Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Baldassarri

Equazioni differenziali p-adiche e interpolazione p-adica di formule classiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-B** (2000), n.3, p. 573–600.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_3_573_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
(8) 3-B (2000), 573-599

Equazioni differenziali p-adiche e interpolazione p-adica di formule classiche.

FRANCESCO BALDASSARRI (*)

Summary. – *We shortly introduce non-archimedean valued fields and discuss the difficulties in the corresponding theory of analytic functions. We motivate the need of p-adic cohomology with the Weil Conjectures. We review the two most popular approaches to p-adic analytic varieties, namely rigid and Berkovich analytic geometries. We discuss the action of Frobenius in rigid cohomology as similar to the classical action of covering transformations. When rigid cohomology is parametrized by twisting characters, Frobenius is a source of interesting p-adic analytic functions of those characters, like Morita's p-adic gamma function* Γ_p. *We conclude with some more examples of this phenomenon in connection with Gauss generalized hypergeometric equation and with an integral formula of Selberg.*

Introduzione.

L'invariante più significativo di un corpo (commutativo) K è la sua *caratteristica*: si dice che K ha *caratteristica* 0 se le somme $1_K + \ldots + 1_K$ non sono mai $= 0_K$. Se invece ce ne sono di nulle, il minimo p tale $1_K + \ldots + 1_K$ (somma di p addendi) sia $= 0_K$ è un numero primo e si dice che K ha *caratteristica* p. D'ora in poi la lettera p denoterà un numero primo.

Tutti i corpi finiti hanno caratteristica positiva. In particolare, c'è il *corpo primo di caratteristica* p, $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, che ha proprio p elementi. Un corpo finito F di caratteristica p ha p^f elementi, ove f è la dimensione di F come spazio vettoriale su $\mathbb{F}_p$: tale F è determinato da $q := p^f$ e viene chiamato $\mathbb{F}_q$. Il gruppo di Galois $G(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ è ciclico di ordine f ed è generato dall'(automorfismo di) *Frobenius*, Frob_p: $x \mapsto x^p$. Più in generale, $G(\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_q)$ è ciclico di ordine s ed è generato da Frob_q: $x \mapsto x^q$. Si noti che per ogni corpo k di caratteristica p, $x \mapsto x^q$ definisce un omomorfismo iniettivo Frob_q: $k \to k$; Frob_q è un automorfismo precisamente quando il corpo k è *perfetto*.

I corpi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ hanno invece caratteristica 0 e così pure tutte le estensioni finite di $\mathbb{Q}$, i cosiddetti *corpi di numeri algebrici*.

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 15 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

Ricordiamo che un *valore assoluto* su un corpo K è una funzione

$$K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

$$x \mapsto |x|$$

tale che

$$|0| = 0\,, \qquad |1| = 1$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|\,, \qquad |xy| = |x|\,|y|\,.$$

Diciamo che il valore assoluto $||$ è *non-archimedeo* se inoltre per ogni $x, y \in K$

$$|x+y| \leqslant \max(|x|,\ |y|)\,;$$

in caso contrario il valore assoluto è *archimedeo*.

Un valore assoluto su K induce una metrica, ove $|x-y|$ si prenda come distanza tra x e y, e dunque una topologia, su K. Due valori assoluti $||$ e $||'$ su K si dicono *equivalenti* se inducono la stessa topologia o, equivalentemente, se esiste $a > 0$ tale che $|x|' = |x|^a$, per ogni $x \in K$.

Se $(K,\ ||)$ è un corpo valutato non-archimedeo, i dischi «chiusi» di centro $a \in K$ e raggio $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$

$$E(a,\ \varrho)(K) := \{x \in K \,|\, |x-a| \leqslant \varrho\}\,,$$

sono dei chiusaperti. Inoltre se $E(a,\ \varrho)(K) \cap E(b,\ \sigma)(K) \neq \emptyset$,

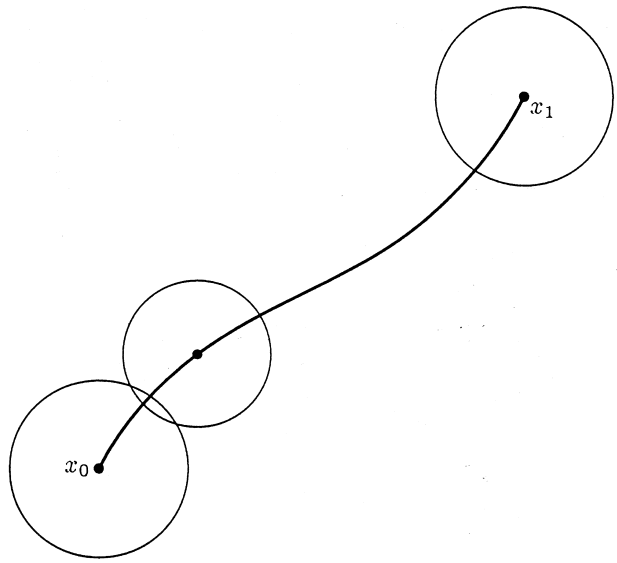
$$E(a,\ \varrho)(K) \cup E(b,\ \sigma)(K) = E(a, \max(\varrho,\ \sigma))(K) = E(b, \max(\varrho,\ \sigma))(K)\,,$$

e uno dei due è contenuto nell'altro! Lo stesso dicasi per i dischi «aperti»

$$D(a,\ \varrho)(K) := \{x \in K \,|\, |x-a| < \varrho\}\,.$$

Dunque lo spazio topologico K è totalmente sconnesso, ed una teoria delle funzioni analitiche su K basata sulla risommazione alla Riemann lungo i cammini,

è impraticabile.



Infatti:

(1) non ci sono cammini,

(2) non si esce mai dal primo disco.

Sia sempre $(K, |\,|)$ un corpo valutato non-archimedeo. Allora $K^\circ := E(0, 1)(K)$ è un sottoanello locale di K, detto *l'anello degli interi* di K, con ideale massimale $K^{\circ\circ} := D(0, 1)(K)$. Il corpo $\widetilde{K} := K^\circ/K^{\circ\circ}$ è il *corpo residuo* di K (cioè di $(K, |\,|)$). Il valore assoluto $|\,|$ è *equicaratteristico* o *eterocaratteristico* a seconda che le caratteristiche di K e $\widetilde{K}$ coincidano o meno.

Su $\mathbb{Q}$ esistono, a meno di equivalenza, solo i seguenti valori assoluti.

i) Il valore assoluto archimedeo usuale.

ii) Per ogni primo p, il valore assoluto p-adico $|\,|_p$, definito dal fatto che $|p|_p = p^{-1}$ (la scelta di questa costante in $(0, 1)$ è arbitraria) e che $|p'|_p = 1$, per ogni primo $p' \neq p$. Useremo anche la *valutazione p-adica* ord_p definita da

$$|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(x)}$$

se $x \neq 0$ e da $\operatorname{ord}_p(0) = \infty$. Il completamento $(\mathbb{Q}_p, |\,|_p)$ di $(\mathbb{Q}, |\,|_p)$ è il corpo base dell'analisi p-adica; il suo anello degli interi si chiama Z_p e il suo corpo residuo è il corpo primo di caratteristica p. Dunque il valore assoluto p-adico è eterocaratteristico. Gli elementi di $\mathbb{Q}_p$ si possono scrivere unicamente come

somme di serie convergenti

$$\sum_{i \gg -\infty} a_i p^i \qquad a_i \in \{0, \ldots, p-1\}.$$

Mentre ci sono infinite estensioni non equivalenti di $|\,|_p$ da $\mathbb{Q}$ alla sua chiusura algebrica $\overline{\mathbb{Q}}$, il valore assoluto $|\,|_p$ si estende unicamente dal corpo completo $\mathbb{Q}_p$ alla sua chiusura algebrica, e il completamento di questa si chiama $(\mathbb{C}_p, |\,|_p)$. Un teorema classico di Krasner ci assicura che $\mathbb{C}_p$ è algebricamente chiuso.

Si può essere tentati dal considerare $\mathbb{Q}_p$ come analogo al corpo reale $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}_p$ come l'analogo del corpo complesso $\mathbb{C}$. Vedremo poi perché questo non è conveniente.

In ogni caso però è chiaro che lo sviluppo di metodi analitici p-adici è possibile e che in linea di principio un matematico puro, specialmente se interessato alla geometria aritmetica, non dovrebbe privilegiare psicologicamente l'analisi complessa rispetto a quella p-adica. Certamente, grazie al fatto che $\mathbb{C}$ è uno spazio topologico connesso per archi, i fondamenti dell'analisi complessa sono più semplici e sono peraltro acquisiti da almeno due secoli, mentre la costruzione di $\mathbb{Q}_p$, dovuta a Hensel, data del 1905 e addirittura l'analisi p-adica è una teoria degli ultimi decenni.

Il problema più naturale che si pone è quello dell'interpolazione p-adica di funzioni $F : S \to \overline{\mathbb{Q}}$ definite su un sottoinsieme S di $\overline{\mathbb{Q}}$, ove si considera $\overline{\mathbb{Q}}$ come immerso in $\mathbb{C}_p$. Funzioni del genere appaiono continuamente in teoria dei numeri e in geometria aritmetica. Ad esempio, per $n \in \mathbb{N}$, $F(n)$ può essere una somma di Gauss sul corpo $\mathbb{F}_q$, con $q = p^f$, ed n parametrizzare i caratteri moltiplicativi di $\mathbb{F}_q$. Oppure, $F(n)$ può rappresentare il numero di punti di una varietà algebrica definita su $\mathbb{F}_q$, a coordinate in $\mathbb{F}_{q^n}$. Ancora, $F(x)$, per $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, può essere un valore speciale di una funzione dell'analisi classica, opportunamente modificato. Problemi del genere sono specialmente interessanti quando F è una funzione L o la zeta di Riemann, o una funzione ellittica o modulare.

