze interne

3.4. *Alcuni esempi.*

Esempio 1. L'iniziazione al pensiero teorico.

L'approccio al pensiero teorico e alla dimostrazione è stato affrontato con allievi molto giovani (scuola elementare) di estrazione socio-culturale bassa, da parte dell'unità di ricerca di Modena, diretta dall'autrice di questo articolo. La giovane età degli allievi non deve stupire, poiché nello stesso progetto coordinato sono state condotte altre ricerche riguardanti allievi della scuola elementare. Valga per tutti l'esempio dello studio pubblicato da Douek (1999), basato su osservazioni svolte nella scuola elementare di Piossasco (Torino), nel quale si analizza il delicato rapporto tra argomentazione e concettualizzazione per attività di geometria dello spazio sviluppate nel campo di esperienza delle ombre solari.

Il progetto di Modena riguarda la modellizzazione degli ingranaggi. Nelle classi osservate (allievi di 4-5 elementare o di scuola media: età 9-14 anni) la maggior parte degli allievi giunge a produrre enunciati in forma generale, astratta e condizionale sul movimento di ingranaggi anche complessi (congetture di interpretazione o di previsione) e a costruire diversi tipi di argomentazioni per sostenerli; il processo si intreccia con la costruzione collettiva di (germi di) teorie che consentono di attribuire a tali produzioni lo statuto di teoremi matematici.

Può essere significativo riportare alcune tappe del percorso didattico (maggiori dettagli sono in Bartolini Bussi e al., 1999).

1) manipolazione di ingranaggi (sistemi di ruote dentate e/o cremagliere) presenti in oggetti della vita quotidiana o in giochi per costruzioni (Lego e simili);

2) osservazione del funzionamento, fino alla scoperta di una legge generale che costituisce l'unico «postulato» del germe di teoria sul funzionamento degli ingranaggi: *due ruote dentate ingranate complanari girano in versi opposti*;

3) applicazione del postulato a catene complesse di ingranaggi, per prevedere o interpretare il comportamento della n-ma ruota;

4) scoperta dell'ingranaggio impossibile (tre ruote complanari ingranate a due a due) e verifica pratica del blocco (*niente si muove*);

5) interpretazione del blocco con argomentazioni che richiamano l'unico postulato;

6) costruzione collettiva del germe di teoria sul funzionamento degli ingranaggi, con il riferimento esplicito ad una fonte storica (un breve brano della *Meccanica* di Erone).

Il problema del blocco crea condizioni favorevoli alla messa in atto di primi embrioni di dimostrazioni per assurdo. Le dimostrazioni si basano su autentici esperimenti mentali nel corso dei quali si simula il funzionamento (impossibile) dell'ingranaggio giungendo ad una contraddizione. Nei protocolli degli allievi ci sono frasi del tipo:

Nella ruota B non metto il verso perché A e C vanno bene, ma se metto il verso a B o va bene con A o con C, ma non con tutte e due (Fig. 1) oppure *Una ruota gira in verso orario, un'altra in verso*

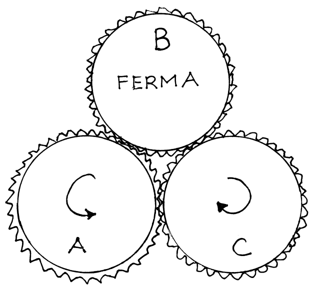

Fig. 1

antiorario; la terza non può girare in verso orario perché tocca la prima, né in verso antiorario perché tocca la seconda (Fig. 2).

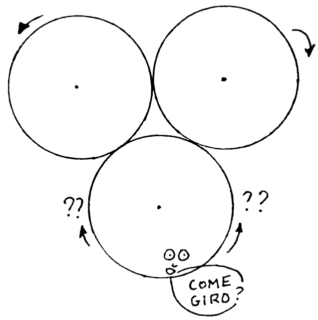

Fig. 2

Le argomentazioni precedenti fanno riferimento ad una visione globale della ruota durante il movimento. Ma ci sono anche argomentazioni locali che fissano l'attenzione sul singolo dente.

Le prime due ruote girano in versi opposti; e questo è OK, ma c'è una terza ruota che ingrana entrambe; è una specie di blocco perché il dente si romperebbe. Infatti le due ruote girano in versi opposti e un dente [della prima] spingerebbe un dente della ruota in un verso mentre c'è un dente [della seconda] che spinge questo dente nell'altro verso. Conclusione: se le ruote sono messe in questo modo, non possono girare.

I disegni con suggestioni dinamiche che a volte accompagnano le argomentazioni non sono rappresentazioni di esperimenti reali: nella realtà, infatti, non si ha nessun movimento. Sono, piuttosto, rappresentazioni esterne di esperimenti mentali, nei quali si può immaginare il movimento anche quando questo è, di fatto, impossibile.

