Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco de Giovanni

Gruppi ed automorfismi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-B** (2000), n.2, p. 273–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_2_273_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
(8) 3-B (2000), 273-286

Gruppi ed automorfismi.

FRANCESCO DE GIOVANNI (*)

1. – Introduzione.

Da oltre un secolo uno dei metodi per lo studio delle strutture matematiche è l'analisi dei loro gruppi di automorfismi, sicchè il concetto di gruppo nasce spontaneamente con l'esigenza di evidenziare gli aspetti comuni di teorie a volte molto lontane tra loro. Lo sviluppo interno della teoria dei gruppi ha certamente risentito in modo rilevante delle questioni poste da tale necessità. D'altra parte, la stessa teoria dei gruppi ha fruito notevolmente dei progressi di altre teorie matematiche (quali la topologia, la combinatoria, l'omologia, la teoria degli anelli), invertendo in un certo senso l'impostazione originaria, e stabilendo così un legame profondo e fruttuoso tra gruppi ed altri oggetti matematici. Lo scopo di questo articolo è l'esposizione di risultati concernenti i gruppi di automorfismi di gruppi, e la descrizione di alcuni metodi utilizzati in questa teoria, con particolare riguardo all'uso di tecniche omologiche. La scelta degli argomenti trattati è ovviamente legata al gusto personale, sicchè queste note non hanno alcuna pretesa di completezza.

Sia G un gruppo. L'insieme $Aut\,G$ di tutti gli automorfismi di G è naturalmente dotato di una struttura di gruppo mediante l'ordinaria operazione di composizione di applicazioni (che sarà denotata moltiplicativamente). Il gruppo $Aut\,G$ si chiama *automorfo* di G. Le strutture dei gruppi G ed $Aut\,G$ (e di alcuni rilevanti sottogruppi di quest'ultimo) sono fortemente correlate. Una prima elementare indicazione di questo fenomeno è fornita dal comportamento del sottogruppo normale $Inn\,G$ di $Aut\,G$ costituito da tutti gli automorfismi interni del gruppo G. Si ricordi che, se a è un elemento di G, l'*automorfismo interno* di G determinato da a è l'applicazione

$$\overline{a} : x \in G \rightarrow a^{-1} x a \in G .$$

È immediato verificare che $Inn\,G$ è isomorfo al gruppo quoziente $G/Z(G)$ di G rispetto al suo centro. In particolare, G è un gruppo abeliano se e solo se $Inn\,G = \{1\}$; da ciò segue che per un gruppo G risulta $Aut\,G = \{1\}$ se e solo se G è costituito da al più 2 elementi.

(*) Conferenza tenuta a Napoli il 16 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

2. – Condizioni finitarie sull'automorfo.

Sia

$$\{1\} \to A \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\varepsilon} Q \to \{1\}$$

un'estensione di gruppi (cioè una sequenza esatta corta di omomorfismi tra gruppi) con nucleo abeliano A. Allora A è isomorfo ad un sottogruppo normale N di G tale che G/N sia isomorfo a Q, sicchè senza ledere la generalità si può supporre che A è un sottogruppo normale di G, μ è l'immersione di A in G, ed ε è l'epimorfismo canonico di G su $Q = G/A$. La relazione di coniugio in G ovviamente determina su A una struttura di Q-modulo (cioè di modulo sull'anello gruppale $\mathbb{Z}Q$). È conveniente allora usare in A la notazione additiva, in Q quella moltiplicativa e conservare la notazione esponenziale per l'azione di Q su A. Sia $\tau\colon Q \to G$ un'applicazione tale che $\tau\varepsilon = 1$, sicchè l'insieme

$$\{x^\tau \mid x \in Q\}$$

è un trasversale di A in G (per questo motivo un'applicazione di questo tipo prende il nome di *funzione trasversale*). Qualunque siano gli elementi x e y di Q, risulta

$$(x^\tau y^\tau)^\varepsilon = xy = ((xy)^\tau)^\varepsilon,$$

per cui esiste un unico elemento $\varphi(x, y)$ di A tale che

$$x^\tau y^\tau = (xy)^\tau \varphi(x, y).$$

Se x, y, z sono elementi di Q, dall'uguaglianza

$$x^\tau (y^\tau z^\tau) = (x^\tau y^\tau)\, z^\tau$$

segue

$$\varphi(x, yz) + \varphi(y, z) = \varphi(xy, z) + \varphi(x, y)^z.$$

Pertanto l'applicazione

$$\varphi\colon Q \times Q \to A$$

è un 2-cociclo di Q in A, che dipende dalla scelta della funzione τ. Se τ' è un'altra funzione trasversale di Q in G, e φ' è il 2-cociclo di Q in A da essa determinato, si ottiene facilmente che la differenza $\varphi' - \varphi$ è un 2-cobordo, per cui il laterale $\Delta = \varphi + B^2(Q, A)$ è un elemento del secondo gruppo di coomologia $H^2(Q, A)$ che non dipende dalla scelta di τ ma soltanto dall'estensione considerata. L'elemento Δ viene chiamato *classe di coomologia* dell'estensione. Si può dimostrare che l'estensione

$$\{1\} \to A \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\varepsilon} Q \to \{1\}$$

è *spezzata* (cioè esiste un sottogruppo X di G tale che $G = XA$ e $X \cap A = \{1\}$) se e soltanto se la sua classe di coomologia è nulla. Pertanto i teoremi di spezzamento per le estensioni con nucleo abeliano (che giocano un ruolo fondamentale almeno nelle analisi riguardanti i gruppi risolubili) possono essere riformulati in termini di condizioni che assicurino l'annullamento del secondo gruppo di coomologia. In questo ambito sono fondamentali i risultati ottenuti da Robinson in una serie di articoli ([38], [39], [43], [44]).