A questo proposito si può anche osservare che le modifiche da apportare ad una funzione classica per poterla interpolare p-adicamente, sono molto istruttive. Se ne ottiene difatti una comprensione più profonda del significato geometrico o aritmetico intrinseco di funzioni analitiche complesse che le forti proprietà di connessione di $\mathbb{C}$ avevano piuttosto occultato che evidenziato.

Non mi sento competente per discutere della possibilità, e ancor meno dell'opportunità, di applicare l'analisi p-adica ad altre scienze. Qualunque osservazione sperimentale si può effettivamente riassumere in una funzione numerica $F : S \to \mathbb{N}$, ove S rappresenta un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$. Potrebbe essere suggestivo tentare una interpolazione p-adica di una tale F, specie in considerazione del fatto che non vi è alcuna difficoltà a studiare, ad

esempio, le equazioni della fisica matematica in ambiente p-adico. Ma certo risulta difficile immaginare un «esperimento» p-adico!

1. – Le congetture di Weil.

Accettata la necessità concettuale di disporre di una analisi e di una geometria analitica p-adiche, veniamo ora al motivo contingente e concreto che diede nella seconda metà di questo secolo un forte impulso allo sviluppo di metodi analitici e coomologici p-adici.

Nel 1949 André Weil [W] riassunse congetturalmente la messe di risultati ottenuti da Gauss, Jacobi, Davenport, Hasse e soprattutto da Weil stesso, sull'aritmetica di curve e di varietà grassmanniane. Queste congetture, la cui dimostrazione rappresentò il culmine di 25 anni di lavoro di Weil, Dwork, Grothendieck, Deligne e altri, diedero anche uno stimolo formidabile allo sviluppo di teorie coomologiche per varietà di caratteristica positiva.

Prima di ricordare le congetture di Weil, chiariamo la situazione standard che considereremo. Si avrà un corpo perfetto k di caratteristica p e di un corpo valutato non archimedeo $(K, |\,|)$ di caratteristica zero, con corpo residuo $\widetilde{K} = k$. Di solito sarà anche assegnato un automorfismo di corpo $\sigma : K \to K$, tale che $\sigma(K^\circ) = K^\circ$ e che l'automorfismo indotto su k sia il Frobenius Frob_p (o anche Frob_q, per un $q = p^f$) di k: dunque $\sigma x \equiv x^p$ (risp. x^q) modulo $K^{\circ\circ}$, per ogni $x \in K^\circ$. Un tale σ esiste sempre se, per esempio, $(K, |\,|)$ è completo o se K è un corpo di numeri. In questo secondo caso, si può anche scegliere una immersione $\tau : K \hookrightarrow C$ di K nel corpo complesso. Se V è una varietà definita su k, e se esiste uno schema X (piatto, a fibre irriducibili) su K° con fibra speciale $X_k = V$, diremo che la fibra generica X_K di X è un *rialzamento di V su K* o, meno precisamente, *un rialzamento di V alla caratteristica zero*. Analogamente per gli endomorfismi di V. Nel caso in cui K sia un corpo di numeri si può, utilizzando τ, associare a X una varietà analitica complessa $X_\tau^{an} := X_K \times_{(K,\,\tau)} \mathbb{C}$. In generale, gli invarianti topologici o analitici di X_τ^{an} non dipenderanno dalla scelta di τ che quindi sarà dimenticato.

Data una varietà V definita su k, denoteremo con $V^{(q)}$ la k-varietà $V \times_k k$, ove la copia di k più a destra è vista come k-algebra tramite $\mathrm{Frob_q}$: $k \to k$. Se V è la sottovarietà di $\mathbb{P}_k^n$ definita nelle coordinate omogenee standard razionali su $\mathbb{F}_p\,[x_0, \ldots, x_n]$ da certe equazioni $f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$, per $i = 1, \ldots, r$, ove gli f_i sono polinomi omogenei in $k[x_0, \ldots, x_n]$, le equazioni di $V^{(q)}$ si ottengono applicando $\mathrm{Frob_q}$ ai coefficienti dei polinomi f_i. In particolare, se V è definita su $\mathbb{F}_q$, $V^{(q)} \cong V$. Esiste sempre un morfismo di k-varietà, detto il *Frobenius relativo*

$$
\begin{aligned}
F_V &: V \to V^{(p)} \\
(x_0, \ldots, x_n) &\mapsto (x_0^p, \ldots, x_n^p)\,.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Se V è definita su $\mathbb{F}_q$, con $q = p^f$, F_V^f induce dunque un endomorfismo

$$F_{V/\mathbb{F}_q}: V \to V \qquad (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (x_1^q, \ldots, x_d^q). \tag{1.2}$$

della $\mathbb{F}_q$-varietà V.

Vediamo ora, quasi nelle parole di Weil ma nella forma di due importanti teoremi, il contenuto delle sue celebri congetture del 1949. Sia V una varietà senza punti singolari definita sul corpo $\mathbb{F}_q$. Sia N_ν il numero di punti di V razionali su $\mathbb{F}_{q^\nu}$. Definiamo la *funzione zeta di* V come

$$Z_V(T) := \exp \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{N_\nu T^\nu}{\nu} = \prod_{x \in V} \frac{1}{(1 - T^{\deg x})} \tag{1.3}$$

ove $\deg x$ è il grado del corpo residuo $\kappa(x)$ su F_q. Si ha che

TEOREMA 1. – (*Dwork 1960, Grothendieck 1962*) *$Z_V(T)$ è una funzione razionale di T. Se V è proiettiva, si ha*

$$Z_V(T) = \frac{P_1(T)\, P_3(T) \ldots P_{2n-1}(T)}{P_0(T)\, P_2(T) \ldots P_{2n}(T)} \tag{1.4}$$

ove $n = \dim V$, $P_0(T) = 1 - T$, $P_{2n}(T) = 1 - q^n T$, e $P_i(0) = 1$. Inoltre, $P_i(T)$ è un polinomio di grado β_i che coincide con l'i-esimo numero di Betti di un rialzamento proiettivo e liscio di V alla caratteristica zero, se questo esiste. Inoltre si ha in tal caso una equazione funzionale:

$$Z_V\left(\frac{1}{q^n T}\right) = \pm\, q^{n\chi/2} T^\chi Z_V(T) \tag{1.5}$$

con $\chi = \sum (-1)^i \beta_i$ (uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di un eventuale rialzamento liscio di V alla caratteristica zero).

Osserviamo qui che Weil nella sua formulazione delle congetture, evita di richiedere che V, e il suo eventuale rialzamento alla caratteristica zero, siano proiettive o, come si dice, *proprie*. La congettura risulta allora un po' vaga, poiché bisognerebbe distinguere tra coomologia di Betti usuale e a supporti compatti. Opportunamente precisato, il Teorema 1 vale anche nel caso non proprio. Anche nel teorema seguente non occorre supporre che V sia propria.

TEOREMA 2. – («*Ipotesi di Riemann*», *Deligne 1974*) *I polinomi $P_i(T)$ che appaiono nel Teorema 1 hanno coefficienti interi. Inoltre, se $P_i(T) = \prod_{h=1}^{\beta_h} (1 - \omega_{hi} T)$ i numeri complessi ω_{hi} hanno valore assoluto $q^{i/2}$.*

La prima dimostrazione della razionalità di $Z_V(T)$, dovuta a Dwork [D1], consiste nel dimostrare che $Z_V(T)$ è una funzione meromorfa p-adica, ove p è proprio la caratteristica del corpo di definizione di V. A questo scopo, Dwork costruì una teoria di Fredholm per operatori completamente continui su spazi di Banach p-adici e dimostrò una formula di traccia che presentava $Z_V(T)$ come un prodotto alternato di determinanti di Fredholm di un endomorfismo di questi spazi di Banach legato al Frobenius $F_{V/\mathbb{F}_q}$ di V. Si noti subito che il numero di punti di V a coordinate in $\mathbb{F}_{q^s}$, non è altro che il numero di punti fissi di $F^s_{V/\mathbb{F}_q}$.

Si capì abbastanza presto che il Teorema 1 segue formalmente da un macchinario coomologico sufficientemente ricco («coomologia di Weil»). Bisogna disporre di un funtore $V \mapsto H^*(V) = \bigoplus_{i=0}^{i=2\dim V} H^i(V)$ dalla categoria delle varietà proiettive liscie V definite su $\mathbb{F}_q$ alla categoria delle algebre graduate di dimensione finita su un corpo K di caratteristica zero. È necessario che valgano le proprietà standard di un funtore coomologico, che sono per esempio soddisfatte dalla coomologia di Betti o di De Rham a coefficienti complessi per le varietà proiettive liscie classiche.

Ricordiamo a questo proposito che se X è una varietà algebrica o analitica liscia definita su $\mathbb{C}$, la sua *coomologia di De Rham* è l'ipercoomologia del complesso di De Rham

$$\Omega^{\cdot}_{X/\mathbb{C}} := 0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/\mathbb{C}} \to \ldots \to \Omega^{\dim X_{X/\mathbb{C}}} \to 0 \tag{1.6}$$

$$H^{\cdot}_{DR}(X/\mathbb{C}) := \mathbb{H}^{\cdot}(X, \Omega^{\cdot}_{X/C}). \tag{1.7}$$

Ricordiamo anche che *se X è analitica*, $\Omega^{\cdot}_{X/C}$ è una risoluzione del fascio costante $\mathbb{C}_X$ su X, cosicché la *coomologia di Betti* di X soddisfa

$$H^{\cdot}_B(X, \mathbb{C}) := H^{\cdot}(X, \mathbb{C}_X) \cong H^{\cdot}_{DR}(X/\mathbb{C}). \tag{1.8}$$

Tornando alle richieste per una coomolgia di Weil, occorre una formula della traccia (*formula del punto fisso di Lefschetz*) che, per un endomorfismo $f : V \to V$ esprima il numero (con molteplicità) dei suoi punti fissi come

$$\sum_{i=0}^{2\dim V} (-1)^i \operatorname{Tr} H^i(f). \tag{1.9}$$

Infatti, il numero N_ν di punti di V a coordinate in $\mathbb{F}_{q^\nu}$ si può allora esprimere come

$$N_\nu = \sum_{i=0}^{2\dim V} (-1)^i \operatorname{Tr} H^i(F^\nu_{V/\mathbb{F}_q}) \tag{1.10}$$

e ne segue immediatamente la formula fondamentale

$$Z_V(T) = \prod_{i=0}^{2\dim X} \det[1 - TH^i(F_{V/F_q})]^{(-1)^{i+1}}, \tag{1.11}$$

che implica la razionalità di $Z_V(T)$!