Lo studio pubblicato non si limita a documentare la (pur interessante e provocatoria) produzione di protocolli di questo tipo da parte della quasi totalità degli allievi di molte classi elementari e medie. L'aspetto più importante riguarda la presentazione di un modello sulla genesi e lo sviluppo di un sistema di segni per la soluzione di problemi anche complessi (per l'età degli allievi) e per la costruzione delle relative dimostrazioni. L'analisi di alcune centinaia di protocolli documenta l'evoluzione, sotto la guida dell'insegnante, dai «segni» che fanno riferimento all'oggetto reale a un sistema di segni la cui sintassi è dominata dagli allievi senza più alcun riferimento esplicito al processo che l'ha generato. I primi comprendono i gesti di azione (la mano che mette in moto di una ruota) o di simulazione (la mano che simula il movimento di una ruota), i segni grafici (frecce; usi del colore; codici numerici) e le metafore linguistiche. Il prodotto finale è un modello algebrico del funzionamento di ingranaggi piani di ruote dentate, coincidente con il gruppo ciclico di ordine 2, $G_2 = (\{+1, -1\}, \circ)$, in cui ciò che conta per prevedere o interpretare il movimento è solo la parità del numero dei fattori.

L'utilizzo diretto di fonti storiche con allievi così giovani non rappresenta un caso isolato. In altri esperimenti sviluppati a Modena, sono stati introdotti produttivamente nelle classi elementari brani tratti dalla storia della prospettiva, in particolare dal *De Prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca (Bartolini Bussi, 1996). L'efficacia del ricorso alle fonti storiche per mediare aspetti caratteristici della conoscenza teorica (l'organizzazione, la coerenza, la sistematicità; il ruolo giocato da definizioni e dimostrazioni; il genere linguistico del discorso teorico e i modi di considerare gli oggetti di una teoria) è studiata in modo esplicito dal gruppo coordinato da Paolo Boero (Boero e al., 1997). È stata messa a punto una ingegneria didattica, caratterizzata dall'introduzione nella classe di «voci» dalla storia della matematica (nella forma di fonti primarie accuratamente scelte e commentate) e dalla definizione di compiti molto particolari che consentono di sviluppare un «gioco voci-echi», adatto a veicolare alcuni elementi importanti della conoscenza teorica.

Esempio 2. Uno strumento generale di analisi: l'unità cognitiva.

Nei casi come quello descritto nel paragrafo precedente, il processo avviato dall'insegnante nella classe procede senza forzature, con una transizione «naturale» da un passo all'altro. Nel caso di un singolo compito, come prevedere o interpretare il funzionamento di un elemento di una catena di ruote dentate, si osserva nei protocolli degli allievi, arricchiti dai diversi segni che li accompagnano, una coerenza tra la descrizione delle esplorazioni condotte sugli oggetti reali o sulle loro simulazioni (grafiche o mentali) e i testi dimostrativi prodotti successivamente. Sta forse qui uno dei segreti che rendono possibili la realizzazione di compiti così complessi in relazione alla giovane età degli allievi?

La risposta sembra essere affermativa. In questo esperimento si è realizzata, nei compiti cruciali, ciò che è chiamata *unità cognitiva*, intesa come continuità e coerenza tra il processo di produzione di una congettura e il processo di costruzione di una dimostrazione. Ecco come è descritta l'unità cognitiva dagli autori (del gruppo di Genova, coordinato da Paolo Boero) che l'hanno riconosciuta e formulata inizialmente.

Durante la produzione di una congettura, il soggetto giunge a formulare un enunciato attraverso un intenso processo argomentativo, intrecciato in modo funzionale con la giustificazione della plausibilità delle sue scelte. Nel corso del successivo processo di dimostrazione, lo studente ricostruisce questo processo in modo coerente, organizzando alcuni degli argomenti prodotti in precedenza in una catena logica (vedi anche Mariotti e al., 1997).

Quando c'è unità cognitiva, c'è una stretta corrispondenza tra la natura e gli oggetti dell'attività mentale coinvolti nei due processi. Nei protocolli degli allievi, essa si manifesta con l'applicazione di metafore suggerite da una esperienza fisica ad un ragionamento concatenato logicamente. Quando è possibile realizzarlo, il collegamento tra produzione della congettura e costruzione della dimostrazione rende più facile l'approccio alla dimostrazione.

Il costrutto teorico dell'unità cognitiva è stato inizialmente suggerito dall'analisi di protocolli relativi a dimostrazioni di geometria dello spazio, nate nel processo di modellizzazione del fenomeno naturale delle ombre solari. Esso è stato alla base di sviluppi successivi in direzioni diverse, con applicazioni alla geometria dinamica (vedi in seguito) all'algebra e all'analisi con gruppi di studenti di età molto diversa.

Vediamo qualche sviluppo nel campo della geometria.

Se la costruzione della dimostrazione trae vantaggio dalla fase di produzione della congettura, è opportuno proporre nella scuola compiti complessi in cui agli studenti si chiede di produrre congetture e di costruire dimostrazioni, piuttosto che di costruire (o ripetere) dimostrazioni di enunciati già pronti. Questa è, in effetti, la metodologia usata in diversi studi di ricerca didattica per l'innovazione, come, ad esempio, quelli realizzati nel campo di esperienza degli strumenti per la geometria, per tracciare curve o realizzare trasformazioni geometriche (Bartolini Bussi, 1998; alcune foto degli strumenti illustrano questo articolo).