Sia G un gruppo, e si ponga $C = Z(G)$, $Q = G/C$ e $Q_{ab} = Q/Q'$. È facile provare che il gruppo abeliano $Hom(Q_{ab}, C)$ è isomorfo al gruppo di tutti gli automorfismi di G che operano identicamente su C e su Q, sicchè condizioni finitarie imposte sull'automorfo $Aut\, G$ di G inducono forti restrizioni sulle strutture dei gruppi abeliani C e Q_{ab}. Poichè il centro è un sottogruppo caratteristico, banalmente ogni automorfismo di G induce automorfismi sia su C che su Q. Reciprocamente, la possibilità di ricostruire un automorfismo di G «incollando» automorfismi di C e di Q può essere descritta in termini omologici. Sia infatti Δ la classe di coomologia dell'estensione centrale

$$\{1\} \to C \to G \to Q \to \{1\},$$

e siano α e β automorfismi di C e di Q, rispettivamente. Allora α e β determinano degli automorfismi α_* e β^* del gruppo di coomologia $H^2(Q, C)$, e si può dimostrare che esiste un automorfismo γ di G che induce sia α che β se e soltanto se $\alpha_*(\Delta) = \beta^*(\Delta)$. Considerata l'azione di $Aut\, C \times Aut\, Q$ su $H^2(Q, C)$ definita ponendo

$$\Delta(\alpha, \beta) = (\beta^{-1})^*(\alpha_*(\Delta)),$$

si ottiene quindi una sequenza esatta corta di omomorfismi

$$\{1\} \to Hom(Q_{ab}, C) \to Aut\, G \to C_{Aut\, C \times Aut\, Q}(\Delta) \to \{1\},$$

e questa osservazione suggerisce che i metodi omologici possano essere uno strumento di grande potenza nello studio degli automorfismi gruppali.

La struttura dei gruppi il cui automorfo è finito può risultare estremamente complicata. In particolare, è ben noto che esistono gruppi abeliani senza torsione di elevata cardinalità che ammettono come automorfismi soltanto l'identità e l'inversione (cfr. ad esempio [6]). D'altra parte, il comportamento degli elementi periodici nei gruppi con l'automorfo finito è soggetto a notevoli restrizioni. Sia infatti G un gruppo tale che $Aut\, G$ sia finito; poichè il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito, un classico risultato di Schur assicura che anche il derivato G' di G è finito, sicchè l'insieme T degli elementi periodici di G è un sottogruppo. Nel 1955 R. Baer [2] ha dimostrato che un gruppo periodico dotato di un numero finito di automorfismi è finito, e tale risultato è un caso speciale del seguente importante teorema.

TEOREMA 2.1 (V.T. Nagrebeckiĭ [32]). – *Sia G un gruppo con l'automorfo finito. Allora l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo finito.*

La dimostrazione originale del Teorema 2.1 può essere notevolmente semplificata utilizzando gli strumenti forniti dall'algebra omologica. Infatti, se G è un gruppo con l'automorfo finito, e si pone $C = Z(G)$ e $Q = G/C$, si può dimostrare che la classe di coomologia Δ dell'estensione centrale

$$\{1\} \to C \to G \to Q \to \{1\}$$

è periodica, il che rende agevole la costruzione di alcuni particolari automorfismi del gruppo G e consente di provare che il sottogruppo di torsione di C è finito.

Nelle applicazioni dei metodi omologici a queste problematiche un ruolo estremamente importante è svolto dal *Teorema dei Coefficienti Universali* e dall'uso delle *sequenze spettrali*, in particolare di quella dovuta a Lyndon-Hochschild-Serre. È qui opportuno ricordare che, se Q è un gruppo, il *moltiplicatore di Schur* $M(Q)$ di Q è il secondo gruppo di omologia $H_2(Q, \mathbb{Z})$, dove il gruppo ciclico $\mathbb{Z}$ è riguardato come Q-modulo triviale. Il moltiplicatore di Schur ha un significato rilevante nella teoria delle estensioni di gruppi; è sufficiente osservare che, qualunque sia il gruppo G, per un famoso risultato di Hopf il sottogruppo $G' \cap Z(G)$ è un'immagine omomorfa del moltiplicatore di Schur di $G/Z(G)$. Il Teorema dei Coefficienti Universali assicura che, se Q è un gruppo e C è un Q-modulo triviale, allora risulta