Da quanto detto si comprende quindi l'importanza di sviluppare una teoria coomologica di caratteristica zero per varietà di caratteristica p positiva che sia una coomologia di Weil. Questo si può fare in vari modi. Dwork stesso, per completare la dimostrazione del Teorema 1, fu indotto a creare, con Monsky e Washnitzer, una teoria coomologica p-adica di dimensione finita per varietà di caratteristica p. Invece, la dimostrazione completa di Deligne della congetture di Weil, è ottenuta con metodi l-adici, ove l rappresenta un primo *diverso* dalla caratteristica p del corpo di definizione della varietà V in questione. La coomologia l-adica di V, che è appunto una coomologia di Weil, è ottenuta attraverso un processo di limite proiettivo dalla coomologia étale a coefficienti nel gruppo finito $Z/l^n\mathbb{Z}$. Più precisamente, si definisce

$$H^{\cdot}_{et}(V_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l) := \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \varprojlim_{N} N^{\cdot}_{et}(V_{\bar{k}}, (\mathbb{Z}/l^N\mathbb{Z})_{V_{\bar{k}}}) \tag{1.12}$$

(con azione di $G(\bar{k}/k)$). L'indice *et* si riferisce al tipo di topologia utilizzato su $V_{\bar{k}}$, e cioè la topologia *étale*.

Nel caso la varietà V ammetta un rialzamento liscio X alla caratteristica zero, vi sono teoremi di paragone tra la coomologia l-adica di V e e il completamento l-adico della coomologia topologica di Betti $H^*_B(X^{an}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$ di $X^{an}_{\mathbb{C}}$.

Perché cercare una coomologia p-adica quando le congetture di Weil si possono ottenere con metodi l-adici?

Intanto, né le congetture di Weil né la loro dimostrazione l-adica, dicono alcunché sui valori assoluti p-adici degli zeri e dei poli della funzione zeta di una varietà. Invece una teoria coomologica p-adica può fornire queste informazioni.

Inoltre, non vi è un confronto diretto tra la coomologia l-adica e la coomologia di De Rham analitica (o algebrica) $H^*_{DR}(X^{an}_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ $(\cong H^*_{DR}(X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}))$ di $X^{an}_{\mathbb{C}}$ (risp. di $X_{\mathbb{C}}$). Utilizzando metodi analitici p-adici, e la corrisponedente coomologia di De Rham, si può meglio comprendere la *variazione della coomologia* in famiglie di varietà, che risulta governata dalle stesse *equazioni di Picard-Fuchs* che compaiono nel caso classico.

In particolare, con una tale coomologia analitica p-adica, si può esaminare la variazione della funzione zeta in famiglie di varietà e più specialmente il comportamento della cosiddetta *funzione zeta unità*, che raggruppa solo gli zeri di valore p-adico unitario della funzione zeta.

Si noti che se uno spazio analitico p-adico X_p è l'analitificazione p-adica di una varietà algebrica X definita su un corpo di numeri, ha senso paragonare gli invarianti p-adici ottenuti con i classici invarianti dello spazio analitico com-

plesso $X_{\mathbb{C}}^{an}$. Per questa via, oltre ad apprendere proprietà degli spazi analitici p-adici e a ottenere nuovi invarianti per varietà aritmetiche, si può anche costruire una coomologia p-adica per varietà su un corpo di caratteristica p. È questo il metodo seguito da Dwork, Monsky-Washnitzer, e in tutta generalità da Berthelot, per ottenere la *coomologia rigida* per varietà su un corpo di caratteristica p, utilizzata da Dwork per lo studio della funzione zeta di tali varietà.

Tenteremo allora di dare una breve introduzione agli spazi analitici p-adici, alla coomologia rigida, all'operatore di Frobenius. Vedremo che l'azione del Frobenius sui gruppi di coomologia rigida assomiglia per certi versi all'azione delle trasformazioni di ricoprimento su un fascio localmente costante della topologia algebrica classica. Sembra quasi che il Frobenius si sostituisca, o forse si aggiunga, alle trasformazioni di monodromia nel senso classico. Cercheremo di motivare le nostre idee con alcuni esempi. Il primo, nella sezione 4, riguarda la costruzione coomologica di Dwork della funzione gamma p-adica di Morita. Gli altri esempi, nella sezione 5, sono tratti dalla teoria classica e p-adica delle funzioni ipergeometriche di Gauss $F(a, b, c; z)$.

2. – Spazi analitici p-adici.

Cominciamo con l'elencare le difficoltà nella costruzione di una teoria delle funzioni analitiche p-adiche, seguendo da vicino l'introduzione del libro di Berkovich [Bk1]. Fissiamo un corpo valutato completo $(K, |\,|)$, estensione di $(\mathbb{Q}_p, |\,|_p)$ e accettiamo l'idea che l'algebra delle funzioni analitiche, definite su K, su $E(0, 1)$ sia

$$K\{T\} := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \;\middle|\; \lim_{i \to \infty} |a_i| = 0 \right\} \tag{2.1}$$

munita della norma di K-algebra di Banach

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \right\| = \max |a_i| \,. \tag{2.2}$$

Si può tentare la seguente definizione ingenua di funzione analitica. «Una funzione $f : K \to K$ è analitica se, per ogni $a \in K$, esiste $r > 0$ tale che le restrizione di f a $E(a, r)(K)$ coincida con una serie di potenze $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (T - a)^i$ convergente in $E(a, r)(K)$». Questa definizione non può funzionare perché K è totalmente sconnesso e si ottengono troppe funzioni analitiche!

Notiamo però che un fenomeno simile lo si ha sostituendo nella classica definizione di funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ il dominio $\mathbb{R}$ con il suo sottoinsieme $\mathbb{Q}$. Si ha:

«Una funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ è continua se, per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(a') - f(a)| < \varepsilon$ per ogni $a' \in \mathbb{Q}$ con $|a' - a| < \delta$».

Naturalmente, la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \sqrt{2}\,, \\ 1 & \text{se } x > \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

risulta continua, ma non si estende per continuità a $\mathbb{R}$. Anche qui, le funzioni continue $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ sono *troppe*. Nel caso classico sappiamo che questo dipende dal fatto che $\mathbb{Q}$ ha delle lacune, e già sostituendolo con il suo completamento $\mathbb{R}$ si risolve il problema. Nel caso p-adico invece $(K, |\,|)$, pur essendo completo, presenta ancora delle lacune. D'altra parte ricordiamo il classico teorema di Gelfand-Mazur che asserisce che ogni corpo commutativo di Banach che estende C, coincide con $\mathbb{C}$. Questo teorema fallisce completamente nel caso p-adico. Per esempio, si consideri una indeterminata T su K e il valore assoluto *di Gauss* sul corpo delle funzioni razionali $K(T)$ definito da

$$\left| \frac{\sum_i a_i T^i}{\sum_i b_i T^i} \right|_{Gauss} = \frac{\max |a_i|}{\max |b_i|}\,. \tag{2.3}$$

(È facile vedere, sfruttando il fatto che $|\,|$ è ultrametrico, che $|\,|_{Gauss}$ è effettivamente un valore assoluto su $K(T)$.) Dunque il completamento di $(K(T), |\,|_{Gauss})$ è un corpo completo che estende K, qualunque sia K!

Tornando alla definizione «corretta ma troppo permissiva» di funzione continua $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ data sopra, un altro modo classico di correggerla consiste nell'insistere che il $\delta = \delta(a, \varepsilon)$ della definizione, possa essere scelto indipendentemente da a, se a varia su un sottoinsieme limitato di $\mathbb{Q}$. Cioè nell'utilizzare la nozione di *uniformità* e *continuità uniforme* (sui limitati), piuttosto della nozione di topologia e continuità. Difatti, una funzione continua $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ si estende a una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se e solo se f è uniformemente continua sui limitati.

I due punti di vista classici appena indicati si generalizzano entrambi così da fornire due diversi metodi di costruzione delle funzione analitiche p-adiche. Storicamente, il primo metodo generale è dovuto a J. Tate ed è basato sulla nozione di *topologia di Grothendieck*, che generalizza simultaneamente la nozione di topologia e quella di uniformità. Il dato di una topologia di Grothendieck su un insieme X consiste nell'indicare una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X detti *aperti ammissibili* e, per ogni $U \in \mathcal{T}$, un insieme $\mathrm{Cov}(\mathrm{U})$ di ricoprimenti di U formati da aperti ammissibili, detti *ricoprimenti ammissibili di* U. La terna $(X, \mathcal{T}, \mathrm{Cov})$ deve poi soddisfare a degli assiomi abbastanza naturali. Dati due spazi topologici di Grothendieck $(X, \mathcal{T}, \mathrm{Cov})$ e $(Y, \mathcal{G}, \mathrm{Cov})$ c'è una nozione naturale di continuità per una funzione $f : X \to Y$.

Questo approccio è stato poi sistematicamente sviluppato da Kiehl,

Remmert, Gerritzen, Bosch, Mumford, e molti altri e ha condotto alla cosiddetta *geometria rigida* [BGR].