Ma non è sufficiente inserire lo studente in un processo di produzione di congettura — costruzione di dimostrazione, per avere certezze sull'efficacia finale. L'analisi deve essere meglio precisata e raffinata localmente.

Ad esempio, in uno studio ancora in corso, M. A. Mariotti e collaboratori esaminano il costrutto teorico dell'unità cognitiva per comprendere la natura di alcuni compiti di dimostrazione. Si considerano alcuni problemi risolti con carta e matita.

Problema A.

Sia r una retta e P un punto non appartenente a r. Consideriamo un segmento che unisce P con un punto qualsiasi della retta r e prendiamo il punto medio M di tale segmento. Determinare il luogo dei punti medi al variare di P su r.

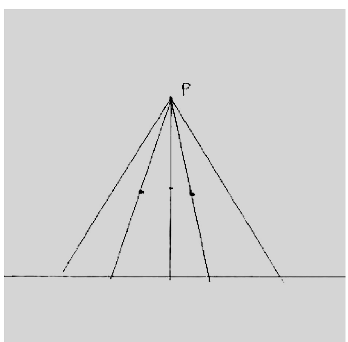

Fig. 3

Problema B.

Dati due segmenti congruenti, costruire due triangoli congruenti che hanno un vertice in comune e i due segmenti dati come lati corrispondenti.

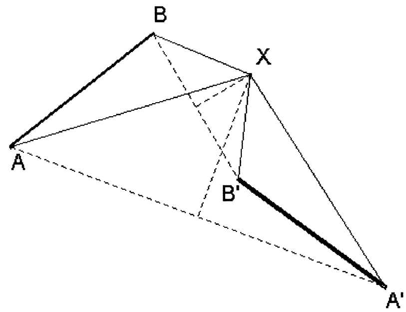

Fig. 4

I problemi sono proposti a soggetti intervistati individualmente, presi da classi terze e quarte di un liceo scientifico. La congettura (Problema A) o la costruzione (Problema B) devono poi essere dimostrate. I dati raccolti comprendono i supporti cartacei su cui è effettuata l'esplorazione o prodotta la costruzione, le videocassette che riprendono lo studente al lavoro, le trascrizioni su carta di tutte le fasi dell'intervista e le osservazioni sul campo dell'osservatore-intervistatore.

L'analisi a priori dei problemi, confermata dai dati sperimentali, porta gli autori ad affermare che, nel caso del problema A, gli studenti giungono velocemente ad una congettura corretta (*il luogo dei punti medi è una retta parallela a* r *e passante per il punto medio di* PP_0 *dove* P_0 *è la proiezione ortogonale di* P *su* r), spesso espressa in forma grafica e non verbale. Ma la risposta, proprio per il suo carattere immediato ed «intuitivo» (basato sull'esplorazione grafica di due o tre casi particolari) non consente una elaborazione delle relazioni geometriche implicate, rendendo così necessaria una nuova esplorazione, per mettere in luce quali proprietà e relazioni possono essere usate nella dimostrazione. In altre parole, anche se lo studente ha prodotto personalmente la congettura, si trova disarmato nella costruzione della dimostrazione, esattamente come accade alla maggior parte degli studenti di fronte ad un compito del tipo: *dimostra che* ... a cui segue un enunciato costruito da altri.

Il problema B offre una conferma indiretta di questa ipotesi. Il problema è più complesso e, almeno per il campione dei soggetti intervistati, non è risolubile in modo veloce. Un soggetto che riesce a produrre una costruzione, lo fa attraverso un lungo processo di elaborazione / esplorazione delle configurazioni possibili, attraverso molti disegni, prove ed errori. Quando finalmente intravede una costruzione, il soggetto ha già accumulato un bagaglio di argomenti di natura teorica (tratti dalle sue conoscenze di geometria elementare), che offrono un buon punto di partenza per la costruzione della dimostrazione.

La situazione si complica se è arricchito l'ambiente del problema. Si può utilizzare, ad esempio, un ambiente di geometria dinamica come quello fornito dal software Cabri. In tale ambiente esiste uno strumento di esplorazione potente (il *dragging* o trascinamento dei punti con almeno un grado di libertà) che consente di vedere sullo schermo le trasformazioni subite da una figura quando un punto utilizzato nella costruzione è mosso, mentre si conservano tutte quelle relazioni geometriche tra gli elementi che sono state imposte in modo esplicito.

Problema C (ambiente dinamico in Cabri).

Sono dati due cerchi C_1 e C_2 con una corda AB in comune. Sia C un punto variabile sul cerchio C_1. Si prolunghino i segmenti CA e CB fino a intersecare il cerchio C_2 in due punti E e F. Che cosa si può dire della corda EF quando C varia su C_1?