$$H^2(Q, C) \simeq Ext(Q_{ab}, C) \oplus Hom(M(Q), C)\,.$$

In particolare, se il gruppo Q è perfetto (cioè coincide con il suo derivato) oppure se C è un gruppo divisbile, si ottiene che i gruppi $H^2(Q, C)$ e $Hom(M(Q), C)$ sono isomorfi. Questo risultato può ovviamente essere applicato nel caso in cui C è il centro di un gruppo G e $Q = G/C$, e si è già evidenziato come in questa situazione sia importante poter provare che il gruppo $H^2(Q, C)$ è in qualche senso abbastanza «piccolo». Anche la sequenza spettrale di Lyndon-Hochschild-Serre può essere utilizzata allo stesso scopo, quando si abbiano informazioni sui gruppi di coomologia di un sottogruppo normale N di Q e su quelli del gruppo quoziente Q/N; infatti, qualunque sia il Q-modulo A, il gruppo di coomologia $H^n(Q, A)$ è dotato di una serie finita i cui fattori sono isomorfi a sezioni dei gruppi coomologici misti $H^{n-i}(Q/N, H^i(N, A))$ ($i = 0, \ldots, n$). In particolare, se $n = 2$, il calcolo del gruppo $H^2(Q, A)$ può essere ricondotto a quello dei gruppi

$$H^2(Q/N, H^0(N, A)),\ H^1(Q/N, H^1(N, A)),\ H^0(Q/N, H^2(N, A))\,,$$

che può risultare notevolmente più elementare, in virtù delle interpretazioni dei gruppi di coomologia di grado 0 e 1. Usando questi potenti metodi, nonchè la sequenza esatta lunga di coomologia che si deriva da una sequenza esatta corta di omomorfismi tra moduli, è possibile approfondire l'analisi del comportamento degli elementi periodici nei gruppi il cui automorfo verifichi condizioni finitarie. Il risultato più generale in questo ambito è il seguente.

TEOREMA 2.2 (S. Franciosi, F. de Giovanni, D. J. S. Robinson [22]). – *Sia G un gruppo risolubile-per-finito il cui automorfo $Aut\,G$ ha rango sezionale finito. Allora i sottogruppi di Sylow di G verificano la condizione minimale, e sono finiti se G è anche periodico-per-nilpotente. Inoltre, se G è periodico-per-nilpotente e $Aut\,G$ ha rango abeliano totale finito, allora l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo finito.*

Si ricordi che un gruppo G ha *rango sezionale finito* se è privo di sezioni abeliane infinite che abbiano esponente primo; si dice invece che G ha *rango abeliano totale finito* se per ogni sottogruppo abeliano A di G risulta finita la somma

$$r_0(A) + \sum_p r_p(A),$$

dove p varia nell'insieme di tutti i numeri primi. Inoltre un gruppo G è *periodico-per-nilpotente* se esiste un numero intero positivo n tale che l'n-simo termine $\gamma_n(G)$ della serie centrale inferiore di G sia periodico.

Ulteriori risultati sul comportamento degli elementi periodici nei gruppi al cui automorfo siano imposte altre condizioni finitarie (quali ad esempio la contabilità, condizioni di catena sui sottogruppi normali e subnormali oppure restrizioni sulle classi di coniugio) si trovano in [15], [16] e [53].

Si concluderà questo paragrafo con alcune informazioni riguardanti un particolare tipo di automorfismi dei gruppi, gli automorfismi centrali. Un automorfismo γ di un gruppo G si dice *centrale* se opera trivialmente sul gruppo quoziente $G/Z(G)$, o equivalentemente se è permutabile con ogni automorfismo interno di G. L'insieme $Aut_c G$ degli automorfismi centrali di G è allora il centralizzante di $Inn\,G$ in $Aut\,G$, ed è quindi un sottogruppo normale di $Aut\,G$. Ovviamente un gruppo a centro identico è privo di automorfismi centrali non banali, mentre in un gruppo abeliano ogni automorfismo è centrale. R. Laue [28] ha provato che, se G è un gruppo finito privo di fattori diretti abeliani non identici, allora il gruppo $Aut_c G$ è nilpotente, e questo risultato è stato esteso ad alcune classi di gruppi infiniti in [21]. L'influenza su un gruppo G di restrizioni imposte ad $Aut_c G$ è significativa quando il centro di G è sufficientemente «grande», in particolare quando G è nilpotente, e vari autori si sono occupati di questo argomento (cfr. ad esempio [9], [14], [21], [34]). Gli strumenti omologici esposti prima consentono di provare il seguente risultato.

TEOREMA 2.3 (S. Franciosi - F. de Giovanni [19]). – *Sia G un gruppo finito-per-nilpotente con $Aut_c G$ periodico. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ ha esponente finito.*

3. – Automorfismi esterni.

Se G è un gruppo e Γ è un gruppo di automorfismi di G, è sempre possibile costruire il *prodotto semidiretto esterno* $\Gamma \ltimes G$. Questo gruppo ha come sostegno il prodotto cartesiano $\Gamma \times G$, e in esso l'operazione è definita ponendo

$$(\gamma_1, x_1)(\gamma_2, x_2) = (\gamma_1 \gamma_2, x_1^{\gamma_2} x_2)$$

qualunque siano gli elementi $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ e $x_1, x_2 \in G$. Il gruppo G si può immergere in modo naturale come sottogruppo normale nel prodotto semidiretto $\Gamma \ltimes G$, mentre Γ può essere identificato con un sottogruppo di $\Gamma \ltimes G$ i cui elementi operano su G (per coniugio) come gli automorfismi che costituiscono Γ. In particolare, se almeno un elemento di G è portato fuori dalla sua classe di coniugio da qualche oggetto di Γ, la classe di coniugio di tale elemento (in $\Gamma \ltimes G$) è propriamente più ampia della classe di coniugio determinata dallo stesso elemento limitatamente all'azione di G. Affinchè ciò avvenga è ovviamente necessario che Γ non sia costituito da soli automorfismi interni di G. Questa osservazione spiega in qualche modo l'importanza per un gruppo G dell'eventuale esistenza di *automorfismi esterni*, cioè di elementi dell'insieme $Aut\, G \setminus Inn\, G$. Ovviamente un gruppo G è dotato di automorfismi esterni se e soltanto se il gruppo quoziente $Out\, G = Aut\, G/Inn\, G$ è non identico. Il gruppo simmetrico S_3 fornisce un primo esempio di gruppo (non abeliano) privo di automorfismi esterni. Fondamentale in questo ambito è il seguente risultato:

TEOREMA 3.1 (W. Gaschütz [23]). – *Sia G un p-gruppo finito non abeliano (dove p è un numero primo). Allora il gruppo $Out\, G = Aut\, G/Inn\, G$ ha ordine divisibile per p. In particolare, G è dotato di automorfismi esterni.*

Il problema dell'estensione del teorema di Gaschütz al caso dei gruppi nilpotenti infiniti è stato affrontato da diversi autori. In particolare, A. E. Zalesskiĭ [52] ha costruito un gruppo nilpotente senza torsione privo di automorfismi esterni, provando in tal modo che il Teorema 3.1 non è valido per un gruppo nilpotente arbitrario. D'altra parte, lo stesso Zalesskiĭ [51] ha dimostrato che ogni p-gruppo nilpotente infinito ammette automorfismi non interni, e questo risultato è stato raffinato in seguito da F. Menegazzo e S. E. Stonehewer [30]. La situazione è diversa nel caso dei gruppi localmente nilpotenti, in quanto S. Thomas [47] ha esibito esempi di p-gruppi localmente finiti non numerabili che sono privi di automorfismi interni ed hanno centro identico. La cardinalità del gruppo ha qui un ruolo importante, in quanto sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 3.2 (O. Puglisi [35]). – *Ogni p-gruppo localmente finito numerabile è dotato di automorfismi esterni.*

Lo stesso Puglisi [36] ha dimostrato che ogni p-gruppo ipercentrale la cui serie centrale superiore abbia lunghezza al più ω è dotato di automorfismi esterni.

Un'altra possibile estensione del teorema di Gaschütz al caso infinito riguarda i gruppi nilpotenti finitamente generati. In questo caso, N.D. Gupta e S. E. Stonehewer [24] hanno dimostrato che risulta $Out\,G \neq \{1\}$ per ogni gruppo nilpotente finitamente generato G che abbia lunghezza di Hirsch almeno 2 (si ricordi che la *lunghezza di Hirsch* di un gruppo policiclico è il numero dei fattori infiniti di una qualunque serie finita a fattori ciclici del gruppo), mentre U.H. Martin Webb [49] ha ottenuto un risultato analogo per i gruppi nilpotenti finitamente generati di classe 2.

Sia G un gruppo, e siano N un sottogruppo normale di G e A il centro di N. La relazione di coniugio determina allora in A una struttura di modulo sul gruppo quoziente $Q = G/N$. Sia Γ il gruppo degli automorfismi di G che operano trivialmente su N e su G/N, e sia γ un qualunque elemento di Γ. Per ogni elemento x di G il prodotto $x^{-1}x^{\gamma}$ appartiene allora ad A, e l'applicazione $\delta_{\gamma}\colon Q \to A$, definita ponendo $(xN)^{\delta_{\gamma}} = x^{-1}x^{\gamma}$ per ogni $x \in G$ è una derivazione di Q in A. È facile provare che l'applicazione

$$\delta\colon \gamma \in \Gamma \to \delta_{\gamma} \in Der(Q, A)$$

è un isomorfismo, per cui

$$\Gamma \simeq Der(Q, A).$$

Si supponga inoltre che il sottogruppo normale N contiene il suo centralizzante $C_G(N)$ (cioè che $C_G(N) = A$); allora un elemento γ di Γ è un automorfismo interno di G se e soltanto se δ_{γ} è una derivazione interna. D'altra parte l'insieme $Inn(Q, A)$ delle derivazioni interne di Q in A è un sottogruppo di $Der(Q, A)$ e $Der(Q, A)/Inn(Q, A)$ è isomorfo al primo gruppo di coomologia $H^1(Q, A)$. Pertanto in questo caso si ottiene che $\Gamma/\Gamma \cap Inn\,G$ è isomorfo a $H^1(Q, A)$, e quindi l'assenza per G di automorfismi esterni ha un'interpretazione omologica.

Un gruppo si dice *completo* se ha il centro identico ed ogni suo automorfismo è interno. È ben noto che un gruppo G è completo se e soltanto se è un fattore diretto di ogni gruppo in cui si immerge come sottogruppo normale. Ovviamente il gruppo simmetrico S_3 è completo, mentre un esempio di gruppo completo infinito si ottiene considerando l'automorfo di un qualunque gruppo libero non abeliano. Allo scopo di fornire un esempio dell'uso delle tecniche omologiche in questi argomenti si proverà il seguente risultato, concernente i gruppi supersolubili (un gruppo si dice *supersolubile* se è dotato di una serie normale finita a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali).