In questa teoria, il disco unitario chiuso di raggio 1 su K, $X = E(0, 1)^{rig}$, è, in quanto insieme, lo spettro massimale Max $(K\{T\})$, che si identifica con l'anello degli interi $(\overline{K}^{alg})^\circ$ della chiusura algebrica $\overline{K}^{alg}$ di K. Esso è però munito di una topologia di Grothendieck in cui gli aperti ammissibili sono gli *affinoidi* di X, cioè le unioni finite di domini razionali. Un *dominio razionale* è un sottoinsieme di X della forma

$$X\left(\frac{f}{g}\right) := \{x \in X \mid |f_i(x)| \leqslant |g(x)|, \forall i = 1, \ldots, n\} \tag{2.4}$$

ove $g, f_1, \ldots, f_n \in K\{T\}$ generano l'ideale (1) di $K\{T\}$. I ricoprimenti ammissibili di X sono i ricoprimenti finiti (con affinoidi). Questa forte restrizione sugli aperti e sui ricoprimenti ammissibili rimedia al problema della totale sconnessione di $\overline{K}^{alg}$. Veramente, la topologia di Grothendieck che abbiamo descritta è la *topologia debole*. La più utile è invece la topologia *forte*, che permette di incollare insieme gli spazi analitici come nel caso classico.

L'altro metodo, molto più recente, è dovuto interamente a V. Berkovich, ed è basato sulla ricerca sistematica delle lacune di $(K, |\,|)$. La geometria ottenuta viene semplicemente chiamata *geometria analitica* su $(K, |\,|)$.

Un modo per ritrovare l'intervallo reale $[0, 1]$ dall'algebra $\mathcal{C}([0, 1])$ delle funzioni continue $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$, è quello di considerare lo spettro massimale Max $(\mathcal{C}([0, 1]))$, cioè lo spazio degli ideali massimali di $\mathcal{C}([0, 1])$, che si identifica a $[0, 1]$.

Per una qualunque algebra di Banach commutativa $(\mathcal{A}, \|\,\|)$ su un corpo valutato, non necessariamente non-archimedeo, $(K, |\,|)$, si definisce lo *spettro* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ come l'insieme delle seminorme moltiplicative limitate su $\mathcal{A}$, munito della topologia evidente. Una tale seminorma è una funzione

$$\begin{aligned} x : \mathcal{A} &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ f &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

soddisfacente

$$\begin{aligned} |c(x)| &= |c|, \qquad |(f-g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \\ |f(x)| &\leqslant \|f\|, \qquad |fg(x)| = |f(x)\|g(x)| \end{aligned}$$

per ogni $c \in K$, $f, g \in \mathcal{A}$. La topologia «evidente» è la topologia debole delle funzioni

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}(\mathcal{A}) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

per $f \in \mathcal{A}$. Si ha $\mathcal{M}(\mathcal{C}([0,1])) = \mathrm{Max}(\mathcal{C}([0,1])) = [0,1]$, ma in generale $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \mathrm{Max}(\mathcal{A})$. Un teorema fondamentale è che lo spazio $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è sempre non-vuoto, compatto, e Hausdorff. Nel caso di $\mathcal{A} = K\{T\}$, $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$ si identifica con l'anello degli interi della chiusura algebrica di K.

Risulta da quanto detto che la «vera» definizione del disco chiuso $E(0,1)$ come varietà analitica sul corpo p-adico $(K, |\,|)$, è

$$E(0,1) = \mathcal{M}(K\{T\}). \tag{2.5}$$

Questo spazio è molto più grande di $\mathrm{Max}(K\{T\})$. Ad esempio, $\mathcal{M}(K\{T\})$ contiene, per ogni $a \in \mathrm{Max}(K\{T\})$ ed $r \in [0,1]$ *il punto generico* $\xi_{a,r}$ *a distanza* r *da* a. Tale punto *è* la seminorma

$$\begin{aligned} K\{T\} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ f(T) = \sum_i a_i T^i &\mapsto \sup_i |a_i| r^i =: |f(\xi_{a,r})|\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si ha $\xi_{a,0} = a$ e $|f(\xi_{a,1})| = |f(T)|_{Gauss}$. Inoltre $r \mapsto \xi_{a,r}$ è un cammino $[0,1] \to \mathcal{M}(K\{T\})$!

È in un certo senso una coincidenza che nel caso classico $\mathrm{Max}(\mathcal{C}([0,1])) = [0,1]$, cioè che il segmento $[0,1]$, come varietà topologica, coincida con il segmento $[0,1]$ in $\mathbb{R}$.

Con l'uno o l'altro dei due approcci cui abbiamo accennato, si ottiene una teoria coomologica dei fasci analitici coerenti. Esiste un funtore naturale di «analitificazione» $X \mapsto X^{an}$, dalla categoria delle varietà algebriche su K a quella dei K-spazi analitici. Questo funtore si estende ad un funtore $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ dalla categoria dei fasci algebrici coerenti su X a quella dei fasci analitici coerenti su X^{an}. Se X è propria, si ha il teorema GAGA p-adico:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \tilde{\to} H^i(X^{an}, \mathcal{F}^{an}).$$

Se invece X è liscia, e definita su un corpo di numeri L contenuto in K, e se $(\mathcal{F}, \nabla)$ è un fibrato a connessione integrabile su X, si ha il *teorema di paragone tra coomologia di De Rham algebrica e analitica*

$$H^i_{DR}(X, (\mathcal{F}, \nabla)) \otimes_L K \tilde{\to} H^i(X^{an}_K, (\mathcal{F}^{an}_K, \nabla^{an}_K))\,. \tag{2.8}$$

È chiaro come questo tipo di teoremi di paragone debba giocare un ruolo in una completa comprensione delle congetture di Weil.

Il punto di vista di Berkovich è molto più comodo nello studio topologico delle varietà analitiche p-adiche: sarà quello che useremo in questa breve esposizione. Da questo punto di vista, una varietà analitica X^{an} proveniente da una K-varietà algebrica X è uno spazio topologico paracompatto (di Hausdorff) ogni cui punto ammette un sistema fondamentale di intorni aperti localmente compatti, numerabili all'infinito e connessi per archi. Se X è connessa e non

singolare, si ha in più che X^{an} è connessa per archi e *localmente contraibile* [Bk2]. In particolare, X^{an} ammette un ricoprimento universale che è per di più di Galois, con gruppo di Galois isomorfo al gruppo fondamentale di X^{an}. Inoltre i gruppi di coomologia a valori in un fascio localmente costante coincidono con i gruppi di coomologia singolare.

Si deve però notare che in genere il gruppo fondamentale di X^{an} è molto più piccolo di quanto ci si attenderebbe dall'esperienza sui numeri complessi. Per esempio, se X è una curva proiettiva di genere g si ha sempre per il primo numero di Betti, $b_1(X^{an}) \leqslant g$, mentre nel caso classico questo numero vale sempre $2g$. Le curve topologicamente più simili alle curve complesse sono quelle *a riduzione totalmente degenere* o *di Mumford*, che hanno appunto $b_1(X^{an}) = g$.

Ricordiamo che tra i risultati più spettacolari della geometria analitica p-adica vi è l'uniformizzazione delle curve algebriche a riduzione totalmente degenere, dovuta a Mumford [GP], e quella delle varietà abeliane a riduzione moltiplicativa, dovuta a Bosch e Lütkebohemert [BL1,2].

3. – Coomologia rigida e trasformazione di Frobenius.

Torniamo alla nostra «situazione standard» $(K, |\,|, k, \sigma)$ del paragrafo 1, ove $(K, |\,|)$ è supposto completo. Sia V una varietà liscia definita sul corpo k. Si vorrebbe definire per V una coomologia a valori in K-spazi vettoriali scegliendo dapprima un K°-schema liscio X tale che la *riduzione di X modulo p*, cioè la *fibra speciale* $X_k := X \times_{K^\circ} K$ di X, coincida con V. Un tale X è un *prolungamento* di V su K°, mentre la sua *fibra generica* X_K è, come abbiamo già detto, un rialzamento di V su K. Fatto questo, si vorrebbe porre $H^{\cdot}(V) := H^{\cdot}_{DR}(X_K/K)$. Purtroppo questa definizione non è buona, cioè dipende dalla scelta del rialzamento X_K di V e non solamente da V come si vorrebbe.

Osserviamo intanto per inciso che non può essere una buona idea nemmeno quella di utilizzare la coomologia di Betti di X_K^{an}. Difatti qui la riduzione di X modulo p è V che si guarda bene dall'essere «totalmente degenere» (se si trattasse di una curva ciò significherebbe essere una unione di $\mathbb{P}^1$ che si incrociano trasversalmente) dato che V è una varietà non singolare. Al contrario, X_K^{an} è semplicemente connessa, e in particolare $H^{\cdot}_B(X_K^{an}, \mathbb{Z}) = 0$.

Spieghiamo dunque come occorre procedere.

Si completa V in una varietà proiettiva $\overline{V} \subset P_k^r$. Poi si rialza P_k^r in P_K^r. Esiste allora una ben definita *mappa di specializzazione*

$$sp : (P_K^r)^{an} \to P_k^r. \tag{3.1}$$

Se $S \subset P_k^r$ il *tubo* di S in P_K^r è

$$]S[=]S[_{P_K^r} := sp^{-1}(S). \tag{3.2}$$

Si considera la famiglia $\mathcal{U}$ dei domini analitici U di $(P_K^r)^{an}$ che siano intorni di $]V[$ in $]\overline{V}[$. Allora

$$H^{\cdot}_{rig}(V/K) := \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} H^{\cdot}_{DR}(U/K) \tag{3.3}$$

è una coomologia di Weil per V.