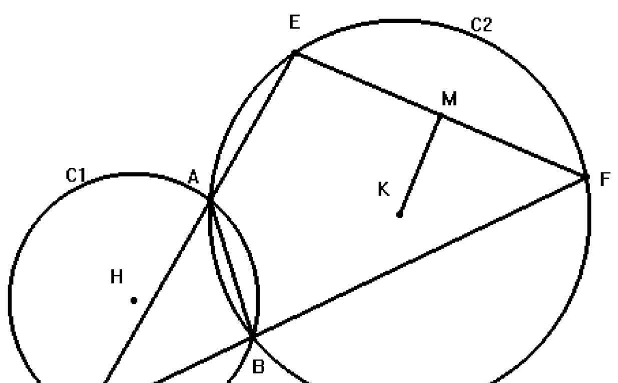

Fig. 5

Attraverso il *dragging* si scopre facilmente che il punto medio di EF varia su un cerchio. Scoprire un invariante per *dragging* equivale, di fatto, a produrre una congettura. Ma c'è un salto non facilmente colmabile tra gli elementi di teoria disponibili (alcuni teoremi della geometria elementare) e gli elementi di conoscenza messi in moto dall'esplorazione dinamica in ambiente Cabri, anche quando questa è lunga e dettagliata. Non tutte le osservazioni fatte in ambiente Cabri hanno una controparte nelle proprietà note, espresse di solito in forma statica. Il costrutto dell'unità cognitiva in un caso come quello dell'ambiente CABRI aiuta a interpretare (a posteriori) e prevedere (a priori) le difficoltà che si incontrano quando l'unità cognitiva è irrealizzabile (o solo parzialmente realizzabile).

Esempio 3. L'analisi fine: il *dragging*.

Il *dragging* apre un campo interessante di ricerca didattica, che può portare ad un utilizzo sempre migliore delle potenzialità di esplorazione dinamica offerte dai software come Cabri. Il *dragging* in ambiente Cabri è oggetto di studio da parte del Nucleo di Ricerca di Torino, diretto da Ferdinando Arzarello. L'analisi del *dragging* è parte di un modello che studia le diverse fasi dell'approccio a un problema geometrico, dalla sua esplorazione alla sua dimostrazione, con particolare attenzione all'attività di congettura. Il modello è costruito a partire dall'osservazione di solutori esperti in ambiente carta e matita ed applicato all'osservazione di studenti in ambiente Cabri. Lo spazio di questo articolo non consente una presentazione dettagliata del modello, nel quale sono integrati costrutti teorici diversi (per approfondimenti e rinvii bibliografici, vedi Arzarello, 2000). Mi limiterò quindi ad accennare un semplice esempio introduttivo.

Consideriamo il seguente problema aperto:

È dato un quadrilatero ABCD. Costruite gli assi dei lati: a di AB, b di BC, c di CD, d di DA. Sia poi A' il punto di intersezione di a e b, B' di b e c, C' di c e d, D' di d ed a. Esplorate come cambia A'B'C'D' al variare di ABCD. Dimostrate le vostre congetture.

Il problema è assegnato a gruppi di studenti di quarta liceo scientifico, che conoscono bene Cabri e sono abituati a queste situazioni di

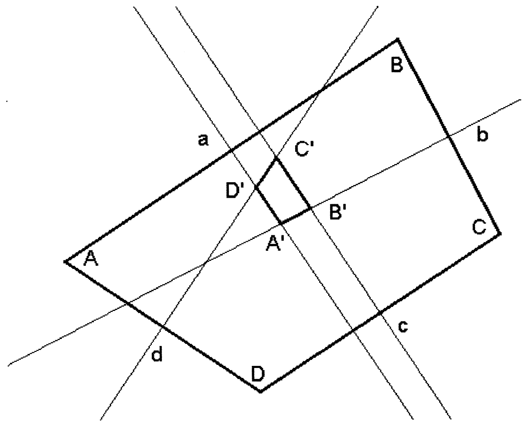

Fig. 6

esplorazione in problemi aperti. Una sequenza parziale della loro strategia può essere così riassunta:

1) disegno accurato della figura dinamica in ambiente Cabri;

2) esplorazione iniziale con il *dragging* della figura, trascinando a turno i vertici di ABCD (fig. 6);

3) esplorazione con il *dragging* della figura, quando ABCD è un quadrilatero particolare (es. parallelogramma, rettangolo, quadrato) (fig. 7)

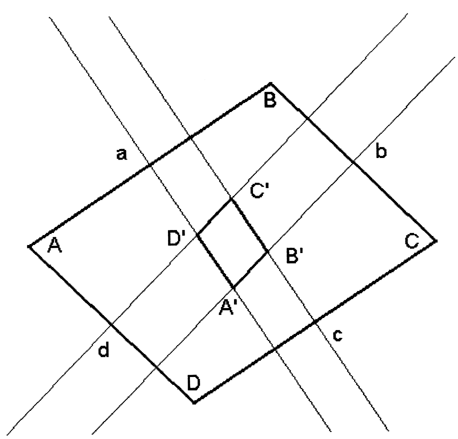

Fig. 7

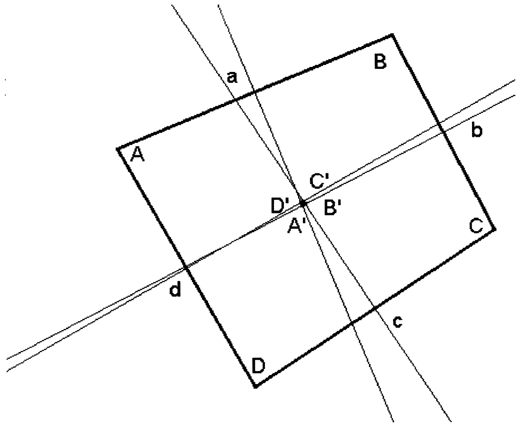

Fig. 8

4) individuazione di una configurazione particolare nella quale i punti A′, B′, C′ e D′ coincidono (almeno percettivamente) (fig. 8);

5) esplorazione con il *dragging* della figura ottenuta, con l'obiettivo di mantenere i punti A′, B′, C′, D′ coincidenti.