TEOREMA 3.3 (D. J. S. Robinson [41]). – *Sia G un gruppo supersolubile infinito. Allora G non è completo.*

DIMOSTRAZIONE. – Per assurdo il gruppo G sia completo, e siano A un sottogruppo normale abeliano massimale di G e $Q = G/A$. Ovviamente il gruppo $C_G(A)/A$ è privo di sottogruppi G-invarianti ciclici non identici, e quindi $C_G(A) = A$ in quanto G è supersolubile. Poichè $Z(G) = \{1\}$, si ha inoltre che il sottogruppo normale abeliano A è privo di elementi di periodo 2, per cui l'applicazione $\alpha\colon A \to A$, definita ponendo $a^\alpha = a^2$ per ogni $a \in A$, è un monomorfismo. La sequenza esatta corta di omomorfismi tra Q-moduli

$$\{1\} \to A \xrightarrow{\alpha} A \to A/A^2 \to \{1\}$$

determina una sequenza esatta lunga di omomorfismi tra i gruppi di coomologia

$$\ldots \to H^0(Q, A) \to H^0(Q, A/A^2) \to H^1(Q, A) \to \ldots$$

D'altra parte risulta $H^0(Q, A) = 0$ in quanto il centro di G è identico, e $H^1(Q, A) = 0$ perchè G è privo di automorfismi esterni. Pertanto si ha anche $H^0(Q, A/A^2) = 0$, e quindi A/A^2 è privo di sottogruppi G-invarianti di ordine 2. Poichè G è supersolubile, si ottiene $A = A^2$, sicchè il gruppo abeliano finitamente generato A è finito. Pertanto G è finito, e questa contraddizione prova l'asserto. ∎

È possibile estendere il risultato precedente ai gruppi infiniti dotati di una serie normale finita a fattori ciclici oppure finiti; in questo caso la dimostrazione dipende essenzialmente da un'applicazione accurata della sequenza esatta lunga di coomologia.

Prendendo spunto dal Teorema 3.3, durante un seminario tenuto ad Urbana nel 1985, è stato congetturato che un gruppo supersolubile senza torsione sia sempre dotato di automorfismi esterni. A questo problema è stata data recentemente una risposta negativa da F. Menegazzo e O. Puglisi [29], i quali hanno costruito un gruppo supersolubile senza torsione G tale che $Out\,G = \{1\}$. In tale esempio il gruppo quoziente G/G' è finito, ed è quindi ancora aperto il problema dell'esistenza di automorfismi esterni per i gruppi dotati di una serie normale finita a fattori ciclici infiniti.

Sia G un gruppo a centro identico. Allora G può essere identificato in modo naturale col gruppo $Inn\, G$ dei suoi automorfismi interni, ed è ben noto che anche l'automorfo $Aut\, G$ di G ha il centro identico, sicchè $Aut\, G$ può a sua volta essere immerso nel suo automorfo. Si può allora definire per G la *torre degli automorfismi*

$$G_0 \xrightarrow{\mu_0} G_1 \xrightarrow{\mu_1} \dots \xrightarrow{\mu_{\alpha-1}} G_\alpha \xrightarrow{\mu_\alpha} G_{\alpha+1} \xrightarrow{\mu_{\alpha+1}} \dots ,$$

dove $G_0 = G$, $G_{\alpha+1} = Aut\, G_\alpha$ per ogni numero ordinale α, μ_α è l'immersione naturale (determinata dal passaggio agli automorfismi interni) di G_α in $G_{\alpha+1}$ e

$$G_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} G_\alpha$$

se λ è un ordinale limite. Se la torre degli automorfismi del gruppo G *termina*, cioè se esiste un numero ordinale τ tale che $G_\tau = G_{\tau+1}$, quest'ultimo gruppo è ovviamente completo. Un risultato ormai classico di H. Wielandt [50] assicura che la torre degli automorfismi di un gruppo finito a centro identico termina dopo un numero finito di passi, ed un analoga conclusione è stata ottenuta da A. Rae e J. E. Roseblade [37] per i gruppi risolubili a condizione minimale sui sottogruppi; inoltre J.A. Hulse [26] ha provato che la torre degli automorfismi di un gruppo policiclico a centro identico termina dopo al più una numerabilità di passi. Nel caso generale si ha:

TEOREMA 3.4 (S. Thomas [48]). – *Sia G un gruppo a centro identico. Allora la torre degli automorfismi di G termina dopo al più $(2^{|G|})^+$ passi (si ricordi che, se κ è un numero cardinale, κ^+ denota il minimo numero cardinale più grande di κ).*

Poichè è ben noto che un qualunque gruppo può essere identificato con un sottogruppo subnormale di un gruppo a centro identico, il Teorema 3.4 assicura che ogni gruppo può essere immerso come sottogruppo ascendente in un gruppo completo. Il risultato di S. Thomas è stato recentemente esteso da J. D. Hamkins [25] ai gruppi che non hanno centro identico (in questo caso ovviamente gli omomorfismi che intervengono nella definizione della torre degli automorfismi non sono tutti iniettivi).

4. – Gruppi che sono gruppi di automorfismi.