Come per le coomologie di Betti e di De Rham classiche, conviene considerare coefficienti più generali. Precisamente, un F-cristallo surconvergente E su $V/(K, \sigma)$ è il dato seguente:

(*i*) Per un intorno $U \in \mathcal{U}$ sufficientemente piccolo, è dato un $\mathcal{O}_U$-modulo coerente a connessione integrabile $(\mathcal{E}, \nabla)$ ove

$$\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_{U/K}(\mathcal{E}) \tag{3.4}$$

è un morfismo di fasci in K-spazi vettoriali soddisfacente alla regola di Leibniz.

In coordinate étali $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ su U, ciò significa avere un sistema integrabile $\mu \times \mu$ di equazioni alle derivate parziali a coefficienti analitici su U

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = G_i Y, \qquad \forall i = 1, \ldots, d. \tag{3.5}$$

(*ii*) (*Convergenza*) Per $z \in U$, $\underline{z} := \underline{x}(z)$, sia

$$C(z, x) \in GL(\mu, \kappa(z)[\![\underline{x} - \underline{z}]\!]) \tag{3.6}$$

una matrice fondamentale di soluzioni formali di $(*)$ con $C(z, z) = I_\mu$. Si richiede allora che $\forall z \in U$, $C(z, x)$ converga in $]sp(z)[\cong D_K^d(0, 1)$.

(*iii*) (*Struttura di Frobenius*) Sia $U^{(\sigma)} = U \times_K K^{(\sigma)}$, ove $K^{(\sigma)}$ è la K-algebra $\sigma : K \to K$. Sia $\varphi : U \to U^{(\sigma)}$ un rialzamento del morfismo di Frobenius relativo $F_V : V \to V^{(p)}$. Si richiede l'esistenza di un isomorfismo

$$\varphi^*(\mathcal{E}, \nabla)^{(\sigma)} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}, \nabla). \tag{3.7}$$

Si definisce poi la *coomologia rigida di* V (o meglio *di* $V/(K, \sigma)$) *a coefficienti in* E come

$$H^{\cdot}_{rig}(V, E) := H^{\cdot}_{rig}(V/(K, \sigma), E) := \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} H^{\cdot}_{DR}(U, (\mathcal{E}, \nabla)_{|U}). \tag{3.8}$$

Conviene dare una forma esplicita alla struttura di Frobenius (3.7). Deve

esistere una matrice $\gamma^{(\varphi)} \in GL(\mu, \mathcal{O}(U))$ tale che

$$\gamma^{(\varphi)}(x)\, C(\varphi(z), \varphi(x))^{\sigma} = C(z, x)\, \gamma^{(\varphi)}(z)\,. \tag{3.9}$$

Si noti che se U fosse una varietà analitica su $\mathbb{C}$ e $(\mathcal{E}, \nabla)$ un fibrato a connessione integrabile su U, le *trasformazioni di ricoprimento* T del ricoprimento universale $\widetilde{U} \to U$ operano sulle soluzioni di $(*)$ e cioè forniscono proprio isomorfismi

$$T^*(\mathcal{E}, \nabla) \tilde{\to} (\mathcal{E}, \nabla) \tag{3.9}$$

per continuazione analitica lungo cammini chiusi su U. Dunque la struttura di Frobenius può essere pensata come una rappresentazione di un ipotetico gruppo fondamentale «$\pi_1(V)$», in una situazione in cui il vero gruppo fondamentale topologico di X_K^{an} è ridotto all'elemento identico. Questo fornisce la possibilità di calcolare periodi di forme differenziali a coefficienti variabili lungo «circuiti non topologici».

È questa analogia una delle motivazioni delle congetture di Tate-Fontaine-Jannsen che paragonano la coomologia rigida di V, munita dell'automorfismo di Frobenius, alla coomologia étale p-adica $H^{\cdot}_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ di un opportuno rialzamento X_K di V alla caratteristica zero, munita dell'azione di $G(\overline{K}/K)$. Queste congetture sono state dimostrate da Tate, Fontaine-Messing, Bloch-Kato, Kato, Faltings, e in generale da Tsuji due anni orsono (*cf.* [I] per un bel panorama sullo stato della questione nel 1990).

L'analogia formale tra Frobenius e trasformazioni di ricoprimento è alla base dell'interpolazione p-adica di formule classiche per funzioni analitiche complesse legate a equazioni differenziali algebriche. Se, ad esempio, una tale funzione analitica complessa ammette una formula integrale (contenente funzioni dello stesso tipo), tale formula ha un corrispettivo in teoria dei Numeri in termini di una famiglia di somme di caratteri di un corpo di caratteristica p. In tal caso è possibile interpolare p-adicamente tali somme di caratteri tramite una funzione analitica p-adica che può dirsi l'analogo p-adico della funzione complessa da cui si è partiti. La ragione (almeno nei casi più semplici, ma vedi anche [K]) sta in un comune spazio di coomologia algebrica soggiacente, di cui si considerano «completamenti» complessi o p-adici, e nella formula della traccia p-adica. Nella prossima sezione vedremo il più semplice esempio di questo principio.

4. – Esempio: interpolazione p-adica delle somme di Gauss.

Prendiamo qui $K = \mathbb{C}_p$ e scegliamo un carattere additivo non triviale di $\mathbb{F}_p$, $\psi_p : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}_p$, il che equivale a fissare una radice primitiva p-esima $\zeta_p = \psi_p(1)$ in $\mathbb{C}_p$. Per $q = p^f$ sia Teich : $\mathbb{F}_q^{\times} \to \mathbb{C}_p^{\times}$ il carattere di Teichmüller di $\mathbb{F}_q$, che as-

socia a ogni $x \in \mathbb{F}_q^{\times}$, la radice $(q-1)$-esima di 1 in $\mathbb{C}_p$ la cui riduzione modulo $\mathbb{C}_p{}^{\circ}$ è x.

Per $a \in (1/(q-1))\mathbb{Z}$, definiamo

$$\chi_a = \mathrm{Teich}^{a(1-q)}, \tag{4.1}$$

che è un carattere moltiplicativo di $\mathbb{F}_q$ (esteso con $\chi_a(0) = 0 \forall a$).

Ricordiamo la somma di Gauss:

$$G_q(a) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi_a(x)\, \psi_p(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x)) . \tag{4.2}$$

Consideriamo poi $\pi \in \mathbb{C}_p$, $\pi^{p-1} = -p$, a minima distanza da $\zeta_p - 1$.

Y. Morita ha definito una funzione analitica p-adica Γ_p sull'unione dei p dischi

$$\bigcup_{\mu=0}^{p-1} D(-\mu, \varrho) \tag{4.3}$$

$p^{-1} < \varrho = p^{-\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}} < 1$ tale che

$$\begin{cases} \Gamma_p(0) = 1 \\ \dfrac{\Gamma_p(1+x)}{\Gamma_p(x)} = \begin{cases} -x\,, & \text{se } |x| = 1 \\ -1\,, & \text{se } |x| < 1\,. \end{cases} \end{cases} \tag{4.4}$$

In particolare,

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{j=0 \\ (j,p)=1}}^{n-1} j\,. \tag{4.5}$$

Se poniamo

$$\Theta_p(x) = \exp \pi(x - x^p) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j,$$

allora

$$\mathrm{ord}_p c_j \geqslant j \frac{p-1}{p^2} \qquad \forall j = 0, 1, \ldots/;\ .$$

Dimostreremo in questa sezione che, per $\mu \in [0, p-1]$,

$$\Gamma_p(-\mu + py) = \pi^{-\mu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{pi+\mu}(y)_i}{(-\pi)^i} \tag{4.6}$$

ove, come al solito

$$(y)_i = \frac{\Gamma(y+i)}{\Gamma(y)}$$

$$(= y(y+1)\ldots(y+i-1) \ \ if \ i = 1, 2, \ldots) .$$

Converrà usare la più flessibile funzione $\gamma_p(x, y)$ meromorfa in

$$\mathcal{H}^{(t)} = \{(x, y) \in (\mathbb{A}^2)^{an} \mid py - x = t, \ |y| < p^{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}}\}$$

per ogni fissato $t \in \mathbb{Z}$, e definita da

$$\gamma_p(x, y) = \sum_{pi + t \geq 0} c_{pi+t} \frac{\Gamma(y+i)}{\Gamma(y)} \Big| (-\pi)^i . \tag{4.7}$$

Dimostreremo la seguente proprietà modulare di γ_p

$$\gamma_p(x+m, y+n) = \gamma_p(x, y)(-\pi)^{n-m} \frac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y+n)} \tag{4.8}$$

per ogni (m, n) in $\mathbb{Z}^2$. Si noti che da (4.8) e da $\gamma_p(0, 0) = 1$ segue immediatamente (4.6). La funzione meromorfa $\gamma_p(x, y)$ ha in $\mathcal{H}^{(t)}$ solo un numero finito di poli, precisamente le soluzioni (x, y) di $py - x = t$, con $y \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $x \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

La *formula di Gross-Koblitz* [GrKo] per l'interpolazione delle somme di Gauss $G_q(a)$, $a \in (1/(q-1))\mathbb{Z}$, è

$$-G_q(a) = \prod_{i=1}^{f} \gamma_p(a^{(i-1)}, a^{(i)}) \tag{4.9}$$

ove si sono scelti

$$a = a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(f)} = a, \ a^{(i)} \in \mathbb{Z}_p,$$

in modo che

$$pa^{(i)} - a^{(i-1)} \in \mathbb{Z} , \quad \text{for } i = 1, \ldots, f-1 .$$

(Possibile poiché $a \in (1/(p^f - 1))\mathbb{Z}$).