6) individuazione di un luogo per il punto B (cerchio passante per A, B e D) che consente di mantenere la coincidenza (fig. 9);

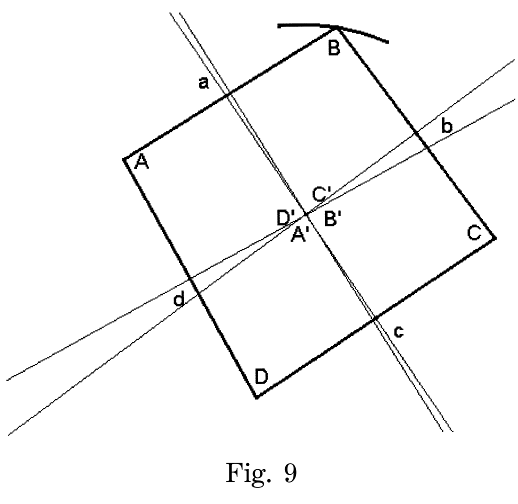

Fig. 9

7) produzione della congettura: se A, B, C e D sono conciclici, A′, B′, C′ e D′ coincidono.

La strategia messa a punto dagli studenti è molto più complessa, ma già questa breve sintesi consente di mettere in evidenza che, sotto uno stesso nome, si celano modi di *dragging* diversi, in relazione ai diversi obiettivi del soggetto che esplora.

Nel caso 2 si ha *wandering dragging* (o trascinamento a caso). Si trascinano a caso nel piano i punti di una figura per scoprire regolarità e proprietà invarianti.

Nel caso 3 si ha *guided dragging* (o trascinamento guidato). Si trascina un punto della figura con l'intenzione di ottenere una figura particolare (es. un parallelogramma o un rettangolo).

Nel caso 5 si ha *lieu muet dragging* (o trascinamento lungo un luogo muto). Si trascina un punto con l'intenzione di conservare una certa proprietà o regolarità. La traccia di questo trascinamento rappresenta un luogo geometrico, che suggerisce la condizione per il verificarsi della proprietà.

Il *wandering dragging* e il *guided dragging* sono usati come strumenti iniziali di esplorazione, mentre il *lieu muet dragging* riorganizza logicamente le precedenti esplorazioni e conduce alla produzione della congettura espressa in termini geometrici, aprendo la via alla costruzione della sua dimostrazione.

Il modello messo a punto dal gruppo coordinato da Arzarello descrive molti altri modi di *dragging* e li correla ai processi di pensiero messi in atto nella produzione di una congettura e nella costruzione della sua dimostrazione in ambiente Cabri. Esso consente di operare uno «zoom» sul processo che abbiamo prima indicato convenzionalmente con l'espressione *unità cognitiva,* nel caso di soggetti alle prese con un problema complesso in un ambiente di geometria dinamica.

I diversi tipi di *dragging* si distinguono sia per le espressioni linguistiche che li accompagnano con perfetto sincronismo (permettendo di ricostruire l'intenzione del solutore) sia per le caratteristiche del movimento della mano che controlla il mouse (più veloce, più lento o, in certi casi, perfino assente). Sembra interessante quindi approfondire l'indagine in questa direzione, collegandosi da un lato alle ricerche sviluppate nell'ambito della linguistica cognitiva con le recenti applicazioni alla *Mathematical Idea Analysis* (Lakoff e Nunez, 2000) e dall'altro allo studio della cinematica della mano, per mezzo di tecniche di misura sperimentale tipiche della neurofisiologia. Proprio a tale scopo sono state recentemente avviate collaborazioni intense e sistematiche dei gruppi di ricerca di Torino e Modena con Rafael Nunez e con il neurofisiologo Giovanni Bilancia.

3.5. *Qualche conclusione provvisoria.*

Gli studi presentati illustrano risultati di diversa natura.

Il primo riguarda un esperimento didattico nel quale si pianifica in modo intenzionale una attività con gli allievi, si analizzano le caratteristiche del campo di esperienza che sono funzionali all'obiettivo di lungo termine (l'approccio al pensiero teorico), si forniscono modelli di analisi dei processi degli allievi e del ruolo svolto dall'insegnante nella scelta dei problemi e nella determinazione delle caratteristiche dell'interazione con gli allievi. Lo studio fornisce quindi un esempio di ricerca didattica per l'innovazione, nel quale sono esplicitamente messe in evidenza le componenti di analisi epistemologica del sapere in gioco, di analisi cognitiva dei processi degli allievi, di analisi didattica del ruolo dell'insegnante. Secondo la terminologia introdotta da Arzarello e Bartolini Bussi (1998), questo è un caso di *ricerca del secondo ordine* nel quale le diverse componenti di natura epistemologica, cognitiva e didattica sono studiate in modo dinamico e interfunzionale.