È naturale cercare di caratterizzare i gruppi che possono essere realizzati come gruppi di tutti gli automorfismi di un assegnato gruppo. Per quanto sia ovviamente molto poco probabile ottenere una risposta generale a questo problema, negli ultimi venti anni progressi notevoli sono stati apportati, in particolare nella determinazione di ampie classi di gruppi la cui struttura li esclude dalla possibilità di essere l'automorfo di un gruppo. Questo problema può essere sintetizzato come la ricerca delle soluzioni dell'equazione $Aut\,X = G$ per un assegnato gruppo G. In questa ottica il primo ad affrontare questo argomento è stato G. A. Miller [31] già nel 1900, il quale ha determinato tutti i gruppi finiti che ammettono come automorfo uno dei gruppi simmetrici S_3 e S_4. Molto più recentemente, D. J. S. Robinson [42] ha dimostrato che S_6 è l'unico gruppo simmetrico di grado finito che non è l'automorfo di alcun gruppo, mentre S_2 e S_4 sono gli unici gruppi simmetrici che compaiono come gruppi di tutti gli automorfismi di qualche gruppo infinito. Per quanto riguarda i gruppi alterni, ancora in [42] si ottiene che il gruppo A_n può essere realizzato come automorfo di un gruppo X se e soltanto se $n \leqslant 2$ oppure $n = 8$ e X è abeliano elementare di ordine 16.

I metodi omologici descritti nel secondo paragrafo consentono di ottenere interessanti informazioni sui gruppi infiniti che compaiono come gruppi di automorfismi, escludendo che essi possano verificare delle rilevanti condizioni finitarie. Il risultato più significativo in questa direzione è probabilmente il seguente.

TEOREMA 4.1 (D. J. S. Robinson [40]). – *Sia X un gruppo tale che $Aut\,X$ sia un gruppo di Černikov. Allora $Aut\,X$ è finito.*

Si ricordi qui che un gruppo G è un *gruppo di Černikov* se verifica la condizione minimale sui sottogruppi ed inoltre contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. Si verifica subito che un gruppo di Černikov contiene un sottogruppo normale abeliano divisibile di indice finito, e i gruppi di Černikov possono appunto essere caratterizzati come le estensioni finite dei prodotti diretti di un numero finito di gruppi di Prüfer. Il Teorema 4.1 è allora un caso particolare di un risultato di M. R. Dixon e M. J. Evans [13], che assicura che, se X è un gruppo il cui automorfo $Aut\,X$ è periodico e divisibile-per-finito, allora $Aut\,X$ deve essere finito. Gli stessi autori hanno anche dimostrato in [12] che esistono infiniti gruppi abeliani senza torsione numerabili (non isomorfi) il cui automorfo è divisibile e numerabile, e che se un gruppo abeliano divisibile e numerabile G è l'automorfo di un gruppo X, allora G deve avere rango senza torsione infinito (cioè deve contenere un sottogruppo abeliano libero non finitamente generato). Un'altra estensione del teorema di Robinson ai gruppi localmente finiti che verificano la condizione minimale sui sottogruppi primari è stata ottenuta da M. R. Pettet [33].

Un'informazione interessante sulla risoluzione dell'equazione $Aut\,X = G$ è stata fornita da F. Gross (cfr. [27]), il quale ha dimostrato che per ogni gruppo finito G risulta finito l'insieme dei gruppi finiti X tali che $Aut\,X \simeq G$. Si osservi anche che, se p è un numero primo dispari e G è un p-gruppo abeliano finito il cui ordine non supera p^{11}, allora non esiste alcun gruppo finito X il cui automorfo sia isomorfo a G (cfr. [3]). Infine, è stato provato da R. Brandl, S. Franciosi e F. de Giovanni [4] che, se X è un gruppo finito tale che $Aut\,X$ è minimale non nilpotente, allora $Aut\,X$ deve essere minimale non abeliano.

5. – Automorfismi che fissano sottogruppi notevoli.

Sia G un gruppo, e sia $\mathcal{L}$ un insieme non vuoto di sottogruppi di G tale che H^{γ} appartenga a $\mathcal{L}$ per ogni elemento H di $\mathcal{L}$ e per ogni automorfismo γ di G. L'insieme $Aut_{\mathcal{L}}\,G$ costituito da tutti gli automorfismi γ di G tali che $H^{\gamma} = H$ per ogni $H \in \mathcal{L}$ è un sottogruppo normale dell'automorfo $Aut\,G$ di G, in quanto coincide con il nucleo dell'omomorfismo naturale di $Aut\,G$ nel gruppo simmetrico $Sym\,(\mathcal{L})$. La struttura del gruppo $Aut_{\mathcal{L}}\,G$ è stata studiata per varie scelte di $\mathcal{L}$ tra gli insiemi notevoli di sottogruppi.

Un automorfismo γ di un gruppo G si dice un *automorfismo potenza* di G se risulta $H^{\gamma} = H$ per ogni sottogruppo H di G, il che ovviamente equivale a richiedere che γ fissa ogni sottogruppo ciclico di G. Non è difficile verificare che il sottogruppo normale $PAut\,G$ di $Aut\,G$, costituito da tutti gli automorfismi potenza del gruppo G, è abeliano e residualmente finito. Un'analisi dettagliata del comportamento degli automorfismi potenza di un gruppo è dovuta a C.D.H. Cooper [5]. È opportuno osservare che gli automorfismi potenza hanno un ruolo essenziale nello studio dei gruppi risolubili in cui la relazione di normalità è transitiva (*T-gruppi*).

TEOREMA 5.1 (C. D. H. Cooper [5]). – *Qualunque sia il gruppo G, ogni automorfismo potenza di G è centrale, sicchè $PAut\,G$ è un sottogruppo di $Aut_c\,G$.*

Se G è un gruppo, la *norma* $N(G)$ di G è l'intersezione dei normalizzanti di tutti i sottogruppi di G, e un risultato di E. Schenkman [46] assicura che $N(G)$ è sempre contenuto nel secondo termine $Z_2(G)$ della serie centrale superiore di G. Ciò equivale all'affermazione che ogni automorfismo interno che sia un automorfismo potenza è centrale. Pertanto il risultato di Schenkman è un caso particolare del Teorema 5.1. Cooper ha anche provato che ogni automorfismo potenza di un gruppo abeliano è omogeneo, cioè manda elementi dello stesso ordine in una medesima potenza.