Vogliamo spiegare la relazione con la classica formula integrale di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt . \tag{4.10}$$

Cominciamo con lo spiegare la proprietà modulare di γ_p per via coomologica, mostrando che γ_p è la matrice del Frobenius sulla coomologia del gruppo moltiplicativo $\mathbb{G}_{m, \mathbb{F}_p}$ a coefficienti nell'F-cristallo E_a definito come segue. Su

$U = \mathbb{G}^{an}_{m,\,C_p}$ si considera il modulo differenziale (surconvergente) $(\mathcal{O}_U, \nabla_a)$, ove ∇_a è la connessione algebrica

$$\begin{aligned} \nabla_a \colon \mathbb{C}_p[x, x^{-1}] &\to \mathbb{C}_p[x, x^{-1}]\, dx \\ f \qquad &\mapsto df + f(\pi x + a)\frac{dx}{x} = \\ &\left(x\frac{d}{dx} + a + \pi x\right)(f)\frac{dx}{x}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Completiamo dunque p-adicamente il morfismo precedente in

$$\begin{aligned} \nabla_a^\dagger \colon \mathcal{R}^\dagger &\to \mathcal{R}^\dagger \frac{dx}{x} \\ f &\mapsto \left(x\frac{d}{dx} + a + \pi x\right)(f)\frac{dx}{x} \end{aligned} \tag{4.12}$$

ove $\mathcal{R}^\dagger$ denota l'anello delle funzioni p-adicamente analitiche per $1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ non specificato. Lo spazio di coomologia rigida, per $a \in \mathbb{Z}_p \cap \overline{\mathbb{Q}}$, è dunque

$$H^1(\nabla_a^\dagger) := H^1_{rig}(\mathbb{G}_{m,\,\mathbb{F}_p}, E_a) = \mathcal{R}^\dagger \frac{dx}{x} \Big/ \nabla_a^\dagger \mathcal{R}^\dagger$$

che ha dimensione 1. Se $a \notin \mathbb{Z}$, esso è generato dalla classe $[dx/x]_a$ di dx/x. Per $m \in \mathbb{Z}$ abbiamo le «formule di riduzione»:

$$\left[x^m \frac{dx}{x}\right]_a = \frac{\Gamma(a+m)(-\pi)^{-m}}{\Gamma(a)}\left[\frac{dx}{x}\right]_a. \tag{4.13}$$

La mappa di Frobenius $F(a, b)$ è definita come il morfismo orizzontale, per $a, b \in \mathbb{Z}_p \cap \overline{\mathbb{Q}}$, $pb - a = \mu \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} F(a, b) \colon (\mathcal{R}^\dagger, \nabla_b^\dagger) &\to (\mathcal{R}^\dagger, \nabla_a^\dagger) \\ f(x) &\mapsto f(x^p)\, x^\mu / \Theta(x). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Per capire questa definizione basta tenere a mente che, formalmente:

$$\nabla_b^\dagger(x^{-b}\exp(-\pi x)) = 0$$

$$\nabla_a^\dagger(x^{-a}\exp(-\pi x)) = 0$$

$$x^{-pb}\exp(-\pi x^p)\, x^\mu/\Theta(x) = x^{-pb}\exp(-\pi x^p)\, x^{pb-a}\exp(-\pi x + \pi x^p) = x^{-a}\exp(-\pi x).$$

I calcoli sono formali, ma le funzioni x^μ e $\Theta(x)$ stanno in $\mathcal{R}^\dagger$.

Conviene usare simultaneamente un inverso sinistro del Frobenius, precisamente la mappa di Dwork

$$D(b, a): (\mathcal{R}^\dagger, \nabla_a^\dagger) \to (\mathcal{R}^\dagger, \nabla_b^\dagger)$$

$$f(x) \mapsto \psi(f(x)\, x^{-\mu}\, \Theta(x)) \tag{4.15}$$

$$\psi : \mathcal{R}^\dagger \to \mathcal{R}^\dagger \qquad (\psi\xi)(t) = \frac{1}{p} \sum_{x^p = t} \xi(x).$$

Dunque le mappe di Frobenius e di Dwork inducono isomorfismi inversi:

$$\begin{aligned} &Frob^1(a, b): H^1(\nabla_b^\dagger) \to H^1(\nabla_a^\dagger) \\ &\mathrm{Dw}^1(b, a): \quad H^1(\nabla_a^\dagger) \to H^1(\nabla_b^\dagger). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Un semplice calcolo usando le formule di riduzione mostra che

$$\mathrm{Dw}^1(b, a)\left(\left[\frac{dx}{x}\right]_a\right) = p^{-1}\gamma_p(a, b)\left[\frac{dx}{x}\right]_b, \tag{4.17}$$

or

$$Frob^1(a, b)\left(\left[\frac{dx}{x}\right]_b\right) = p\gamma_p(a, b)^{-1}\left[\frac{dx}{x}\right]_a. \tag{4.18}$$

Allora la proprietà modulare di γ_p segue dai morfismi orizzontali

$$(\mathcal{R}^\dagger, \nabla_{a+m}^\dagger) \xrightarrow{x^m} (\mathcal{R}^\dagger, \nabla_a^\dagger)$$

$$f \mapsto x^m f$$

e dai diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} H^1(\nabla_b^\dagger) & \xrightarrow{Frob^1(a,b)} & H^1(\nabla_a^\dagger) \\ {\scriptstyle x^n}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle x^m} \\ H^1(\nabla_{b+n}^\dagger) & \xrightarrow{Frob^1(a+m,\, b+n)} & H^1(\nabla_{a+m}^\dagger) \end{array}$$

provenienti da

$$\begin{array}{ccc} x^n f(x) & \xrightarrow{F(a,b)} & x^{pn} f(x^p)\, x^{pb-a}/\Theta(x) \\ {\scriptstyle x^n}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle x^m} \\ f(x) & \xrightarrow{F(a+m,\, b+n)} & f(x^p)\, x^{p(b+n)-a-m}/\Theta(x) \end{array}$$

for $f(x) \in \mathcal{R}^\dagger$ and $pb - a$, m, $n \in \mathbb{Z}$, insieme alle precedenti formule di combiamento di base.

La formula di Gross-Koblitz è allora un caso speciale della formula della traccia in coomologia rigida. Precisamente, per $a \in (1/(q-1))\mathbb{Z}$ come prima, poniamo

$$G_q(r, a) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^r}} \chi_a(N_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q} x)\, \psi_p(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_p}(x)) \tag{4.19}$$

e definiamo la corrispondente funzione L come

$$L(a, q, T) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} G_q(r, a) \frac{T^r}{r} \right). \tag{4.20}$$

Consideriamo iterati dei precedenti operatori

$$F_q(a) = F(a, a^{(1)}) \circ F(a^{(1)}, a^{(2)}) \circ \ldots \circ F(a^{(f-1)}, a)$$

$$F_q(a) : (\mathcal{R}^\dagger, \nabla_a^\dagger) \to (\mathcal{R}^\dagger, \nabla_a^\dagger)$$

e il suo inverso sinistro

$$D_q(a) = D(a, a^{(f-1)}) \circ D(a^{(f-1)}, a^{(f-2)}) \circ \ldots$$

$$\ldots \circ D(a^{(1)}, a).$$

Essi inducono isomorfismi inversi

$$Frob_q^1(a) : H^1(\nabla_a^\dagger) \to H^1(\nabla_a^\dagger)$$

e

$$\mathrm{Dw}_q^1(a) : H^1(\nabla_a^\dagger) \to H^1(\nabla_a^\dagger).$$

La formula della traccia in questa situazione dice che

$$L(a, q, T) = \det(1 - qT\, \mathrm{Dw}_q^1(a)), \tag{4.21}$$

e da ciò segue la formula di Gross-Koblitz.

Questo conclude il nostro ragionamento, ma possiamo essere più espliciti. Supponiamo che $0 < a < 1$

$$a = \frac{\mu_0 + \mu_1 p + \ldots + \mu_{f-1} p^{f-1}}{p^f - 1}, \qquad 0 \leq \mu_i \leq p - 1 .$$

Allora

$$a^{(1)} = \frac{\mu_1 + \mu_2 p + \ldots + \mu_{f-1} p^{f-2} + \mu_0 p^{f-1}}{p^f - 1}, \qquad 0 \leq \mu_i \leq p - 1 ,$$

poiché $pa^{(1)} - a = \mu_0$. Quindi

$$\gamma_p(a^{(i-1)}, a^{(i)}) = \pi^{\mu_{i-1}} \Gamma_p(-\mu_{i-1} + pa^{(i)}) \tag{4.22}$$

e

$$(4.23) \qquad -G_q(a)=\pi^{\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_{f-1}}\prod_{i=1}^{f}\Gamma_p(-\mu_{i-1}+pa^{(i)})\equiv\pi^{\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_{f-1}}\prod_{i=0}^{f-1}\frac{1}{\mu_i!}$$

modulo $1+(\pi)$ in $\mathbb{Q}_p(\zeta_p,\,\zeta_{q-1})^{\times}$, una congruenza moltiplicativa dovuta a Stickelberger [L, IV.3 Th. 9].

5. – Versione p-adica di formule classiche.