Il secondo esempio, invece, prescinde da una collocazione precisa all'interno di un esperimento didattico; riguarda, piuttosto, uno strumento generale di analisi dei processi di produzione di congetture e costruzione di dimostrazioni. Lo strumento, proprio perché generale e quindi applicabile a molte situazioni, conduce i ricercatori in modo naturale a specificazioni legate ad attività particolari, quando l'obiettivo della ricerca è l'analisi dei processi cognitivi degli allievi.

Il terzo esempio, infine, descrive una di queste possibili specificazioni, quando l'obiettivo della ricerca è l'analisi sempre più fine dei processi di produzione di congetture e costruzione di dimostrazioni in ambiente Cabri: tale analisi è destinata a spingersi fino ad indicatori del funzionamento del cervello.

Il secondo e il terzo esempio si riferiscono a studi orientati alla ricerca di base, secondo la distinzione riportata, tra l'altro, da Schoenfeld (2000), poiché producono conoscenza sui processi, ma non conducono direttamente a ingegnerie didattiche applicabili nella classe. Ci sono, naturalmente, importanti applicazioni: il costrutto teorico dell'unità cognitiva può essere usato per interpretare gli insuccessi degli allievi nei compiti di dimostrazione e per graduare la difficoltà dei problemi proposti; l'analisi fine del *dragging* può essere usata per forzare un uso produttivo di questa risorsa tipica degli ambienti informatici per la geometria dinamica.

L'analisi dei processi degli allievi in attività di approccio al pensiero teorico può suggerire la costruzione di campi di esperienza specifici. Un caso interessante riguarda l'approccio all'algebra, co-

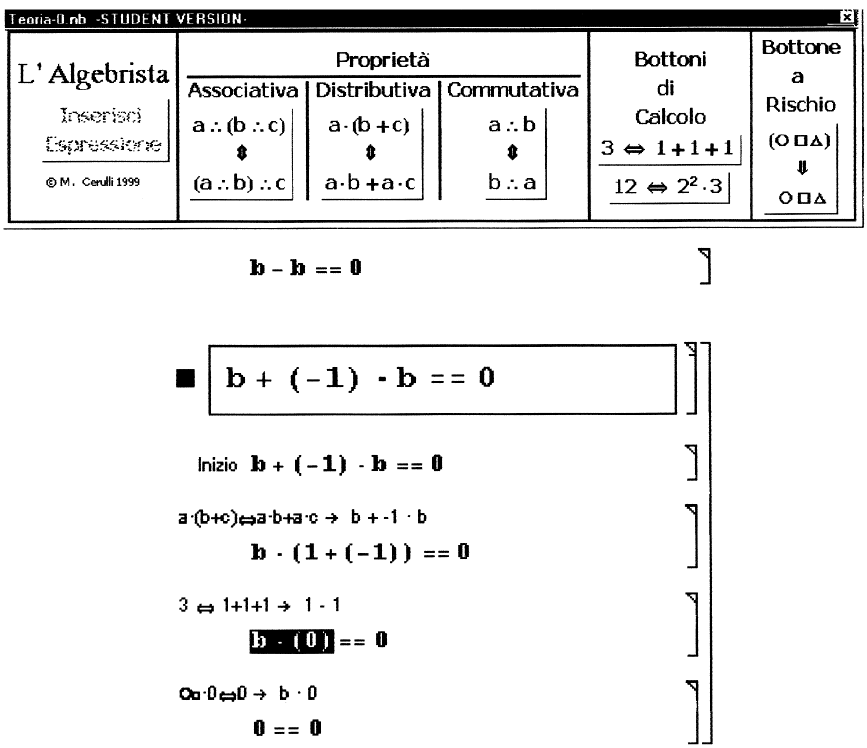

Fig. 10

me disciplina teorica. Da parte dell'unità di Pisa, è stato costruito, in ambiente *Mathematica*, un manipolatore simbolico (*L'Algebrista*) che è completamente sotto il controllo dell'utente (vedi fig. 10). È un micromondo di espressioni algebriche: l'utente può trasformare le espressioni in espressioni equivalenti (==), richiamando in modo esplicito le proprietà fondamentali delle operazioni (assiomi della teoria). I risultati più interessanti riguardano gli effetti di lungo termine sugli studenti della scuola secondaria, che passano da una concezione procedurale dell'algebra (algebra come insieme di calcoli) ad una concezione relazionale e sistemica (algebra come teoria con assiomi, definizioni, teoremi), a cui si mantengono fedeli anche quando il manipolatore simbolico non è più a disposizione.

4. – Le ricadute sul sistema educativo.

Nel paragrafo precedente sono stati esemplificati alcuni studi tra quelli sviluppati all'interno di un unico progetto. Le ricerche, iniziate separatamente nelle diverse sedi, sono state nel tempo coordinate in modo produttivo. Esse non esauriscono l'insieme delle ricerche condotte in Italia, ma sono ormai riconosciute come elementi di una rete tematica consistente e rilevante nella letteratura internazionale.