Negli ultimi anni particolare attenzione è stata rivolta al gruppo $Aut_{sn}\,G$ costituito dagli automorfismi che fissano tutti i sottogruppi subnormali del gruppo G. Il primo contributo in questa direzione è stato fornito da S. Franciosi e F. de Giovanni [18]; in questo articolo viene dimostrato che G è un gruppo risolubile, allora $Aut_{sn}\,G$ è metabeliano, mentre se G è policiclico, si ha che $Aut_{sn}\,G$ è finito oppure abeliano. Nel caso dei gruppi finiti, sono state ottenute informazioni anche in assenza dell'ipotesi di risolubilità. Si ha infatti:

TEOREMA 5.2 (D. J. S. Robinson [45]). – *Qualunque sia il gruppo finito G, il gruppo quoziente* $Aut_{sn}G/Aut_{sn}G \cap Inn\,G$ *è risolubile con lunghezza derivata al più* 4.

Anche quando si lavora nell'ambito dei gruppi policiclici il sottogruppo $Aut_{sn}G \cap Inn\,G$ ha un ruolo importante per la struttura dell'intero gruppo $Aut_{sn}G$, in quanto V. D. Almazar e J. Cossey [1] hanno provato che in questo caso l'indice

$$|Aut_{sn}G : Aut_{sn}G \cap Inn\,G|$$

è finito. Altri recenti contributi allo studio del gruppo $Aut_{sn}G$ si trovano in [10] e [11].

Il gruppo $Aut_n G$ costituito da tutti gli automorfismi che fissano ogni sottogruppo normale del gruppo G è stato studiato in [7] e [17] nel caso in cui G è nilpotente, mentre la struttura del gruppo degli automorfismi che fissano tutti i sottogruppi non normali di un gruppo è stata dettagliatamente descritta in [20]. Infine, M. Curzio, S. Franciosi e F. de Giovanni [8] hanno considerato il gruppo $IAut\,G$ degli automorfismi di G che fissano tutti i sottogruppi infiniti, provando che tale gruppo è in molti casi abeliano, e che $IAut\,G = PAut\,G$ se G è un gruppo risolubile-per-finito che non verifica la condizione minimale sui sottogruppi.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. D. ALMAZAR - J. COSSEY, *Automorphisms fixing subnormal subgroups of polycyclic groups*, Glasgow Math. J., **41** (1999), 379-384.

[2] R. BAER, *Finite extensions of abelian groups with minimum condition*, Trans. Amer. Math. Soc., **79** (1955), 521-540.

[3] G. BAN - S. YU, *Minimal abelian groups that are not automorphism groups*, Arch. Math. (Basel), **70** (1998), 427-434.

[4] R. BRANDL - S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI, *Minimal non-nilpotent groups as automorphism groups*, Monats. Math., **112** (1991), 89-98.

[5] C. D. H. COOPER, *Power automorphisms of a group*, Math. Z., **107** (1968), 335-356.

[6] A. L. S. CORNER, *Endomorphism algebras of large modules with distinguished submodules*, J. Algebra, **11** (1969), 155-185.

[7] G. CORSI, *Automorphisms fixing every normal subgroup of a p-group*, Boll. Un. Mat. Ital. (6), **4A** (1985), 245-252.

[8] M. CURZIO - S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI, *On automorphisms fixing infinite subgroups of groups*, Arch. Math. (Basel), **54** (1990), 4-13.

[9] M. CURZIO - D. J. S. ROBINSON - H. SMITH - J. WIEGOLD, *Some remarks on central automorphisms of hypercentral groups*, Arch. Math. (Basel), **53** (1989), 327-331.