La teoria delle funzioni di una variabile complessa è particolarmente affascinante anche per la potenzialità di rendere concreti e «calcolabili» (cioè approssimabili in senso classico) dei valori numerici il cui senso e carattere geometrico intrinseco risultano da principi generali. È il caso per esempio del calcolo di Riemann della rappresentazione di monodromia associata al sistema ipergeometrico [1]

$$(E_{a,b,c}) \qquad \frac{dY}{dz}=YG_{(a,\,b,\,c)}(z), \qquad (a,\,b,\,c)\in\mathbb{C}^3$$

ove

$$(5.1) \qquad G_{(a,\,b,\,c)}(z)=\begin{pmatrix} -\dfrac{c}{z} & \dfrac{c-a}{1-z} \\ \dfrac{c-b}{z} & \dfrac{a+b-c}{1-z} \end{pmatrix}.$$

Supponiamo, per semplicità, che $a,\,b,\,c,\,c-a,\,c-b,\,c-a-b$ non siano numeri interi. Possiamo allora scrivere una matrice soluzione a $z=0$ nella forma

$$(5.2) \qquad Y=Y^{(0)}_{(a,\,b,\,c)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-c} \end{pmatrix}U^{(0)}_{(a,\,b,\,c)}(z)$$

ove

$$(5.3) \quad U^{(0)}_{(a,b,c)}(z)=\begin{pmatrix} (c-b)\,F(a,b,1+c;z) & cF(a,b,c;z) \\ (1-c)\,F(a-c,b-c,1-c;z) & (c-a)\,zF(a+1-c,b+1-c,2-c;z) \end{pmatrix}$$

è una matrice di funzioni olomorfe a $z=0$ ($F(a,\,b,\,c;\,z)$ è naturalmente la classica serie ipergeometrica di Gauss). È chiaro che le due righe di $Y^{(0)}_{(a,\,b,\,c)}$ sono i due autovettori della trasformazione di monodromia locale a $z=0$, semisemplice grazie alle nostre condizioni su $a,\,b,\,c$. Più precisamente, il generatore

[1] Chiedo venia per avere usato in questi calcoli una scrittura trasposta di quella usata in (3.5).

positivo T_0 del gruppo fondamentale locale a $z=0$ agisce su $Y^{(0)}_{(a,\,b,\,c)}$ tramite

$$T_0\,Y^{(0)}_{(a,\,b,\,c)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\,-2\pi i c} \end{pmatrix} Y^{(0)}_{(a,\,b,\,c)}. \tag{5.4}$$

Analogamente possiamo scrivere presso $z=1$

$$Y = Y^{(1)}_{(a,\,b,\,c)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-z)^{c-a-b} \end{pmatrix} U^{(1)}_{(a,\,b,\,c)}(1-z) \tag{5.5}$$

ove

$$U^{(1)}_{(a,\,b,\,c)}(1-z) = \tag{5.6}$$

$$\begin{pmatrix} (c-a-b)F(a,b,a+b-c;1-z) & (c-a)F(a,b,a+b+1-c;1-z) \\ (b-c)(1-z)F(c-a+1,c-b+1,c+2-a-b;1-z) & (c+1-a-b)F(c-a,c-b,c+1-a-b;1-z) \end{pmatrix}.$$

Il generatore positivo T_1 del gruppo fondamentale locale a $z=1$ agisce su $Y^{(1)}_{(a,\,b,\,c)}$ tramite

$$T_1\,Y^{(1)}_{(a,\,b,\,c)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\,2\pi i(c-a-b)} \end{pmatrix} Y^{(1)}_{(a,\,b,\,c)}.$$

Similmente si potrebbe scrivere all'infinito. È chiaro che la descrizione completa del gruppo di monodromia del sistema ipergeometrico, equivale a fornire la matrice $\Phi(a,\,b,\,c) \in GL(2,\,\mathbb{C})$ che colleghi gli autovettori di monodromia locale a $z=0$ con quelli a $z=1$. Per fare questo tradizionalmente si taglia $\mathbb{C}$ lungo $\mathbb{R}$, si considerano «determinazioni principali» di $z^{\,-c}$ e $(1-z)^{c-a-b}$ nel semipiano superiore. Tra le determinazioni di $Y^{(0)}_{(a,\,b,\,c)}$ e $Y^{(1)}_{(a,\,b,\,c)}$ così ottenute intercorre la relazione

$$Y^{(0)}_{(a,\,b,\,c)} = \Phi(a,\,b,\,c)\,Y^{(1)}_{(a,\,b,\,c)},$$

con $\Phi(a,\,b,\,c) \in GL(2,\,\mathbb{C})$ data da [Po, VI.26]

$$\Phi(a,\,b,\,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c+1)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a+1)\,\Gamma(c-b)} & -\dfrac{\Gamma(c+1)\,\Gamma(a+b-c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \dfrac{\Gamma(2-c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(1-b)} & \dfrac{\Gamma(2-c)\,\Gamma(a+b-c-1)}{\Gamma(a-c)\,\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Se ne conclude che il gruppo di monodromia di $E_{(a,\,b,\,c)}$ è coniugato al sottogruppo di $GL(2,\,\mathbb{C})$ generato dalle due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\,-2\pi i c} \end{pmatrix}, \qquad \Phi(a,\,b,\,c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\,2\pi i(c-a-b)} \end{pmatrix} \Phi(a,\,b,\,c)^{-1}. \tag{5.8}$$

Abbiamo già notato una certa analogia tra le trasformazioni di monodromia classiche e l'azione di Frobenius. Esaminiamo almeno un punto di contatto tra questi mondi diversi. Il punto cruciale del precedente calcolo di monodromia è

la formula di Gauss per il valore di $F(a, b, c; 1)$ quando $Re(c-a-b)>0$ e cioè [Po, *loc. cit.*]

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}. \tag{5.9}$$

Ci si può domandare se abbia senso almeno un calcolo p-adico simile a (5.9). Diamo subito il risultato, dovuto a Koblitz [Ko] e Diamond [Di].

Per $a\in\mathbb{Z}_p$, definiamo $a'\in\mathbb{Z}_p$ e $\mu_a\in\{0, 1, \ldots, p-1\}$ tramite la relazione

$$pa' - a = \mu_a$$

e iteriamo

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= a \\ a^{(i+1)} &= (a^{(i)})' \end{aligned} \tag{5.10}$$

Per $a, b, c\in\mathbb{Z}_p$, $c\notin\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$, definiamo anche

$$\mathcal{F}(a, b, c; \lambda) = \frac{F(a, b, c; \lambda)}{F(a', b', c'; \lambda^p)} \in 1+\lambda\mathbb{Q}_p[\![\lambda]\!]. \tag{5.11}$$

La formula di Koblitz-Diamond dice che

(A) se $\mu_{c^{(i)}} > \mu_{a^{(i)}} + \mu_{b^{(i)}}$ for all $i\in\mathbb{N}$ allora $\mathcal{F}(a, b, c; \lambda)$ ammette una estensione analitica nel disco $D(1, 1)$, e

$$\mathcal{F}(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma_p(c)\,\Gamma_p(c-a-b)}{\Gamma_p(c-a)\,\Gamma_p(c-b)}. \tag{5.12}$$

Segnaliamo anche la seguente formula di Young [Yo],[B2]

(B) se $c = 1+a-b$, $0<\mu_a\leqslant\mu_b$, μ_a è pari, e $\mu_{c^{(i)}} > \max(\mu_{a^{(i)}}, \mu_{b^{(i)}})$ per ogni $i\in\mathbb{N}$, allora $\mathcal{F}(a, b, c; \lambda)$ ammette una estensione analitica nel disco $D(-1, 1)$, e

$$\mathcal{F}(a, b, c; -1) = (-1)^{\mu_a/2}\,\frac{\Gamma_p(a/2)\,\Gamma_p l(b-a/2)}{\Gamma_p(a)\,\Gamma_p(b-a)}. \tag{5.13}$$

Queste formule p-adiche si possono spiegare in termini di sotto-F-cristalli con radici unitarie (e di rango uno) dell'F-cristallo surconvergente su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}\setminus\{0, 1, \infty\}$ di rango due associato al sistema ipergeometrico, nei cosiddetti casi «split» ([Dw3, 9.0.7], [B, § 3]). Per essere più precisi, bisognerebbe parlare di F-cristalli *logaritmici*, e anche di «famiglie di Dwork di F-cristalli», parametrizzate dagli esponenti di Fuchs del sistema (essenzialmente gli a, b, c per il sistema ipergeometrico).

In questo ambiente un po' generalizzato, in cui il Frobenius trasforma soluzioni di $E_{a', b', c'}$ in soluzioni di $E_{a, b, c}$, la formula (3.8) nel disco singolare

$D(0,1)$ prende la forma

$$(5.14)\qquad U^{(0)}_{(a',b',c')}(z^p)\,B(a,b,c;z)=\begin{pmatrix}\xi^{(0)}_1(a,b,c) & 0\\ 0 & \xi^{(0)}_2(a,b,c)\,z^{\mu_c}\end{pmatrix}U^{(0)}_{(a,b,c)}(z)$$

ove $B(a,b,c;z)$ è la matrice del Frobenius, che è analitica in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$ al di fuori di due piccoli dischi centrati a 1 e all'infinito (in particolare è analitica per $z=0$). Gli «autovalori di Frobenius» $\xi^{(0)}_1(a,b,c)$ e $\xi^{(0)}_2(a,b,c)$ sono calcolati in [Dw3, 24.4]. Sono

$$(5.15.1)\qquad \xi^{(0)}_1(a,b,c):=\xi^{(0)}_1(a,b,c;a',b',c')=\frac{\gamma_p(b,b')\,\gamma_p(c-b,c'-b')}{\gamma_p(1+c,1+c')}$$

e

$$(5.15.2)\qquad \xi^{(0)}_2(a,b,c):=\xi^{(0)}_2(a,b,c;a',b',c')=$$

$$(-1)^{\mu_b-\mu_c}\,\frac{\gamma_p(c-1,c'-1)\,\gamma_p(1-a,1-a')}{\gamma_p(1+c-a,1+c'-a')}\,.$$

Si noti che l'operazione del Frobenius presso $z=0$ commuta con la trasformazione di monodromia locale T_0, cosicché i due suddetti autovalori del Frobenius, corrispondono all'operazione sui due autovalori di monodromia locale, che sono le due righe della matrice $Y^{(0)}_{(a,b,c)}(z)$: $\xi^{(0)}_1(a,b,c)$ è l'autovalore del Frobenius sulla soluzione olomorfa a $z=0$ e $\xi^{(0)}_2(a,b,c)$ è quello sulla soluzione del tipo $z^{-c}\cdot$ olomorfa a $z=0$. Analogamente a $z=1$, se si sceglie $1-z\mapsto(1-z)^p$ come rialzamento del Frobenius. Si ottengono gli autovalori

$$(5.16.1)\qquad \xi^{(1)}_1(a,b,c)=(-1)^{\mu_b}\xi^{(0)}_1(a,b,a+b-c;a',b',a'+b'-c')$$

e

$$(5.16.2)\qquad \xi^{(1)}_2(a,b,c)=(-1)^{\mu_b}\xi^{(0)}_2(a,b,a+b-c;a',b',a'+b'-c').$$