Ci possiamo chiedere ora se esista una ricaduta di queste ricerche (e delle altre sviluppate da altri gruppi su altri temi) sul sistema educativo nazionale. La risposta è affermativa: essa è avvenuta ed avviene in vari modi e coinvolge tutti gli attori (insegnanti e docenti e ricercatori universitari appartenenti ai Nuclei). Mentre in passato queste attività erano lasciate spesso alla iniziativa dei singoli ed ai loro contatti personali con le istituzioni scolastiche, ora sono sempre più frequentemente inserite in progetti coordinati, sviluppati in collaborazione con diversi enti. Citiamo solo alcuni esempi molto recenti.

La divulgazione di innovazioni sta per avvenire utilizzando il canale del progetto SeT (*Scienza e Tecnologia:* http://www.bdp.it/progettoSeT), che prevede, attraverso un finanziamento diretto alle scuole da parte del MPI, la messa in rete di unità di lavoro collaudate con successo. È interessante osservare che 5 dei 27 progetti finanziati (sugli oltre 400 che avevano superato il vaglio formale della Biblioteca di Documentazione Pedagogica) riguardano la matematica e coinvolgono direttamente insegnanti e docenti e ricercatori universitari dei Nuclei.

La divulgazione della metodologia per la ricerca didattica sull'innovazione in matematica a gruppi più ampi di insegnanti è alla base di una rete di dieci Convenzioni sottoscritte dal Ministero della Pubblica Istruzione nel dicembre 2000 con Dipartimenti di dieci diverse regioni. Il progetto collaborativo ha come obiettivo primario lo sviluppo di competenze specifiche, da parte degli insegnanti delle scuole coinvolte, nel settore della ricerca in didattica della matematica, al fine di favorire lo sviluppo della figura del docente-ricercatore.

La conoscenza prodotta su processi complessi di insegnamento e di apprendimento è reinvestita nei corsi universitari di preparazione degli insegnanti (corsi di laurea in scienze della formazione primaria; scuole di specializzazione per l'insegnamento secondario), dove molti docenti e ricercatori dei Nuclei tengono corsi e dove molti insegnanti-ricercatori sono distaccati come tutor per il tirocinio. Un progetto strategico del CNR è stato finanziato nel 2000 (sotto il coordinamento di Vinicio Villani). Due dei quattro sottoprogetti sono destinati alla diffusione di materiale per la preparazione degli insegnanti, già collaudato nei corsi di laurea in scienze della formazione primaria o nelle scuole di specializzazione.

La collaborazione tra l'UMI (e la sua commissione didattica CIIM) con il MPI è molto intensa: il protocollo d'intesa UMI - MPI ha portato, tra l'altro, alla realizzazione di scuole per insegnanti (http://www.liceo-vallisneri.lu.it/testi.htm). Inoltre, una commissione dell'UMI ha preparato per il Ministro una prima bozza dei curricoli per la matematica.

L'impatto sul sistema educativo potrebbe e dovrebbe essere migliorato, con una politica nazionale di validazione e disseminazione delle proposte elaborate dai Nuclei da parte del Ministero della Pubblica Istruzione. Tuttavia, questi brevi cenni mostrano che l'attività dei matematici e dei ricercatori in didattica della matematica è notevole, forse maggiore e meglio organizzata rispetto a quella di altre comunità scientifiche, a testimoniare che l'attenzione alla ricaduta sociale sostenuta da Giovanni Prodi non è certo venuta meno. Anche se l'impegno è notevole, esso non ha costituito, almeno per i ricercatori più affermati, un alibi per evitare il confronto con il mondo della ricerca a livello internazionale. Anzi, dal mondo della ricerca ci sono positivi ritorni sul sistema educativo nazionale, come mostra il caso recente del progetto Comenius (*Understanding of mathematics classroom culture in different countries*): la rete delle collaborazioni di una studiosa Italiana (Luciana Bazzini) ha consentito di inserire l'IRRSAE della Lombardia in un progetto internazionale (con l'Università della Boemia meridionale, l'Accademia delle Scienze della repubblica Ceca, l'Università di Dortmund e l'Università di Bielefeld) che consentirà scambi di insegnanti e osservazioni incrociate sulla realtà delle classi.

Questa vivacità e ricchezza di stimoli non deve nascondere una difficoltà oggettiva: negli elenchi, i nomi in gioco sono sempre gli stessi e sicuramente in numero insufficiente alle esigenze. Intorno al Seminario Nazionale ruotano solo alcune decine di studiosi, comprendendo i ricercatori e i docenti universitari, gli insegnanti ricercatori dei Nuclei e gli allievi ancora in formazione (gli studenti di dottorato che stanno svolgendo tesi sulla didattica della matematica, in maggioranza presso istituzioni straniere, nella forma di co-tutela).