[10] M. Dalle Molle, *Sugli automorfismi che fissano i sottogruppi subnormali di un gruppo risolubile*, Boll. Un. Mat. Ital. (7), **9A** (1995), 483-491.
[11] U. Dardano - C. Franchi, *On group automorphisms fixing subnormal subgroups setwise*, Boll. Un. Mat. Ital. (in corso di stampa).
[12] M. R. Dixon - M. J. Evans, *Divisible automorphism groups*, Quart. J. Math. Oxford (2), **41** (1990), 179-188.
[13] M. R. Dixon - M. J. Evans, *Periodic divisible-by-finite automorphism groups are finite*, J. Algebra, **137** (1991), 416-424.
[14] M. R. Dixon - M. J. Evans, *On groups with a central automorphism of infinite order*, Proc. Amer. Math. Soc., **114** (1992), 331-336.
[15] S. Franciosi - F. de Giovanni, *A note on groups with countable automorphism groups*, Arch. Math. (Basel), **47** (1986), 12-16.
[16] S. Franciosi - F. de Giovanni, *Some finiteness conditions for automorphism groups*, Glasgow Math. J., **29** (1987), 259-265.
[17] S. Franciosi - F. de Giovanni, *On automorphisms fixing normal subgroups of nilpotent groups*, Boll. Un. Mat. Ital. (7), **1B** (1987), 1161-1170.
[18] S. Franciosi - F. de Giovanni, *On automorphisms fixing subnormal subgroups of soluble groups*, Rend. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **82** (1988), 217-222.
[19] S. Franciosi - F. de Giovanni, *On central automorphisms of finite-by-nilpotent groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **33** (1990), 191-201.
[20] S. Franciosi - F. de Giovanni - H. Heineken, *On automorphisms fixing non-normal subgroups of groups*, Arch. Math. (Basel), **65** (1995), 196-209.
[21] S. Franciosi - F. de Giovanni - M. L. Newell, *On central automorphisms of infinite groups*, Comm. Algebra, **22** (1994), 2559-2578.
[22] S. Franciosi - F. de Giovanni - D. J. S. Robinson, *On torsion in groups whose automorphism groups have finite rank*, Rocky Mountain J. Math., **17** (1987), 431-445.
[23] W. Gaschütz, *Nichtabelsche p-Gruppen besitzen äussere p-Automorphismen*, J. Algebra, **4** (1966), 1-2.
[24] N. D. Gupta - S. E. Stonehewer, *Outer automorphisms of finitely generated nilpotent groups*, Arch. Math. (Basel), **31** (1978), 1-10.
[25] J. D. Hamkins, *Every group has a terminating transfinite automorphism tower*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 3223-3226.
[26] J. A. Hulse, *Automorphism towers of polycyclic groups*, J. Algebra, **16** (1970), 347-398.
[27] H. K. Iyer, *On solving the equation Aut(X)=G*, Rocky Mountain J. Math., **9** (1979), 653-670.
[28] R. Laue, *Zur Charakterisierung der Fittinggruppe der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe'*, J. Algebra, **40** (1976), 618-626.
[29] F. Menegazzo - O. Puglisi, *Outer automorphisms of supersoluble groups*, Glasgow Math. J. (in corso di stampa).
[30] F. Menegazzo - S. E. Stonehewer, *On the automorphism group of a nilpotent p-group*, J. London Math. Soc., **31** (1985), 272-276.
[31] G. A. Miller, *Groups with the same group of isomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., **1** (1900), 395-401.
[32] V. T. Nagrebeckiĭ, *On the periodic part of a group with a finite number of automorphisms*, Soviet Math. Dokl., **13** (1972), 953-956.
[33] M. R. Pettet, *Locally finite groups as automorphism groups*, Arch. Math. (Basel), **48** (1987), 1-9.

[34] M.R. PETTET, *Central automorphisms of periodic groups*, Arch. Math. (Basel), **51** (1988), 20-33.
[35] O. PUGLISI, *A note on the automorphism group of a locally finite p-group*, Bull. London Math. Soc., **24** (1992), 437-441.
[36] O. PUGLISI, *Outer automorphisms of hypercentral p-groups*, Glasgow Math. J., **37** (1995), 243-247.
[37] A. RAE - J. E. ROSEBLADE, *Automorphism towers of extremal groups*, Math. Z., **117** (1970), 70-75.
[38] D. J. S. ROBINSON, *Splitting theorems for infinite groups*, Symposia Math., **17** (1976), 441-470.
[39] D. J. S. ROBINSON, *The vanishing of certain homology and cohomology groups*, J. Pure Appl. Algebra, **7** (1976), 145-167.
[40] D. J. S. ROBINSON, *Infinite torsion groups as automorphism groups*, Quart. J. Math. Oxford (2), **30** (1979), 351-364.
[41] D. J. S. ROBINSON, *Infinite soluble groups with no outer automorphisms*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **62** (1980), 281-294.
[42] D. J. S. ROBINSON, *Groups with prescribed automorphism group*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **25** (1982), 217-227.
[43] D. J. S. ROBINSON, *Cohomology of locally nilpotent groups*, J. Pure Appl. Algebra, **48** (1987), 281-300.
[44] D. J. S. ROBINSON, *Homology and cohomology of locally supersoluble groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **102** (1987), 233-250.
[45] D. J. S. ROBINSON, *Automorphisms fixing every subnormal subgroup of a finite group*, Arch. Math. (Basel), **64** (1995), 1-4.
[46] E. SCHENKMAN, *On the norm of a group*, Illinois J. Math., **4** (1960), 150-152.
[47] S. THOMAS, *Complete existentially closed locally finite groups*, Arch. Math. (Basel), **44** (1985), 97-109.
[48] S. THOMAS, *The automorphism tower problem*, Proc. Amer. Math. Soc., **95** (1985), 166-168.
[49] U. H. MARTIN WEBB, *Outer automorphisms of some finitely generated nilpotent groups I*, J. London Math. Soc. (2), **21** (1980), 216-224.
[50] H. WIELANDT, *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, Math. Z., **45** (1939), 209-244.
[51] A. E. ZALESSKIĬ, *A nilpotent p-group has outer automorphisms*, Soviet Math. Dokl., **12** (1971), 227-230.
[52] A. E. ZALESSKIĬ, *An example of a torsion-free nilpotent group having no outer automorphism*, Math. Notes, **11** (1972), 16-19.
[53] J. ZIMMERMAN, *Countable torsion FC-groups as automorphism groups*, Arch. Math. (Basel), **43** (1984), 108-116.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli «Federico II»
Complesso Universitario Monte S. Angelo, Via Cintia I 80126 Napoli (Italy)

Pervenuta in Redazione
il 7 ottobre 1999