Di nuovo, l'autovalore corrispondente all'azione di Frobenius sulla soluzione olomorfa a $z=1$ è $\xi^{(1)}_1(a,b,c)$. Ebbene, in generale gli F-cristalli ammettono una «filtrazione per la pendenza», corrispondente alla valutazione p-adica dei loro autovalori. Il «sotto-F-cristallo con radici unitarie» in particolare, corrisponde agli autovalori che sono unità p-adiche, cioè che hanno modulo 1. Se per caso, a,b,c sono tali che $E_{a,b,c}$ ammetta un sotto-F-cristallo con radici unitarie di rango esattamente 1 (questi sono i casi «split» di cui si è parlato prima) e se al tempo stesso questo sotto-F-cristallo si prolunga nei dischi singolari $D(0,1)$ e $D(1,1)$, diviene possibile calcolare $\mathcal{F}(a,b,c;1)$. Si tratta quindi essenzialmente di trovare le condizioni perché $|\xi^{(0)}_1(a^{(i)},b^{(i)},c^{(i)})|_p=|\xi^{(1)}_1(a^{(i)},b^{(i)},c^{(i)})|_p=1$ mentre $|\xi^{(0)}_2(a^{(i)},b^{(i)},c^{(i)})|_p|<1$ e $|\xi^{(1)}_2(a^{(i)},b^{(i)},c^{(i)})|_p<1$, per ogni $i=0,1,\ldots$.

Le condizioni sono appunto quelle enunciate sopra per la validità della formula di Koblitz-Diamond.

Il caso della formula di Young è simile [B2]. Consideriamo ora una celebre formula di Selberg [An2]

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 D^c \prod_{i=1}^n z_i^{a-1}(1-z_i)^{b-1}\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \tag{5.17}$$

$$n! \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a+jc)\,\Gamma(b+jc)\,\Gamma(c+jc)}{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b+(n+j-1)\,c)}$$

ove

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j)^2$$

e

$$a,\ b,\ c + \frac{1}{n},\ c + \frac{a}{n-1},\ c + \frac{b}{n-1} \tag{5.17.1}$$

hanno parti reali positive.

Fissiamo $n = 1, 2, \dots$ e poniamo

$$F(y) = y^n + \sum_{i=1}^n t_i y^{n-i} = \prod_{i=1}^n (y + z_i)$$

$$E = (-1)^n F(-1) = \prod_{i=1}^n (1 - z_i)$$

cosicché D è il discriminante di F e

$$dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n = D^{1/2}\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

La formula (5.17) può allora essere riscritta come

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 D^{c-\frac{1}{2}}\, t_n^{a-1} E^{b-1}\, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n = \tag{5.18}$$

$$n! \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a+jc)\,\Gamma(b+jc)\,\Gamma(c+jc)}{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b+(n+j-1)\,c)}$$

sempre sotto le condizioni (5.17.1).

Nel 1981 R.J. Evans congetturò (e dimostrò in certi casi) deglle formule per somme di caratteri in dimensione n, analoghe a (5.17) e (5.18). Evans considerò le somme

$$Ev_q(a,\ b,\ c) = \sum_{t \in \mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q)} \chi_a(t_n)\, \chi_b(E(t))\, \chi_{c-\frac{1}{2}}(D(t)) \tag{5.19}$$

per $(a, b, c) \in ((1/(q-1))\mathbb{Z})^3$. Egli congetturò che

$$Ev_q(a, b, c) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-G_q(a+jc)\, G_q(b+jc)\, G_q(c+jc)}{G_q(c)\, G_q(a+b+(n+j-1)\, c)} \tag{5.20}$$

purché

$$a + b + (n+j-1)\, c \notin \mathbb{Z} \quad \text{for } j = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{5.20.1}$$

Le congetture di Evans sono state dimostrate da Greg Anderson [An1] per via elementare. È possibile dare una dimostrazione p-adica simile a quella che abbiamo sopra accennato per la formula di Koblitz-Diamond [B1], [P]. Ancora una volta tale dimostrazione p-adica si basa sul calcolo dell'azione del Frobenius su un F-cristallo a radici unitarie di rango 1.

L'affascinante trattato sulle funzioni speciali ricavato dal manoscritto di Bateman [Ba], propone una quantità di sfide all'analista p-adico, e al geometra aritmetico. Numerosi calcoli di valori speciali (*cf.* [Ba, Vol. 1, pp. 104-108], ad esempio) di funzioni ipergeometriche, hanno un analogo in somme di caratteri, ed ammettono una interpolazione p-adica. Si potrebbe tentare una descrizione (ed una dimostrazione) di un principio generale di equivalenza tra i due tipi di formule.

Il procedimento più sperimentato di continuazione analitica p-adica si basa sul metodo della filtrazione per le pendenze del Frobenius, ma non è affatto detto che questo modo sia l'unico o il più potente. Si deve ormai fare i conti con metodi completamente diversi basati sull'integrazione p-adica di Coleman [Co] o di Colmez [Cl], e sulla teoria dell'uniformizzazione delle varietà p-adiche a riduzione totalmente degenere [A].

A questo proposito, e per concludere, vorrei anche ricordare che la teoria delle funzioni L p-adiche sfugge per ora ad una filosofia generale geometrica che ne giustifichi l'esistenza in quanto funzioni analitiche p-adiche.

REFERENCES

[A] Y. ANDRÉ, *p-adic orbifolds and p-adic triangle groups*, Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, **183**, Septembre 1998.

[An1] G. ANDERSON, *The evaluation of Selberg sums*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math., **311** (1990), 469-472.

[An2] G. ANDERSON, *A short proof of Selberg's generalized Beta formula*, Forum Math., **3** (1991), 415-417.

[Ba] H. BATEMAN, *et al.*: *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, 1953.

[B1] F. BALDASSARRI, *p-adic interpolation of Evans sums and deformation of the Selberg integrals: an application of Dwork's theory*, Proceedings of the Taniguchi Workshop 1991 (M. Yoshida Ed.), Fukuoka 1991, 7-35.

[B2] F. BALDASSARRI, *Special values of symmetric hypergeometric functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 2249-2289.

[BC] F. BALDASSARRI - B. CHIARELLOTTO, *Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients*, in *Barsotti Memorial Symposium*, Perspectives in Mathematics Vol. **15**, Academic Press 1994, 11-50.

[Be] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, to appear.

[BGR] S. BOSCH - U. GÜNTZER, R. REMMERT, *Non-archimedean Analysis*, Grundlehren der math. Wissenschaften 261, Springer-Verlag, 1984.

[Bk1] V. BERKOVICH, *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-archimedean Fields*, Math. Surveys and Monographs, Number 33, AMS 1990.

[Bk2] V. BERKOVICH, *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible*, Inv. Math., **137** (1999), 1-84.

[BO] P. BERTHELOT - A. OGUS, *Notes on Crystalline Cohomology*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton N.J., 1978.

[BL1] S. BOSCH - W. LÜTKEBOHEMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Ann., **270** (1985), 349-379.

[BL1] S. BOSCH - W. LÜTKEBOHEMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties II*, nv. Math., **78** (1984), 257-297.

[Bo] M. BOYARSKY, *p-adic gamma function and Dwork cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc., **257** (1980), 359-369.

[Cl] P. COLMEZ, *Intégration sur les variétés p-adiques*, Astérisque **248**, Soc. Math. de France, 1998.

[Co] R. COLEMAN, *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Inv. Math., **69** (1982), 171-208.

[De] P. DELIGNE, *La conjecture d Weil I*, Publ. Math. I.H.E.S., **43** (1974), 273-307.

[Di] J. DIAMOND, *Hypergeometric series with a p-adic variable*, Pacific J. Math. Soc., **94** (1981), 265-276.

[Dw1] B. DWORK, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. of Math., **82** (1960), 631-648.

[Dw2] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface*, Publ. Math. IHES, **12** (1962), 5-68.

[Dw3] B. DWORK, *Lectures on p-adic Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 253, Springer (1982), 310 pages.

[Dw4] B. DWORK, *Generalized Hypergeometric Functions*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford (1990), 188 pages.

[GP] L. GERRITZEN - M. VAN DER PUT, *Schottky Groups and Mumford Curves*, LNM 817, Springer, 1980.

[GrKo] B. GROSS - N. KOBLITZ, *Gauss sums and the p-adic* Γ*-function*, Annals of Math., **109** (1979), 569-581.

[I] L. ILLUSIE, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique* (d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine *et al.*), Sém. Bourbaki, Exp. 726, Astérisque, **189-190** (1990), 325-374.

[K] N. KATZ, *Exponential Sums and Differential Equations*, Annals of Math. Studies N. 124, Princeton Univ. Press, 1990.

[Ko] N. KOBLITZ, *The hypergeometric function with p-adic parameters*, in *Proceedings of the Queen's (Ontario) Number Theory Conference, 1979*, 319-328.

[L] S. LANG, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1970.

[Mo] Y. MORITA, *A p-adic analogue of the* Γ*-function*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **22** (1975), 255-266.

[P] O. PILTANT, *Frobenius pour les sommes de Selberg*, Math. Ann., **303** (1995), 435-456.

[Po] E. G. C. POOLE, *Introduction to the Theory of Linear Differential Equations*, Dover Publications Inc., New York (1960), 199 pages.

[W] A. WEIL, *Number of solutions of equations over finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 497-508.

[Y] P. TH. YOUNG, *Apéry numbers, Jacobi sums, and special values of generalized p-adic hypergeometric functions*, J. of Number Theory, **41** (1992), 231-255.

Dipartimento di Matematica Pura & Applicata - Università di Padova

---

Pervenuta in Redazione
il 30 settembre 2000