Sono in discussione in questi giorni le modalità di formazione degli insegnanti, in relazione alla riforma dei cicli scolastici e alla trasformazione dell'offerta formativa delle Università. Occorrerà pensare ai modi per inserire gli studiosi della nuova generazione nelle strutture — i dipartimenti di matematica o, forse, i dipartimenti di scienze della formazione — che si dovranno occupare di tali compiti. La comunità matematica potrà così continuare ad esercitare una influenza culturale sul sistema educativo e la tradizione di presenza, a livello nazionale ed internazionale, non andrà perduta.

Ringraziamenti. Alcuni colleghi hanno letto una versione provvisoria di questo lavoro. Ringrazio per gli utili commenti Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Maria Alessandra Mariotti, Ornella Robutti, i recensori anonimi della rivista. Le tavole a colori degli strumenti (macchine matematiche) che illustrano questo articolo sono tratte dal sito

http://www.museo.unimo.it/theatrum/ realizzato, insieme con le copie fisiche degli strumenti, dal Nucleo di Ricerca da me diretto.

BIBLIOGRAFIA GENERALE

I testi indicati nel seguito forniscono in ordine alfabetico, come d'abitudine, alcuni riferimenti per approfondimenti indicati nel testo. Non tutti questi testi sono di facile reperimento per il lettore comune. Le riviste di ricerca sulla didattica della matematica sono presenti solo nelle biblioteche specializzate di alcuni Dipartimenti e gli atti dei Congressi Internazionali sono il più delle volte solo nelle collezioni personali dei ricercatori. Il lettore interessato ad un primo approccio alla problematica della ricerca didattica in Italia, inquadrata in un contesto internazionale, troverà utile soprattutto la consultazione dei volumi a stampa preceduti da (*).

M. ARTIGUE, *The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level: Crucial Questions for Contemporary Research in Education*, Notices of the American Mathematical Society, **46** (1999), pp. 1377-1385. La traduzione in italiano di questo articolo si trova in M. ARTIGUE, *L'insegnamento e l'apprendimento della matematica a livello universitario*, Bollettino U.M.I., Sez. A, Serie VIII, Vol. **III-A**, Aprile 2000, pp. 81-103.

F. ARZARELLO, *Inside and Outside: Spaces, times and language in proof production*, Proc. 24^{th} PME Int.. Conf., vol. **1** (2000), pp. 23-38, Hiroshima (Japan).

F. ARZARELLO e M. BARTOLINI, *Italian Trends in Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective*, in Kilpatrick J. & Sierpinska A. (eds.), Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity, vol. **2** (1998), pp. 243-262, Kluwer Academic Publishers.

M. G. BARTOLINI BUSSI, *Drawing Instruments: Theories and Practices from History to Didactics*, Documenta Mathematica - Extra Volume ICM 1998, vol. **3** (1998), 735-746.

M. G. BARTOLINI BUSSI, *Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School*, Educational Studies in Mathematics, **31** (1-2) (1996), pp. 11-41.

M. G. BARTOLINI BUSSI, M. BONI, F. FERRI e R. GARUTI, *Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School*, Educational Studies in Mathematics., **39** (1-3) (1999), pp. 67-87.

R. BIEHLER (*), R. W. SCHOLZ, R. STRASSER e B. WINCKELMANN (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1994).

A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e C. Laborde editors, *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

P. Boero, B. Pedemonte e E. Robotti, *Approaching Theoretical Knowledge through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective*, Proc. 21st PME Int. Conf., vol. **2** (1997), pp. 81-88.

N. Douek, *Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school*, Educational Studies in Mathematics, **39** (1-3) (1999), pp. 89-110.

L. English (*), M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh e D. Tirosh editors (in stampa), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

D. A. Grows editor, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan Publishing Group (1992).

G. Hanna e H. N. Jahnke, *Proof and Proving*, in Bishop A. J. e al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education, 877-908, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1996).

A. Jaffe e F. Quinn, *«Theoretical Mathematics»: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics*, Bulletin of the American Mathematical Society, **29** (1) (1996), 1-13.

J. Kilpatrick (*) e A. Sierpinska (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1998).

G. Lakoff e R. E. Nunez, *Where mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books (2000).

M. A. Mariotti, M. G. Bartolini Bussi, P. Boero, F. Ferri e R. Garuti, *Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition*, in Proc. 21st PME Int. Conf., vol. **1** (1997), pp. 180-195, Lahti, Finland.

M. Niss, *Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education*, Documenta Mathematica, extra volume ICM 1998, vol. **3** (1998), pp. 767-776.

A. Schoenfeld, *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education*, Notices of the American Mathematical Society, **47** (2000), pp. 641-649. La traduzione in italiano di questo articolo si trova in A. Schoenfeld, *Obiettivi e metodi di ricerca in didattica della matematica*, Bollettino U.M.I. Sez. A, Serie VIII, Vol. **III-A**, Agosto 2000, pp. 175-199.

R. Thom, *La matematica moderna: esiste?*, Atti di ICME2 (Exeter), trad. italiana in Sitia C. (a cura di), *La didattica della matematica oggi: Problemi, ricerche, orientamenti*, 111-129, Bologna: Pitagora editrice (1979).

W. P. Thurston, *On Proof and Progress in Mathematics*, Bulletin of the American Mathematical Society, **30** (2) (1994), pp. 161-177.

Maria G. Bartolini Bussi - Dipartimento di Matematica di Modena